Московский Государственный Технический Университет Гражданской Авиации
Кафедра *Высшей Математики*. Дисциплина *Математика*
Направление 42.03.01. Курс 1

Образец решения контрольного домашнего задания.
Часть 1. Алгебра.

Задача 1. Матрицы

Матрица — это прямоугольная таблица чисел, заключённая в круглые скобки. Основные операции с матрицами:

— произведением числа k на матрицу A называется матрица, элементы которой получены из элементов матрицы A умножением их на число k;

— суммой (разностью) матриц A и B называется матрица, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B;

— произведением матрицы A на матрицу B называется матрица, элемент которой, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Задание 1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы $4 \cdot A$, $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$.

Решение.

$$4 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 0 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+(-2) \\ 0+1 & 1+4 & -2+0 \\ -3+1 & 0+5 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-(-2) \\ 0-1 & 1-4 & -2-0 \\ -3-1 & 0-5 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1&1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5&1\cdot(-2)+2\cdot0+3\cdot1\\0\cdot2+1\cdot1+(-2)\cdot1&0\cdot3+1\cdot4+(-2)\cdot5&0\cdot(-2)+1\cdot0+(-2)\cdot1\\-3\cdot2+0\cdot1+4\cdot1&(-3)\cdot3+0\cdot4+4\cdot5&(-3)\cdot(-2)+0\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+2+3&3+8+15&-2+0+3\\0+1-2&0+4-10&0+0-2\\-6+0+4&-9+0+20&6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&26&1\\-1&-6&-2\\-2&11&10\end{pmatrix},$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot(-1)+3\cdot7\\0\cdot3+1\cdot(-1)+(-2)\cdot7\\-3\cdot3+0\cdot(-1)+4\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2+21\\0-1-14\\-9+0+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\-15\\19\end{pmatrix}.$$

Задача 2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

Для решения системы уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

методом Гаусса, составляют расширенную матрицу коэффициентов

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a_{11}&a_{12}&a_{13}&b_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&b_2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&b_3\end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу коэффициентов системы уравнений приводят к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\end{array}\right).$$

Вместо знака $*$ будут какие-либо числа, получившиеся в результате элементарных преобразований матрицы.

Допустимые элементарные преобразования:

1) можно поменять любые две строки местами;

2) любую строку можно умножить (или разделить) на любое неравное нулю число;

3) к любой строке можно прибавить (или вычесть) любую строку, умноженную (или разделённую) на любое неравное нулю число.

По последней матрице составляют соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases}x+*\cdot y+*\cdot z=*,\\\qquad\quad y+*\cdot z=*,\\\qquad\qquad\qquad z=*\end{cases}$$

и последовательно находят неизвестные z, y, x.

Задание 2. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу коэффициентов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Меняем местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

Умножаем вторую строку на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на 7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right).$$

Делим третью строку на 29.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

По последней матрице составляем соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 6, \\ \qquad y + 6z = 11, \\ \qquad\qquad z = 2. \end{cases}$$

Решая систему „снизу вверх“ находим, что $y = -1$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1, y = -1, z = 2$.

Задача 3. Аналитическая геометрия на плоскости

Для точек A и B с координатами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ уравнение прямой, проходящей через точки A и B, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Преобразовав полученное уравнение, придём к так называемому линейному уравнению

$$ax + by = c.$$

Этому уравнению соответствуют два линейных неравенства

$$ax + by < c \quad \text{и} \quad ax + by > c.$$

Последние неравенства определяют две полуплоскости, на которые уравнение $ax + by = c$ разбивает всю плоскость.

Чтобы установить, какую из двух полуплоскостей определяет данное неравенство, надо выбрать произвольную точку N, не принадлежащую прямой и подставить её координаты в данное линейное неравенство. Если неравенство удовлетворяется, то оно определяет полуплоскость, содержащую точку N, если же неравенство не удовлетворяется, то оно определяет полуплоскость, не содержащую точку N.

Задание 3. Даны координаты $A(2,\ 1)$, $B(6,\ 3)$, $C(4,\ 5)$ вершин треугольника ABC. Найти систему неравенств, определяющую множество внутренних точек треугольника. Сделать чертёж.

Решение. Множество внутренних точек треугольника можно рассматривать как пересечение трёх полуплоскостей, из которых первая ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, третья ограничена прямой CA и содержит точку B.

Найдём неравенство для первой их этих полуплоскостей. Составим уравнение прямой AB по двум точкам:

$$\frac{x - 2}{6 - 2} = \frac{y - 1}{3 - 1} \quad \Rightarrow \quad x - 2y = 0.$$

Подставляя в левую часть уравнения координаты точки C, получаем $4 - 2 \cdot 5 = -6 < 0$. Следовательно, неравенство первой полуплоскости будет

$$x - 2y < 0.$$

Аналогично, полуплоскость, ограниченная прямой BC и содержащая точку A, определяется неравенством

$$x + y < 9,$$

а полуплоскость, ограниченная прямой CA и содержащая точку B, — неравенством

$$2x - y > 3.$$

Итак, множество внутренних точек треугольника ABC определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x - 2y < 0, \\ x + y < 9, \\ 2x - y > 3. \end{cases}$$

Чертёж изображён на рис. 1.

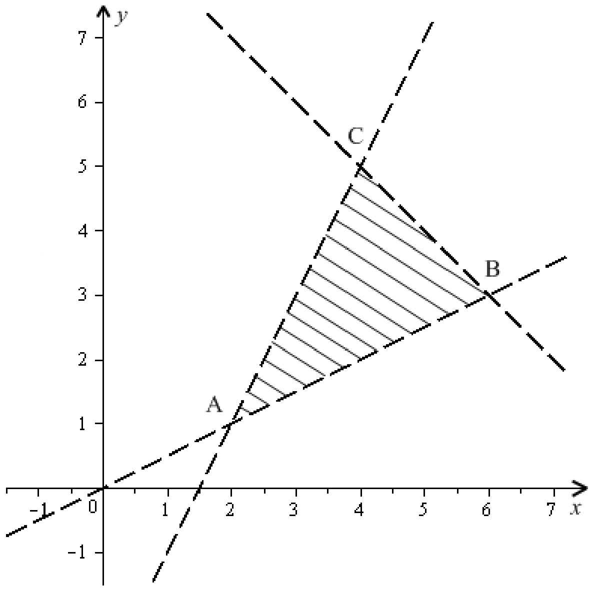

Рис. 1: Множество внутренних точек треугольника.