МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра высшей математики. Дисциплина Математика

Специальность 160505. Курс 1. Весенний семестр

Теоретические вопросы.

РАЗДЕЛ I. Функции, пределы.

1. Дать определение элементарной окрестности (ε-окрестности) числа p, элементарной окрестности ∞, элементарной окрестности $-\infty$.
2. Дать определение функции. Привести основные обозначения функции. Что называется областью определения функции и областью ее значений? Что значит «задать функцию f»? Дать определение графика функции.
3. Дать определение композиции двух отображений (сложной функции). Перечислить основные свойства композиции. Дать определение обратной функции. Каким свойством обладают графики взаимно-обратных функций. Привести несколько примеров взаимно-обратных функций.
4. Дать определение следующих классов функций:
   а) монотонно-возрастающие;
   б) монотонно-убывающие;
   в) невозрастающие;
   г) неубывающие;
   д) периодические с периодом Т;
   е) четные;
   ж) нечетные;
   з) линейные;
   и) полином n-ого порядка;
   к) рациональные.
5. Дать определение числовой последовательности. Дать определение предела числовой последовательности в двух формах: топологическое (через элементарную окрестность) и арифметическое (в терминах «$\varepsilon-\delta$»). Сформулировать теорему о единственности предела.
6. Какая числовая последовательность называется монотонной? Ограниченной? Сформулировать теоремы о пределе монотонной последовательности и неравенстве пределов.
7. Сформулировать основные теоремы о вычислении пределов числовых последовательностей:
   а) о сумме пределов;
   б) о произведении пределов;
   в) о пределе последовательности обратных величин;
   Чему равны следующие пределы:
   $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}, k\in N, a>1; \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}; \quad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$
8. Дать «$\varepsilon-\delta$» определение непрерывности функции в точке. Непрерывности функции на отрезке. Обозначение непрерывности функции. Привести примеры разрывных в точке функций.
9. Сформулировать теорему об основных свойствах непрерывных функций (сумма, разность, произведение и частное двух функций). Доказать с помощью этой теоремы непрерывность полинома n-ого порядка на всей числовой прямой.

10. Сформулировать теорему о непрерывности композиции функций и теорему о непрерывности обратной функции.
11. Сформулировать теорему о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции.
12. Дать определение предела функции. Сформулировать теорему о единственности предела. Чему равны «замечательные» пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \qquad\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} =$$

13. Сформулировать теоремы о вычислении предела функции:
    а) о сумме пределов;
    б) о произведении пределов;
    в) о пределе последовательности обратных величин;

14. Сформулировать теорему о пределе сложной функции и теорему о пределе обратной функции.
15. Дать определение правостороннего предела функции и левостороннего предела. Привести примеры.
16. Дать определение следующих пределов:
    $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty;$
    $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty;$
    $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty;$
    $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty;$
    $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A;$
    $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = B;$

17. Дать определение сравнения двух функций типа:

$$\varphi(x) = \underset{=}{O}(f(x)), x \to a$$

    и сформулировать соответствующий критерий. Привести пример.
18. Дать определение сравнения двух функций типа:

$$\varphi(x) = \overset{=}{O}(f(x)), x \to a$$

    и сформулировать соответствующий критерий. Привести пример.
19. Дать определение эквивалентности функций $\varphi(x) \propto f(x), x \to a$ и сформулировать соответствующий критерий. Дописать эквивалентные функции в следующих выражениях:

$$\sin(x) \propto ...., x \to 0 \qquad tg(x) \propto ...., x \to 0 \qquad e^x - 1 \propto ...., x \to 0$$

$$a^x - 1 \propto ...., x \to 0; a > 0 \qquad \ln(1+x) \propto ...., x \to 0 \qquad (1+x)^\alpha \propto ...., x \to 0$$

РАЗДЕЛ II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

20. Дать определение дифференцируемости функции в точке и ее производной. Основные обозначения производной. Геометрическая и кинематическая интерпретация производной.
21. Дать определение дифференциала функции. Теорема о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функций.
22. Теорема о производной суммы, произведения и частного двух функций.
23. Сформулировать теоремы о производной сложной функции и обратной функции.

24. Производная и дифференциал старших порядков, их обозначения и приложение в механике.
25. Дать определение монотонности функции на отрезке и сформулировать теорему о признаке монотонности функции.
26. Дать определение вогнутой вниз (и вогнутой вверх) функции на отрезке. Что называется точкой перегиба функции? Сформулировать теорему о необходимом условии для точки перегиба.
27. Дать определение точки локального экстремума функции. Сформулировать теорему о необходимом условии экстремума.
28. Сформулировать первое правило Лопиталя – раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$.
29. Сформулировать второе правило Лопиталя – раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.
30. Формула Тейлора для представления функции в виде полинома. Вывести формулу для экспоненциальной функции $y = e^x$.

РАЗДЕЛ III. Интегральное исчисление функции одной переменной.

31. Определение первообразной. Определение неопределенного интеграла. Привести примеры. Основные свойства неопределенного интеграла.

32. Замена переменной в неопределенном интеграле. Вычисление интегралов от функций вида:

$\int f(ax+b)dx$, a, b – константы; $\int f(\sin x)\cos x dx$; $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$\int f(\sin x)\cos x dx$; $\int f(ax^2+b)x dx$, a, b – константы;

33. Интегрирование по частям. Вычисление интегралов от функций вида:

$\int P_m(x)\sin ax dx$, $\int P_m(x)e^{ax}dx$, $\int P_m(x)\ln ax dx$, a – константа, $P_m(x)$ - полином степени m.

34. Метод неопределенных коэффициентов для разложения рациональной функции на простейшие. Интегрирование рациональных функций.

35. Определенный интеграл и его основные свойства. Формула Лейбница. Замена переменной.

36. Геометрические приложения определенного интеграла: длина кривой, площадь, объем тела вращения.

37. Несобственный интеграл первого рода (с бесконечным пределом) и его свойства.

38. Несобственный интеграл второго рода (от неограниченной функции) и его свойства.

39. Определение интегральной суммы и двойного интеграла. Теорема существования двойного интеграла.

40. Свойства двойного интеграла. Привести примеры задач, приводящих к двойному интегралу.

41. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Замена переменных в двойном интеграле.

42. Определение интегральной суммы и тройного интеграла. Теорема существования тройного интеграла.

43. Свойства тройного интеграла. Привести примеры задач, приводящих к тройного интегралу.

44. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат. Замена переменных в тройном интеграле.

45. Определенние интегральной суммы и криволинейного интеграла 1-ого рода, теорема существования криволинейного интеграла 1-ого рода.

46. Свойства криволинейного интеграла 1-ого рода. Примеры задач, приводящих к криволинейному интегралу 1-ого рода.

47. Вычисление криволинейного интеграла 1-ого рода в декартовой системе координат.

48. Векторное поле. Определение интегральной суммы и криволинейного интеграла 2-ого рода. Теорема существования криволинейного интеграла 2-ого рода.

49. Свойства криволинейного интеграла 2-ого рода. Примеры задач, приводящих к криволинейному интегралу 2-ого рода.

50. Вычисление криволинейного интеграла 2-ого рода вдоль кривой, заданной в параметрической форме в декартовой системе координат.

51. Необходимое и достаточное условие независимости криволинейного интеграла 2-ого рода от пути интегрирования. Потенциал векторного поля. Необходимое и достаточное условие существования потенциала. Нахождение потенциала.

52. Теорема о связи между двойным интегралом и криволинейным интегралом 2-ого рода (формула Грина).