Московский Государственный Технический Университет Гражданской Авиации
Кафедра *Высшей Математики*. Дисциплина *Математика*
Направление 42.03.01. Курс 1

Образец решения контрольного домашнего задания.
Часть 2. Математический анализ.

Задача 1. Пределы

При выполнении заданий на вычисление пределов вместо переменной x ставится число (или символ), к которому стремится переменная x. В зависимости от получившейся неопределённости делают вывод о способе её раскрытия. Часто на конечном этапе вычисления пределов используют следующие формулы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Задание 1а. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-5}{2x^2-9x^3+8x}.$$

Решение. При подстановке в числитель вместо переменной x символа ∞, получаем ∞. При подстановке в знаменатель вместо переменной x символа ∞, тоже получаем ∞. Следовательно, имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Старшей степенью числителя и знаменателя является x^3. Для вычисления предела, в числителе и в знаменателе выносим x^3 за скобку. Далее сокращаем вынесенные x^3. Устремляя переменную x к ∞, получаем, что все дробные слагаемые стремятся к нулю, а оставшееся выражение является ответом.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-5}{2x^2-9x^3+8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(4+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3})}{x^3(\frac{2}{x}-9+\frac{8}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3}}{\frac{2}{x}-9+\frac{8}{x^2}}=\frac{4+0-0}{0-9+0}=-\frac{4}{9}.$$

Ответ: $-\dfrac{4}{9}$.

Задание 1б. Вычислить предел

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+3x-9}{9-x^2}.$$

Решение. При подстановке в числитель вместо переменной x числа -3, получаем 0. При подстановке в знаменатель вместо переменной x числа -3, тоже получаем 0. Следовательно, имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для вычисления данного предела раскладываем числитель и знаменатель на множители. Затем сокращаем на одинаковый множитель $(x+3)$ и вместо переменной x подставляем число -3.

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+3x-9}{9-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(2x-3)}{(3-x)(3+x)}=$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{2x-3}{3-x}=\frac{2(-3)-3}{3-(-3)}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}.$$

Задача 2. Производные

При решении данного номера применяются *формулы производных основных элементарных функций*:

$(c)'=0 \quad (c$ — число$)$, $\quad x'=1$, $\quad (x^n)'=nx^{n-1}$,

$(e^x)'=e^x$, $\quad (\sin x)'=\cos x$, $\quad (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(a^x)'=a^x\ln a$, $\quad (\cos x)'=-\sin x$, $\quad (\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $\quad (\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad (\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $\quad (\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad (\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$,

и *формулы производных суммы, разности, произведения и частного двух функций*:

$$(u+v)'=u'+v', \qquad (u-v)'=u'-v', \qquad (cu)'=cu' \text{ (с — число)},$$
$$(uv)'=u'v+uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

и *правило взятия производной сложной функции*:

Пусть функция $u=g(x)$ имеет производную в некоторой точке $x=x_0$, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=g(x_0)$. Тогда, сложная функция $f(g(x))$ имеет производную в точке $x=x_0$, которая вычисляется по формуле $[f(g(x_0))]'=f'(u_0)\cdot g'(x_0)$. Для краткости используется следующая запись последней формулы:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{1}$$

Задание 2а. Найти производные следующих выражений:

$$5, \quad \ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}, \quad 6^x, \quad \log_3 x.$$

Решение. Производная постоянной функции равна нулю, поэтому

$$5'=0, \quad \left(\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}\right)'=0.$$

Для нахождения производных функций 6^x и $\log_3 x$ воспользуемся табличными формулами для производных показательной (при $a=6$) и логарифмической (при $a=3$) функций, имеем:

$$(6^x)' = 6^x \ln 6, \quad (\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}.$$

Задание 2б. Вычислить производные следующих функций:

$$x^{17}, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}.$$

Решение. Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$. Имеем:

$$\left(x^{17}\right)' = 17x^{17-1} = 17x^{16};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}\right)' = \left(x^{-\frac{7}{5}}\right)' = -\frac{7}{5}x^{-\frac{7}{5}-1} = -\frac{7}{5}x^{-\frac{12}{5}} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{12}{5}}} = -\frac{7}{5\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

Задание 2в. Найти производные функций:

$$\frac{1}{x^3} - 5\ln x, \quad \frac{2\operatorname{tg} x}{3} + \frac{\operatorname{ctg} x}{4}, \quad (x^2+x)\cos x, \quad \frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}, \quad \frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}.$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{x^3} - 5\ln x\right)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' - (5\ln x)' = \left(x^{-3}\right)' - 5\,(\ln x)' =$$

$$= -3x^{-4} - 5\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x} = -\frac{3+5x^3}{x^4}.$$

$$\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{3} + \frac{\operatorname{ctg} x}{4}\right)' = \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{3}\right)' + \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{4}\right)' = \left(\frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg} x\right)' + \left(\frac{1}{4} \cdot \operatorname{ctg} x\right)' =$$

$$= \frac{2}{3}(\operatorname{tg} x)' + \frac{1}{4}(\operatorname{ctg} x)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{2}{3\cos^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x}.$$

$$\left((x^2+x)\cos x\right)' = (x^2+x)'\cos x + (x^2+x)(\cos x)' =$$

$$= (2x+1)\cos x + (x^2+x)(-\sin x).$$

$$\left(\frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}\right)' =$$

$$= \frac{(x^3+2x^2+5x+1)'(x^2+2^x) - (x^3+2x^2+5x+1)(x^2+2^x)'}{(x^2+2^x)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2+4x+5)(x^2+2^x)-(x^3+2x^2+5x+1)(2x+2^x\ln 2)}{(x^2+2^x)^2}.$$

Функция $\lg x$ — это десятичный логарифм, то есть $\lg x = \log_{10} x$. Применим формулы производных частного и произведения:

$$\left(\frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}\right)' = \frac{\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)'\cdot\lg x-\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot(\lg x)'}{(\lg x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(x^{13}\right)'\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(\operatorname{arcctg} x\right)'\right)\cdot\lg x - \left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{\left(13x^{12}\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right)\cdot\lg x - x^{13}\operatorname{arcctg} x\dfrac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{13x^{12}\operatorname{arcctg} x\lg x - \dfrac{x^{13}\lg x}{1+x^2} - \dfrac{x^{12}\operatorname{arcctg} x}{\ln 10}}{\lg^2 x}.$$

Задание 2г. Найти производные функций: $\ln\sin x$, e^{x^2}.

Решение. Найдём производную функции $\ln\sin x$. Обозначим

$$y=\ln u,\quad u=\sin x, \text{ тогда } y=\ln\sin x.$$

По формуле (1) для вычисления производной сложной функции находим:

$$y'_u=(\ln u)'_u=\frac{1}{u},\qquad u'_x=(\sin x)'_x=\cos x,$$

откуда

$$(\ln\sin x)'=y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\operatorname{ctg} x.$$

Часто более удобно непосредственно находить производные промежуточных функций:

$$(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\operatorname{ctg} x.$$

Найдём производную функции e^{x^2}. Обозначим

$$y=e^u,\quad u=x^2, \text{ тогда } y=e^{x^2}.$$

По формуле (1) для вычисления производной сложной функции находим:

$$y'_u=(e^u)'_u=e^u,\qquad u'_x=\left(x^2\right)'_x=2x,$$

откуда

$$y'_x=\left(e^{x^2}\right)'=y'_u\cdot u'_x=e^u\cdot 2x=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}.$$

Теперь найдём ту же производную в компактном виде:

$$y'(x)=\left(e^{x^2}\right)'=e^{x^2}\cdot(x^2)'=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}.$$

Задание 2д. Найти производные функций:

$$e^{-x}, \quad (\operatorname{tg}\sqrt{x})^3, \quad \operatorname{arctg}^2 e^{-x}, \quad \cos\log_6 5x - \log_6\cos 5.$$

Решение.

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x}\cdot(-x)' = e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x}.$$

$$\left((\operatorname{tg}\sqrt{x})^3\right)' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2(\operatorname{tg}\sqrt{x})' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' =$$

$$= 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\operatorname{arctg}^2 e^{-x}\right)' = \left(\left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)^2\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)' =$$

$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2}\cdot\left(e^{-x}\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot e^{-x}\cdot(-x)' =$$

$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot e^{-x}\cdot(-1) = -\frac{2e^{-x}\operatorname{arctg} e^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$

$$(\cos\log_6 5x - \log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - (\log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - 0 =$$

$$= -\sin\log_6 5x\cdot(\log_6 5x)' = -\sin\log_6 5x\cdot\frac{1}{(5x)\ln 6}\cdot(5x)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x\cdot\frac{1}{5x\ln 6}\cdot 5 = -\frac{\sin\log_6 5x}{x\ln 6}.$$

Выражение $\log_6\cos 5$ является числом, поэтому $(\log_6\cos 5)' = 0$.

Задача 3. Полное исследование функции и построение её графика

Полное исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на периодичность.
3. Исследовать функцию на чётность и нечётность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти точки разрыва функции и установить характер разрыва; исследовать поведение функции на границе области определения; найти асимптоты.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Исследовать направления выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
8. Используя все полученные результаты, построить график функции.

В процессе исследования функции необязательно строго придерживаться приведённой схемы, иногда удобнее изменить порядок исследования.

Задание 3а. Провести полное исследование и построить график функции $y = x(x+1)(x-1)$.

Решение.

Раскроем скобки и запишем исходную функцию в виде

$$y = x(x+1)(x-1) = x(x^2-1) = x^3 - x.$$

1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет три точки пересечения с осью Ox: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. С осью Oy функция пересекается только при $y = 0$.

Функция положительна на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$.

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x-1) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x(x+1)(x-1) = -\infty.$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} (x+1)(x-1) = \infty.$$

Значит, наклонных, а, следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Вертикальных асимптот тоже нет, так как отсутствуют точки разрыва и функция определена на всей числовой оси.

6. Найдём производную: $y' = 3x^2 - 1$. Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $3x^2 - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — монотонно убывает.

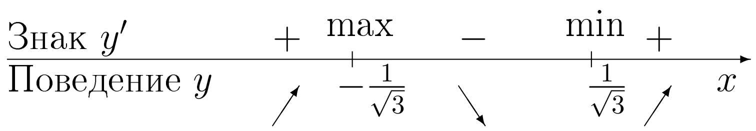

Рис. 1: Схема исследования поведения функции по первой производной.

Из схемы (рис. 1) следует, что в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум, а в точке $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — минимум.

Находим значения функции в экстремальных точках: если $x_{max} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; если $x_{min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

7. Находим вторую производную: $y'' = 6x$. Приравнивая вторую производную нулю, найдём критическую точку второго рода: $6x = 0$, откуда $x = 0$.

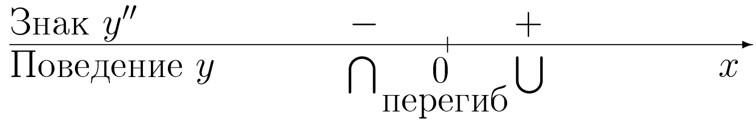

Рис. 2: Схема исследования поведения функции по второй производной.

Рисуем схему (рис. 2), из которой следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб. На интервале $(-\infty; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз. Находим ординату точки перегиба: $y_{пер} = 0$.

8. График функции изображён на рис. 3. При построении пользуемся симметрией графика относительно начала координат (т.к. функция является нечётной).

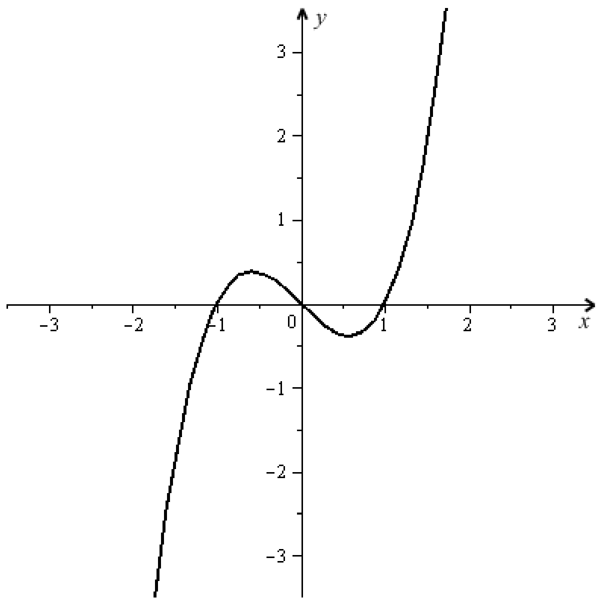

Рис. 3: График функции $y = x(x+1)(x-1)$.

Задание 3б. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение.

1. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = -1$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0; 0)$. Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

5. Функция имеет разрыв в точке $x = -1$.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отсюда следует, что в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода. Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

Найдём параметры наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = -1.$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

6. Найдём производную: $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $x = 0$, $x = -3$. Первая производная положительна на интервалах $(-\infty;\, -3) \cup (-1;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$ и отрицательна на интервале $(-3; -1)$.

Из схемы (рис. 4) следует, что в точке $x = -3$ функция имеет максимум, а в точке $x = 0$ экстремума нет. Найдём ординату точки максимума: $y_{max} = -3\dfrac{3}{8}$. На интервалах $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция монотонно возрастает, на интервале $(-3; -1)$ — монотонно убывает.

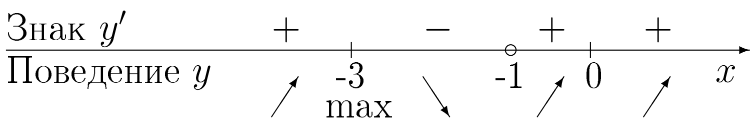

Рис. 4: Схема исследования поведения функции по первой производной.

7. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$. Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $x = 0$. Вторая производная положительна на интервале $(0; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$.

Из схемы (рис. 5) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба $y_{пер} = 0$. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз.

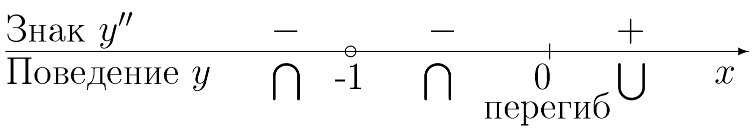

Рис. 5: Схема исследования поведения функции по второй производной.

8. График функции изображён на рис. 6.

Задача 4. Неопределённые интегралы

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если для любого допустимого значения x выполнено равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F_0(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ совпадает с множеством функций $F(x) = F_0(x) + C$, где C — любое число.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных $F(x)$ функции $f(x)$. Неопределённый интеграл от функции $f(x)$ обозначается символом $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Функция $f(x)$ называется при этом подынтегральной функцией.

Например, функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$

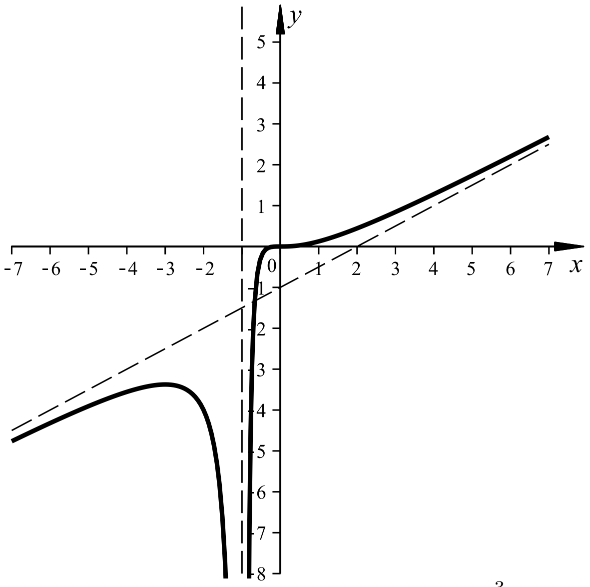

Рис. 6: График функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$. Поэтому

$$\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Для подсчёта интегралов используется *таблица основных неопределённых интегралов.*

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int dx = \int 1\,dx = x + C,$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

В процессе вычисления интегралов часто применяется *таблица основных дифференциалов.*

$$dx = d(x \pm a), \qquad dx = -d(-x),$$

$$dx = b\,d\left(\frac{x}{b}\right), \qquad dx = \frac{1}{b}\,d(bx),$$

$$x^n\,dx = \frac{d\left(x^{n+1}\right)}{n+1} \quad (n \neq -1), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right),$$

$$x\,dx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right), \qquad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,d\left(\sqrt{x}\right), \qquad \cos x\,dx = d\left(\sin x\right),$$

$$\sin x\,dx = -d\left(\cos x\right), \qquad a^x\,dx = \frac{d\left(a^x\right)}{\ln a},$$

$$e^x\,dx = d\left(e^x\right), \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\operatorname{ctg} x\right),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\operatorname{tg} x\right), \qquad \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg} x\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\left(\arccos x\right), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = -d\left(\operatorname{arcctg} x\right).$$

Формулы таблицы дифференциалов следуют из следующей часто используемой при вычислении интегралов формулы

$$df(x) = (f(x))'\,dx. \tag{2}$$

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$, тогда справедливо равенство, называемое *формулой интегрирования по частям*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

С учётом формулы (2) последнее равенство можно записать в компактном виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Необходимо заметить, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, так как и правая часть формулы содержит интеграл. Однако при правильном применении метода интеграл из правой части будет табличным интегралом или легко сводящимся к табличному интегралу. При вычислении некоторых интегралов метод интегрирования по частям может применяться несколько раз. Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin ax\,dx, \quad \int x^k \cos ax\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx,$$

$$\int x^k \arcsin ax\,dx, \quad \int x^k \arccos ax\,dx, \quad \int x^k \operatorname{arctg} ax\,dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Задание 4а. Найти неопределённый интеграл. Результат проверить дифференцированием.

$$\int \left(x^4 - 5 + 3\sqrt[7]{x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}} \right) dx.$$

Решение. Раскладываем интеграл в сумму и разность нескольких интегралов, выносим константы за знаки интегралов и применяем табличные формулы.

$$\begin{aligned}
&\int \left(x^4 - 5 + 3\sqrt[7]{x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}} \right) dx = \\
&= \int x^4\,dx - \int 5\,dx + \int 3\sqrt[7]{x}\,dx + \int \frac{1}{2x^3}\,dx - \int \frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}\,dx = \\
&= \int x^4\,dx - 5\int dx + 3\int \sqrt[7]{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx = \\
&= \int x^4\,dx - 5\int dx + 3\int x^{1/7}\,dx + \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx - \frac{2}{3}\int x^{-5/4}\,dx = \\
&= \frac{x^5}{5} - 5\cdot x + 3\cdot\frac{x^{8/7}}{8/7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-1/4}}{-1/4} + C = \\
&= \frac{x^5}{5} - 5x + \frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8} - \frac{1}{4x^2} + \frac{8}{3\sqrt[4]{x}} + C.
\end{aligned}$$

Проверка дифференцированием.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^5}{5} - 5x + \frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8} - \frac{1}{4x^2} + \frac{8}{3\sqrt[4]{x}} + C \right)' = \\
&= \left(\frac{x^5}{5}\right)' - (5x)' + \left(\frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8}\right)' - \left(\frac{1}{4x^2}\right)' + \left(\frac{8}{3\sqrt[4]{x}}\right)' + C' = \\
&= \frac{1}{5}\left(x^5\right)' - 5x' + \frac{21}{8}\left(x^{8/7}\right)' - \frac{1}{4}\left(x^{-2}\right)' + \frac{8}{3}\left(x^{-1/4}\right)' + 0 = \\
&= \frac{1}{5}\cdot 5x^4 - 5\cdot 1 + \frac{21}{8}\cdot\frac{8}{7}x^{1/7} - \frac{1}{4}\cdot(-2)\cdot x^{-3} + \frac{8}{3}\cdot(-\frac{1}{4})\cdot x^{-5/4} = \\
&= x^4 - 5 + 3\sqrt[7]{x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}.
\end{aligned}$$

Задание 4б. Найти неопределённые интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}}, \quad \int \frac{dx}{2x-6}, \quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx, \quad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx, \quad \int \frac{x\,dx}{5x^2-3}.$$

Решение. В первом интеграле сделаем замену $t = 5x + 2$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+2)}{\sqrt{5x+2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x+2} + C.$$

Во втором интеграле делаем замену $t = 2x - 6$.

$$\int \frac{dx}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-6)}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln|2x-6| + C.$$

В третьем интеграле обозначаем $t = \ln x$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\, d\ln x = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\,\ln^2 x + C.$$

В четвёртом интеграле вводим обозначение $t = e^{2x} + 1$.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,d2x = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}\,d2x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{e^{2x}+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln(e^{2x}+1) + C.$$

В пятом интеграле делаем замену $t = 5x^2 - 3$.

$$\int \frac{x\,dx}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d(5x^2-3)}{5x^2-3} =$$
$$= \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10}\,\ln|t| + C = \frac{1}{10}\,\ln|5x^2-3| + C.$$

Задание 4в. Найти неопределённые интегралы

$$\int x\sin 3x\,dx, \quad \int xe^{-4x}\,dx.$$

Результат проверить дифференцированием.

Решение. При решении первого интеграла применяем табличные дифференциалы

$$dx = \frac{1}{3}\,d\,(3x)\,, \quad \sin x\,dx = -d\,(\cos x)\,.$$

Тогда

$$\int x\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int x\sin 3x\,d3x = -\frac{1}{3}\int x\,d\cos 3x =$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x\cos 3x - \int \cos 3x\,dx\right) = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int \cos 3x\,d3x = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\,\sin 3x + C.$$

Проверка дифференцированием.

$$\left(-\frac{1}{3}\,x\cos 3x+\frac{1}{9}\,\sin 3x+C\right)'=-\frac{1}{3}(x\cos 3x)'+\frac{1}{9}(\sin 3x)'+C'=$$
$$=-\frac{1}{3}\left(x'\cos 3x+x(\cos 3x)'\right)+\frac{1}{9}\cos 3x(3x)'+0=$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\cos 3x-x\sin 3x(3x)'\right)+\frac{1}{9}\cos 3x\cdot 3=-\frac{1}{3}\left(\cos 3x-x\sin 3x\cdot 3\right)+\frac{1}{3}\cos 3x=$$
$$=-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}x\sin 3x\cdot 3+\frac{1}{3}\cos 3x=x\sin 3x.$$

При решении второго интеграла применяем табличные дифференциалы

$$dx=-\frac{1}{4}\,d(-4x),\quad e^x dx=d\left(e^x\right).$$

Тогда

$$\int xe^{-4x}\,dx=-\frac{1}{4}\int xe^{-4x}\,d(-4x)=-\frac{1}{4}\int x\,de^{-4x}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(x\cdot e^{-4x}-\int e^{-4x}\,dx\right)=-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}+\frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}-\frac{1}{16}\int e^{-4x}\,d(-4x)=-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}-\frac{1}{16}\,e^{-4x}+C.$$

Проверяем вычисление дифференцированием.

$$\left(-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}-\frac{1}{16}\,e^{-4x}+C\right)'=-\frac{1}{4}\left(xe^{-4x}\right)'-\frac{1}{16}\left(e^{-4x}\right)'+C'=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(x'e^{-4x}+x(e^{-4x})'\right)-\frac{1}{16}e^{-4x}(-4x)'+0=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(e^{-4x}+xe^{-4x}(-4x)'\right)-\frac{1}{16}e^{-4x}(-4)=-\frac{1}{4}\left(e^{-4x}+xe^{-4x}(-4)\right)+\frac{1}{4}e^{-4x}=$$
$$=-\frac{1}{4}e^{-4x}-\frac{1}{4}xe^{-4x}(-4)+\frac{1}{4}e^{-4x}=xe^{-4x}.$$

Задача 5. Определённые интегралы

Методы вычисления определённых интегралов аналогичны методам вычисления неопределённых интегралов. Все правила и формулы, применяемые в неопределённых интегралах, справедливы и для определённых интегралов. Лишь несколько правил имеют специфику в случае определённых интегралов. Приведём их.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — первообразная от функции $f(x)$ на этом отрезке. Тогда справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда справедлива *формула интегрирования по частям для определённого интеграла*

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\, dx.$$

Последнюю формулу можно записать в компактном виде

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Задание 5а. Вычислить определённые интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int_0^{2\pi} \sin x\, dx, \quad \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cos x^2 dx.$$

Решение. В первых двух интегралах сразу применяем формулу Ньютона-Лейбница для табличных интегралов. При вычислении интеграла по формуле Ньютона-Лейбница в первообразную сначала подставляется верхний предел, затем нижний предел, и из первого выражения вычитается второе.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

В следующем интеграле применяем табличный дифференциал $xdx = \frac{1}{2}dx^2$.

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cos x^2 dx = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos x^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\sin x^2\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задание 5б. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,d\operatorname{arctg} x = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= 1\cdot\operatorname{arctg} 1 - 0\cdot\operatorname{arctg} 0 - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}dx^2}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

В процессе нахождения интеграла использовали следующее вычисление

$$d(\operatorname{arctg} x) = (\operatorname{arctg} x)'dx = \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Задача 6. Площади

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 7), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

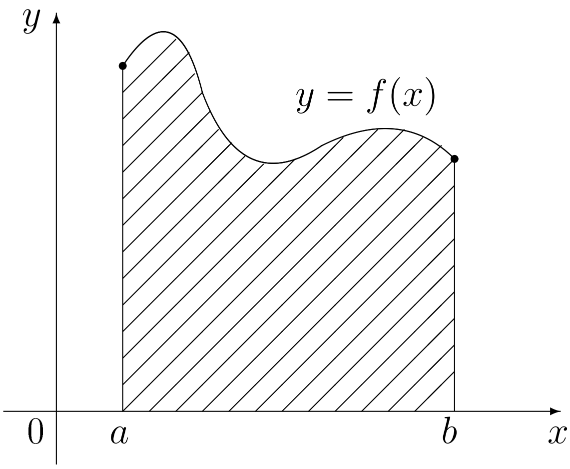

Рис. 7: Криволинейная трапеция.

Пусть фигура ограничена сверху и снизу кривыми, уравнения которых $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$, $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ (см. рис. 8). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx.$$

Задание 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми $y = \sqrt{6x}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

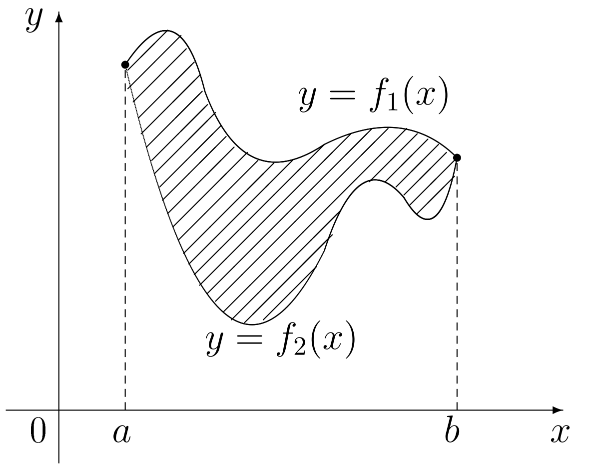

Рис. 8: Плоская фигура.

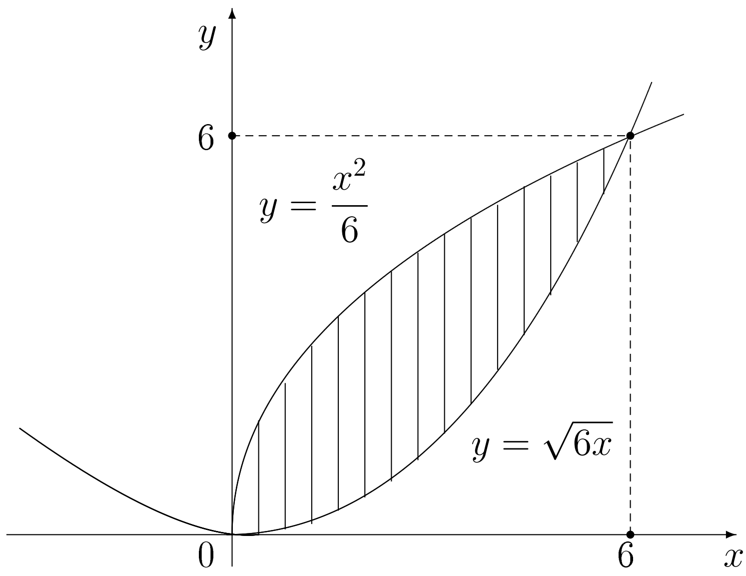

Рис. 9: Фигура, ограниченная кривыми $y = \sqrt{6x}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

Решение. Заданная фигура изображена на рис. 9.

Найдём точки пересечения графиков функций, решив уравнение

$$\sqrt{6x} = \frac{x^2}{6} \Rightarrow 6^3x = x^4 \Rightarrow 6^3x - x^4 = 0 \Rightarrow x(6^3 - x^3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ и } x = 6.$$

Найдем ординаты точек пересечения графиков функций:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ и } x = 6 \Rightarrow y = 6.$$

Вычисляем площадь заданной фигуры

$$S = \int\limits_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right)\, dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{18}\right)\Bigg|_0^6 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot 6^{3/2} - \frac{6^3}{18}\right) - 0 = 12.$$

Ответ: 12.