Лабораторная работа №2.
Вычисления с матрицами.

Цель работы:
Освоение основных операций палетки ‘matrix’. Методы решения систем линейных уравнений. Вычисление норм векторов и матриц.

Вопросы для повторения.

1. Что такое матрица?
2. Что такое система линейных уравнений?
3. Что такое матрица коэффициентов системы линейных уравнений?
4. Что такое столбец свободных членов?
5. Расширенная матрица системы линейных уравнений?
6. Однородная система линейных уравнений?
7. Элементарные преобразования?
8. Прямые методы решения систем линейных уравнений.
9. Итерационные методы решения систем линейных уравнений.
10. Формула Крамера.
11. Прямой ход метода Гаусса.
12. Обратный ход метода Гаусса.
13. Каковы возможные ответы метода Гаусса?
14. Невязка уравнения.
15. Метод простых итераций.
16. Норма вектора.
17. Нормы матрицы.
18. Хорошо и плохо обусловленные системы.
19. Число обусловленности матрицы.
20. Ранг матрицы.
21. Теорема Кронекера-Капелли.
22. Обратная матрица.

Часть первая.
Примеры вычислений с матрицами.

Дана матрица: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Найти: определитель $|A| = -2$ (Что значит, что определитель имеет отрицательный знак?).
Обратную матрицу $A^{-1} = ?$ Как ее искать без компьютера?
Чему равно $A \cdot A^{-1} = ?$

Чему равно $A^{\langle 1 \rangle} = ?$ Что это такое?
$ORIGIN := 1$ $\quad A^{\langle 1 \rangle} = ?$ $\quad A^2 = ?$
В чем различие между $A^2 \_u\_ A^{\langle 2 \rangle}$?

<u>Начало работы.</u>
<u>Дано:</u>
Матрица A размера 3×3 и вектор-столбец b.

Задание.

Решить систему $A \cdot x = b$ методом Крамера, при помощи обратной матрицы и методом Гаусса.

Найдем определитель $\Delta := |A|$ -- проверяем $\Delta \neq 0$

$A1$ -- заменим первый столбец на b,

$\Delta 1 := |A1|$, аналогично $A2, A3, \Delta 2, \Delta 3$, тогда

$x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta}$

$x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta}$

$x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta}$

Решим при помощи обратной матрицы:

$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Или при помощи процедуры *lsolve* для решения линейных уравнений:

$x := lsolve(A, b)$

$x = ...$

Решим методом Гаусса.

$ORIGIN := 1$

Мы воспользуемся подпрограммами:

- которая добавляет к матрице *A* матрицу *b.*

-- приводит элементарными преобразованиями строк матрицу A к трапецевидной форме.

- “ вырезает” (как будто ножницами) с m_1 по m_2 строки, и с n_1 по n_2 столбцы.

Итак,

$Ar := augment(A, b)$ --расширенная матрица системы.

$Ar = ...$

$Ag := rref(A)$ --преобразованная методом Гаусса.

$Ag = ...$ -- где тут решение?

Вырежем его

$x := submatrix(A, m_1, m_2, n_1, n_2)$ $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, и $n_1 = n_2 = 4$.

x=… -ответ.

$A \cdot x - b = \ldots$ -- проверка, вычисление невязок в уравнениях, посмотрите их с точностью до $10^{-3}, 10^{-15}$.

Варианты задания.

$$\textbf{1.}\quad A = \begin{pmatrix} -14 & -9 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 6 & -4 & -14 \\ -14 & -9 & 2 & 3 & -2 \\ -15 & -11 & 2 & -3 & -8 \\ -29 & -20 & 4 & 0 & -10 \end{pmatrix},\quad b_1 = \begin{pmatrix} -3.45 \\ -15.2 \\ -10.45 \\ -18.65 \\ -29.1 \end{pmatrix},\quad b_2 = \begin{pmatrix} -2.45 \\ -15.1 \\ -9.45 \\ -18.98 \\ -29.6 \end{pmatrix}.$$

2. $A=\begin{pmatrix} -13 & -8 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & -13 \\ -13 & -8 & 3 & 4 & -1 \\ -13 & -9 & 4 & -1 & -6 \\ -26 & -17 & 7 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} -2.8 \\ -26.3 \\ -16.8 \\ -29.1 \\ -45.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} -1.8 \\ -26.1 \\ -15.8 \\ -29.77 \\ -46.9 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} -12 & -7 & -2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 8 & -2 & -12 \\ -12 & -7 & 4 & 5 & 0 \\ -11 & -7 & 6 & 1 & -4 \\ -23 & -14 & 10 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1.95 \\ -33.3 \\ -19.05 \\ -31.35 \\ -50.4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 2.95 \\ -33 \\ -18.05 \\ -32.35 \\ -51.9 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} -11 & -6 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & -1 & -11 \\ -11 & -6 & 5 & 6 & 1 \\ -9 & -5 & 8 & 3 & -2 \\ -20 & -11 & 13 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 10.8 \\ -36.2 \\ -17.2 \\ -25.4 \\ -42.6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 11.8 \\ -35.8 \\ -16.2 \\ -26.73 \\ -44.6 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} -10 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 0 & -10 \\ -10 & -5 & 6 & 7 & 2 \\ -7 & -3 & 10 & 5 & 0 \\ -17 & -8 & 16 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 23.75 \\ 35 \\ -11.25 \\ -11.25 \\ -22.5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 24.75 \\ 34.5 \\ -10.25 \\ -12.92 \\ -25 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} -9 & -4 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 11 & 1 & -9 \\ -9 & -4 & 7 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 12 & 7 & 2 \\ -14 & -5 & 19 & 15 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 40.8 \\ -29.7 \\ -1.2 \\ 11.1 \\ 9.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 41.8 \\ 29.1 \\ -0.2 \\ 9.1 \\ 6.9 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} -8 & -3 & 2 & 7 & 12 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & -8 \\ -8 & -3 & 8 & 9 & 4 \\ -3 & 1 & 14 & 9 & 4 \\ -11 & -2 & 22 & 18 & 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 61.95 \\ -20.3 \\ 12.95 \\ 41.65 \\ 54.6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 62.5 \\ -19.6 \\ 13.95 \\ 39.32 \\ 51.1 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 & 8 & 13 \\ 6 & 5 & 13 & 3 & -7 \\ -7 & -2 & 9 & 10 & 5 \\ -1 & 3 & 16 & 11 & 6 \\ -8 & 1 & 25 & 21 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 87.2 \\ -6.8 \\ 31.2 \\ 80.4 \\ 111.6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 88.2 \\ -6 \\ 32.2 \\ 77.73 \\ 107.6 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 & 9 & 14 \\ 7 & 6 & 14 & 4 & -6 \\ -6 & -1 & 10 & 11 & 6 \\ 1 & 5 & 18 & 13 & 8 \\ -5 & 4 & 28 & 24 & 14 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 116.55 \\ 10.8 \\ 53.55 \\ 127.35 \\ 180.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 117.55 \\ 11.7 \\ 54.55 \\ 124.35 \\ 176.4 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 15 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 11 & 12 & 7 \\ 3 & 7 & 20 & 15 & 10 \\ -2 & 7 & 31 & 27 & 17 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 150 \\ 32.5 \\ 80 \\ 182.5 \\ 262.5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 151 \\ 33.5 \\ 81 \\ 179.167 \\ 257.5 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 9 & 8 & 16 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & 12 & 13 & 8 \\ 5 & 9 & 22 & 17 & 12 \\ 1 & 10 & 34 & 30 & 20 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 187.55 \\ 58.3 \\ 110.55 \\ 245.85 \\ 356.4 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 188.55 \\ 59.4 \\ 11.55 \\ 242.183 \\ 350.9 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 12 & 17 \\ 10 & 9 & 17 & 7 & -3 \\ -3 & 2 & 13 & 14 & 9 \\ 7 & 11 & 24 & 19 & 14 \\ 4 & 13 & 37 & 33 & 23 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 229.2 \\ 88.2 \\ 145.2 \\ 317.4 \\ 462.6 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 230.2 \\ 89.4 \\ 146.2 \\ 313.4 \\ 456.6 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & 13 & 18 \\ 11 & 10 & 18 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & 14 & 15 & 10 \\ 9 & 13 & 26 & 21 & 16 \\ 7 & 16 & 40 & 36 & 26 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 274.95 \\ 122.2 \\ 183.95 \\ 397.15 \\ 581.1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 275.95 \\ 123.5 \\ 184.95 \\ 392.817 \\ 574.6 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 & 14 & 19 \\ 12 & 11 & 19 & 9 & -1 \\ -1 & 4 & 15 & 16 & 11 \\ 11 & 15 & 28 & 23 & 18 \\ 10 & 19 & 43 & 39 & 29 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 324.8 \\ 160.3 \\ 226.8 \\ 485.1 \\ 711.9 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 325.8 \\ 161.7 \\ 227.8 \\ 480.433 \\ 704.9 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ 13 & 12 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 16 & 17 & 12 \\ 13 & 17 & 30 & 25 & 20 \\ 13 & 22 & 46 & 42 & 32 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 378.75 \\ 202.5 \\ 273.75 \\ 581.25 \\ 855 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 379.75 \\ 204 \\ 274.75 \\ 576.25 \\ 847.5 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 14 & 13 & 21 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 17 & 18 & 13 \\ 15 & 19 & 32 & 27 & 22 \\ 16 & 25 & 49 & 45 & 35 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 436.8 \\ 248.8 \\ 324.8 \\ 685.6 \\ 1010 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 437.8 \\ 250.4 \\ 325.8 \\ 680.267 \\ 1002 \end{pmatrix}$.

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 15 & 14 & 22 & 12 & 2 \\ 2 & 7 & 18 & 19 & 14 \\ 17 & 21 & 34 & 29 & 24 \\ 19 & 28 & 52 & 48 & 38 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 498.95 \\ 299.2 \\ 379.95 \\ 798.15 \\ 1178 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 499.95 \\ 300.9 \\ 380.95 \\ 792.483 \\ 1170 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 16 & 15 & 23 & 13 & 3 \\ 3 & 8 & 19 & 20 & 15 \\ 19 & 23 & 36 & 31 & 26 \\ 22 & 31 & 55 & 51 & 41 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 565.2 \\ 353.7 \\ 439.2 \\ 918.9 \\ 1258 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 566.2 \\ 355.5 \\ 440.2 \\ 912.9 \\ 1349 \end{pmatrix}$.

19. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 17 & 16 & 24 & 14 & 4 \\ 4 & 9 & 20 & 21 & 16 \\ 21 & 25 & 38 & 33 & 28 \\ 25 & 34 & 58 & 54 & 44 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 635.55 \\ 412.3 \\ 502.55 \\ 1048 \\ 1550 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 636.55 \\ 414.2 \\ 503.55 \\ 1042 \\ 1541 \end{pmatrix}$.

Часть вторая

Решение системы методом простых итераций.

Систему $A \cdot x = b$ переписываем виде $x = bb + F \cdot x$, где матрица

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} \\ . & . & . \end{pmatrix} \text{ столбец } b := \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{pmatrix} \text{ где}$$

$A = \left\| a_{ij} \right\|$,

$b = \left\| b_i \right\|$

Тогда:

$x^{\langle 1 \rangle} := bb$

$k := 2..10$

$x^{\langle k \rangle} := bb + F \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$

$x = \ldots$

$$\varepsilon := \frac{\left| x^{\langle 10 \rangle} - x^{\langle 9 \rangle} \right|}{\left| x^{\langle 10 \rangle} \right|}$$

$\varepsilon = \ldots$

Сверить $x^{\langle 10 \rangle}$ с решением системы, найденным в первой части. Сделать вывод.

Часть третья.

Сходимость итераций.

1) Найти число *обусловленности* матрицы A.
$C := A^{-1}$
$cond(A) := norm2(A) \cdot norm2(C)$
$cond(A) =$

Вывод.

2) Вычислить норму матрицы F.
$nf := norm2(F)$, $nf =$
Сделать вывод о сходимости итерационного процесса.

3) Вычислить следующие нормы матрицы A:

$n1 := norm1(A)$, $n1 =$ $n2 := norm2(A)$, $n2 =$.

$ni := normi(A)$, $ni =$.

Объяснить вычисление $n1$ _, _ ni .

Найти $\lambda = \sqrt{\lambda_{\max}(A \cdot A^T)}$, $\Lambda := eigenvals(A \cdot A^T)$,

Наибольшее собственное число в Λ и будет $\lambda_{\max}$.

Сравнить $\lambda_{\max}$ с нормами $n1, n2, ni$, и сделать вывод.