

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра высшей математики. Дисциплина Математика
Специальность 160505. Курс 2. Осенний семестр 2012 года

Теоретические вопросы.

РАЗДЕЛ I. Дифференциальные уравнения (ДУ).

- 1) Дать определение дифференциального уравнения (ДУ). Что называется порядком ДУ? Что называется решением ДУ? Что такое интеграл ДУ? Какие виды ДУ первого порядка вы знаете?
- 2) Дать определение общего и частного решения ДУ первого порядка. Что такое общий интеграл ДУ первого порядка?
- 4) Как формулируется задача Коши для ДУ $y' = f(x, y)$? Сформулировать теорему существования и единственности решения задачи Коши.

- 3) Какое ДУ первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными? Показать как решаются уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

- 4) Какое ДУ первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными? Изложить метод решения ДУ первого порядка с разделяющимися переменными.
- 5) Какая функция $f = f(x, y)$ называется однородной функцией порядка n ? Привести пример однородной функцией 0-ого порядка, 1-ого порядка и 2-ого порядка. Какое ДУ первого порядка называется однородным?
- 6) Какое ДУ первого порядка называется однородным? Изложить метод решения однородного ДУ?
- 7) Дать определение линейного ДУ первого порядка? Изложить метод его решения.
- 8) Изложить метод вариации произвольной постоянной для решения линейного ДУ первого порядка.
- 9) Какое ДУ первого порядка называется уравнением Бернулли? Как оно решается?
- 10) Какое ДУ первого порядка называется уравнением в полных дифференциалах? Изложить метод его решения.
- 11) Дать определение ДУ второго порядка. Что называется общим решением этого уравнения? Частным решением? Показать как решается уравнение вида $y'' = f(x)$
- 12) Как решается уравнение вида $y'' = f(x, y')$?

- 13) Как решается уравнение вида $y'' = f(y, y')$?
- 14) Дать определение линейного ДУ 2-ого порядка. Какое линейное ДУ 2-ого порядка называется однородным? Вид общего решения однородного уравнения. Как связаны общее решение однородного уравнения и общее решение неоднородного?
- 15) Записать в общем виде линейное ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами и соответствующее ему однородное уравнение. Что называется характеристическим уравнением? Привести примеры.
- 16) Как получается характеристическое уравнение для линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами. Какое отношение имеет корень характеристического уравнения к решению ДУ?
- 17) Как строится общее решение однородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.
- 18) Изложить метод вариации произвольной постоянной для решения линейного ДУ второго порядка.
- 19) В каком виде ищется частное решение неоднородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть имеет вид $P_m(x)\exp(\lambda x)$, где $P_m(x)$ - полином степени m , и λ - не является корнем характеристического уравнения.
- 20) В каком виде ищется частное решение неоднородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть имеет вид $P_m(x)\exp(\lambda x)$, где $P_m(x)$ - полином степени m , и λ - корень характеристического уравнения.
- 21) В каком виде ищется частное решение неоднородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть имеет вид $P_m(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x)$, где $P_m(x)$ - полином степени m , и $\alpha + i\beta$ - не является корнем характеристического уравнения.
- 22) В каком виде ищется частное решение неоднородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть имеет вид $P_m(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x)$, где $P_m(x)$ - полином степени m , и $\alpha + i\beta$ - не является корнем характеристического уравнения.
- 23) В каком виде ищется частное решение неоднородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть имеет вид $P_m(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x)$, где $P_m(x)$ - полином степени m , и $\alpha + i\beta$ - корень характеристического уравнения.
- 24) В каком виде ищется частное решение неоднородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть имеет вид $P_m(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x)$, где $P_m(x)$ - полином степени m , и $\alpha + i\beta$ - корень характеристического уравнения.

РАЗДЕЛ II. Числовые и функциональные ряды.

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Бесконечная геометрическая прогрессия и гармонический ряд.
2. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости.
3. Ряды с неотрицательными членами, критерий сходимости. Признаки сравнения.
4. Три основных признака сходимости знакоположительных рядов: признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.
5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
 6. Функциональные ряды. Область сходимости. Свойства сходящихся рядов: непрерывность суммы ряда, почленное интегрирование и дифференцирование.
7. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Формулы для вычисления радиуса сходимости.
 7. Основные свойства степенных рядов. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
8. Разложение функции в степенной ряд. Единственность разложения. Ряды Тейлора.
 9. Разложение в степенной ряд основных элементарных функций.
11. Тригонометрическая система функций на отрезке $[-\pi, \pi]$, ее ортогональность.
12. Тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье. Теорема Дирихле.
13. Разложение в ряд Фурье на произвольном интервале $[-1, 1]$.

РАЗДЕЛ III. Теория вероятности и математической статистики.

Предмет теории вероятностей. Случайные события. Достоверное и невозможное событие. Несовместные и равновозможные события. Полная группа событий.

Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности. Основные формулы комбинаторики: число неупорядоченных выборов, число упорядоченных выборов, число перестановок.

Геометрические вероятности. Теорема сложения вероятностей. Противоположные события.

Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Формула полной вероятности.

Определение системы гипотез опыта. Формула Байеса.

Схема повторных испытаний. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов.

Схема повторных испытаний при большом числе испытаний: функция Лапласа, формула Лапласа.

Случайные величины. Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Способы задания дискретной случайной величины.

Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства.

Биномиальное распределение случайной величины. Примеры.

Распределение Пуассона (предельный случай биномиального распределения).

Нормальное распределение случайной величины, функция распределения и плотность вероятности, основные свойства.

Математическое ожидание случайной величины и его основные свойства.

Дисперсия случайной величины и ее основные свойства. Теорема о дисперсии. Средне-квадратичное отклонение.

Математическое ожидание и дисперсия для биномиального распределения.

Математическое ожидание и дисперсия для нормального распределения.

Показательное распределение случайной величины. Примеры. Математическое ожидание и дисперсия.

Равномерное распределение случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия.

Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд, статистический ряд. Графическое изображение статистического ряда.

Выборочная функция распределения. Теорема о связи функции распределения генеральной совокупности и выборочной функции распределения.

Числовые характеристики статистического распределения: выборочные среднее и дисперсия, их свойства, теорема о выборочной дисперсии.

Определение точечной статистической оценки параметра распределения. Состоятельность и несмещенность оценки. Примеры.

Точечная оценка математического ожидания и дисперсии. Метод Пирсона получения точечных статистических оценок.

Примеры задач

РАЗДЕЛ I.

Найти общее решение уравнения:

$$(x + 1)^3 dy - (y - 2)^2 dx = 0;$$

Решить уравнение:

$$y^2 + x^2 y' = x y y'.$$

Найти общее решение ДУ 2-ого порядка:

$$(x + 1)y'' = y' + 1, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Найти общее решение ДУ 2-ого порядка:

$$y^3 y'' + 1 = 0;$$

РАЗДЕЛ II.

Найти множество сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\sqrt{n} + 1)^n}.$$

Написать разложение функции в степенной ряд в окрестности $X=0$
 $\sin^2 x$.

Разложить в ряд Фурье функцию на заданном отрезке

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -1, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{на } [-\pi, \pi]$$

РАЗДЕЛ III.

Один завод производит в 2 раза больше приборов, чем второй. Вероятность бракованного прибора на первом заводе – 0,1, втором – 0,2. Случайным образом выбранный прибор оказался бракованным. Какова вероятность, что он сделан на втором заводе?

В первой урне 19 шаров, среди них 12 черных, во второй урне 14 шаров и среди них 4 черных. Из второй урны взяли шар и переложили в первую. Какова вероятность, что шар, взятый после этого из первой урны, не черный?

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} Ax^3, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases} \quad \text{Найти } P(0,5 \leq X \leq 3).$$

Пояснения.

Каждый билет будет состоять из 6 вопросов. Три из них по теории, остальные три – задачи. Соответственно, в вопросах по теории и задачах будут представлены все три вышеупомянутых раздела, т.е., по одному вопросу на раздел. Цена правильного ответа на теоретический вопрос – 10 баллов. Правильно решенная задача – 15 баллов.

Дополнительные баллы: представленный конспект **всех (!)** лекций и практических занятий – 20 баллов, 100% посещаемость лекций и практических занятий – 15 баллов.

Чтобы получить удовлетворительную оценку необходимо в сумме получить не менее 55 баллов. В противном случаеувы!

