

Лабораторная работа №3. Работа с таблично-заданными функциями.

Цель работы: изучение различных средств анализа, применяемых при работе с таблично-заданными функциями: метода наименьших квадратов и квадратурных формул.

Вопросы для повторения.

1. Способы задания функции.
2. Геометрическое изображение таблично-заданной функции.
3. Первая разность.
4. Вторая разность.
5. Метод наименьших квадратов.
6. Линия регрессии (Y на X и X на Y).
7. Формула прямоугольников для определенного интеграла.
8. Формула трапеций для определенного интеграла.
9. Формула Симпсона для определенного интеграла.
10. Какие бывают датчики случайных чисел?
11. Метод статистических испытаний для вычисления определенного интеграла.

Часть 1. Линейная аппроксимация таблично-заданной функции методом наименьших квадратов.

Функциональная зависимость $y = f(x)$ определена таблицей $x_i, y_i, 0 \leq i \leq N$.

Данные: N, x, y (x, y -одномерные массивы – столбцы x_i, y_i).

Задание 1.

Найти: линейную зависимость $y = f(x) = ax + b$.

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Выполнение:

Найдем суммы

$$S2 = \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad S1 = \sum_{i=1}^N x_i, \quad SXY = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad SY = \sum_{i=1}^N y_i.$$

Напишем систему уравнений относительно неизвестных

$$a = z_0, \quad b = z_1$$

$$\begin{cases} S2 \cdot z_0 + S1 \cdot z_1 = SXY \\ S1 \cdot z_0 + N \cdot z_1 = SY \end{cases}$$

Или
 $A \cdot Z = B$,
 Где

$$A = \begin{pmatrix} S2 & S1 \\ S1 & N \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} SXY \\ SY \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Если вместо

$$a = z_0, b = z_1$$

Будет три параметра, то будет система с тремя уравнениями.

Решаем при помощи подпрограммы *lsolve*.

$$z := \text{lsolve}(A, B)$$

$$A := Z_0 \quad B := Z_1$$

$$f(x) := a \cdot x + b$$

Построим на одной картинке графики $f(x) := a \cdot x + b$ и y .

Сделать вывод о согласии “экспериментальных” (x_i, y_i) и теоретических данных.

Задание 2.

В соответствии с вариантом выбираем таблицу данных, находим линейное приближение, и на одном графике изображаем и то и другое. В таблице 3 приведены значения $y_i, 0 \leq i \leq 30$, а $x_i = i, x_1 = 1, x_2 = 2 \dots$

Сделать вывод о согласии экспериментальных и теоретических данных.

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1	5,998	6,030	5,85	6,310	5,650	6,323
2	5,820	6,072	5,619	6,308	5,431	6,523
3	5,754	6,297	5,569	6,546	5,250	6,646
4	5,828	6,428	5,426	6,855	5,000	7,256
5	5,627	6,425	5,237	7,073	4,790	7,487
6	5,597	6,473	5,025	7,770	4,569	7,827
7	5,693	6,592	4,988	7,225	4,296	8,133
8	5,469	6,815	5,037	7,739	4,065	8,402
9	5,413	6,786	4,586	7,995	3,837	8,581
10	5,526	6,925	4,575	8,963	3,519	9,014
11	5,344	7,116	4,445	8,247	3,281	9,049
12	5,304	7,053	4,353	8,472	2,926	9,571
13	5,352	7,224	3,933	8,627	2,801	9,891
14	5,301	7,439	3,899	8,936	2,546	10,073
15	5,424	7,302	3,793	9,082	2,232	10,406
16	4,996	7,426	3,473	9,976	2,016	10,821
17	5,080	7,797	3,551	9,363	1,794	11,151
18	5,256	7,871	3,171	9,679	1,663	11,232
19	5,090	7,929	3,330	9,846	1,375	11,655
20	5,053	8,060	3,044	10,013	1,217	11,952

	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
1	3,88	4,08	3,90	4,03	3,82	4,27
2	3,86	4,18	3,83	4,23	3,44	4,45
3	3,84	4,38	3,60	4,49	3,16	4,84
4	3,91	4,46	3,47	4,71	2,95	5,14
5	3,71	4,44	3,31	5,00	2,73	5,55
6	3,49	4,55	3,05	5,26	2,40	5,85
7	3,51	4,66	3,14	5,36	2,27	6,18
8	3,68	4,89	2,83	5,87	1,85	6,38
9	3,74	4,86	2,66	5,67	1,88	6,72
10	3,47	5,04	2,53	5,89	1,32	7,04
11	3,60	5,22	2,35	6,16	1,18	7,26
12	3,51	4,90	2,49	6,65	1,15	7,70
13	3,48	5,39	2,19	6,39	0,85	7,78
14	3,30	5,56	1,82	6,81	0,48	8,33
15	3,23	5,42	1,69	7,08	0,18	8,62
16	3,26	5,85	1,54	7,24	-0,01	8,78
17	3,14	5,99	1,22	7,61	-0,12	9,06
18	3,17	5,85	1,17	7,64	-0,60	9,56
19	2,96	6,01	1,04	8,03	-0,68	9,71
20	2,81	5,97	1,12	7,92	0,54	10,14

	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
1.	1,92	2,14	1,56	2,25	1,62	-0,02
2.	1,91	2,19	1,84	2,31	1,54	-0,28
3.	2,09	2,32	1,51	2,75	1,09	-0,06
4.	1,73	2,59	1,52	2,77	1,07	-0,00
5.	1,88	2,56	1,09	3,00	0,67	-0,24
6.	1,81	2,64	1,04	3,24	0,24	-0,11

7.	1,71	2,66	1,05	3,55	0,29	-0,28
8.	1,66	2,84	0,91	3,48	0,07	-0,35
9.	1,47	3,04	0,69	3,64	0,26	-0,47
10.	1,44	2,94	0,51	3,86	0,56	-0,47
11.	1,23	3,23	0,46	4,06	0,69	-0,52
12.	1,37	3,27	0,14	4,39	0,85	-0,68
13.	1,30	3,31	-0,06	4,67	1,29	-0,72
14.	1,22	3,13	-0,29	4,93	1,39	-0,77
15.	1,38	3,49	-0,28	4,95	1,73	-0,69
16.	1,35	3,56	-0,25	5,06	1,98	-0,79
17.	1,14	3,66	-0,57	5,49	2,37	-0,77
18.	1,00	3,79	-0,57	5,57	2,41	-0,99
19.	0,96	3,96	-1,06	5,89	2,68	-1,07
20.	0,93	4,08	-1,01	6,00	2,96	-1,03

	Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21	Вариант 22
1.	0,00	0,01	0,38	-0,15
2.	0,23	0,20	0,36	-0,42
3.	0,32	0,31	0,45	-0,79
4.	0,24	0,63	0,89	-0,92
5.	0,35	0,73	0,91	-0,97
6.	0,52	0,87	1,11	-1,48
7.	0,77	1,05	1,49	-1,63
8.	0,68	1,39	1,72	-1,95
9.	0,92	1,05	1,83	-2,23
10.	0,97	1,40	1,98	-2,55
11.	1,08	1,74	2,35	-2,64
12.	1,15	1,88	2,82	-2,85
13.	1,35	1,79	2,76	-3,32
14.	1,33	1,99	2,90	-3,64
15.	1,51	2,22	2,90	-3,78
16.	1,57	2,46	3,25	-3,84
17.	1,65	2,75	3,42	-4,19
18.	1,59	2,72	3,37	-4,58
19.	1,77	2,87	3,83	-4,73
20.	1,99	2,84	3,90	-5,00

Часть 2. Квадратурные формулы.

Дана функция $f(x) := x^2$, отрезок $a := 0$, $b := 1$ и количество точек $N = 4$ деления отрезка.

Вычисление определённого интеграла методом *прямоугольников*.

$$SR := \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{N}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{N}\right)$$

Вычисление определённого интеграла методом *трапеций*.

$$ST = \left[\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{N}\right) \right] \cdot \left(\frac{b-a}{N} \right)$$

Вычисление определённого интеграла методом Симпсона.

Введем обозначения

$$h := \frac{b-a}{N}$$

$$i := 0..N-1$$

$$x_i := a + i \cdot h \quad y_i := f(x_i)$$

Тогда в обычных (человеческих) обозначениях формула Симпсона:

$$SS = \frac{h}{3} \cdot [y_0 + y_N + 2(y_2 + y_4 + \dots) + 4(y_1 + y_3 + \dots)]$$

Или в *MATCAD*' офских обозначениях:

$$SS := \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-2/2} y_{2,j} + 4 \cdot \sum_{j=0}^{N-2/2} y_{2,j+1} \right]$$

Требуется вычислить интеграл по всем трем формулам при $N = 4, 10, 100$ и нарисовать таблицу ответов.

При помощи toolbars calculus найти аналитически ответ по формуле Ньютона-Лейбница.

Сделать вывод.

Вычисление определённого интеграла: индивидуальное задание.

Номер варианта по журналу \overline{mn} , $\alpha := m+1$, $\beta := n+1$, $a := \alpha - \beta$, $b := \alpha + \beta$.

$$f(x) := \sqrt{\beta^2 - (x - \alpha)^2}$$

Вычислить $\int_a^b f(x) dx$ методом прямоугольников, трапеций и Симпсона, при

$N=4, 10, 100$, проверить ответ по формуле Ньютона-Лейбница и сделать вывод.