

1. Записать на математическом языке (языке математических символов) следующие высказывания:
  - а)  $x$  является элементом множества  $M$ ;
  - б) множество  $A$  есть подмножество множества  $B$ ;
  - в)  $x, y, z$  суть элементы множества  $S$ ;
  - г) существует элемент  $x$  из множества  $M$ ;
  - д) существует и единственный элемент  $x$  из множества  $B$ ;
  - е) из  $V$  следует  $W$  ( $V$  и  $W$  – высказывания);
  - ж)  $V$  тогда и только тогда, когда  $W$ ;
  - з)  $V$  эквивалентно  $W$ ;
  - и)  $V$  неверно;
  - к) для любого элемента  $x$  множества  $M$  справедливо  $V$ ;
  - л) существует элемента  $x$  множества  $S$ , для которого  $V$  истинно.

2. Записать на математическом языке (языке математических символов) следующие определения:

- а) множество  $X$  является подмножеством множества  $Y$ ;
- б) множество  $X$  совпадает с множеством  $Y$ ;

3. Что называется геометрической прогрессией? Чему равна ее сумма (с доказательством)?

4. Что такое « $n$ -факториал»? Как это обозначается? Как вычисляется? Что такое «число сочетаний из  $n$  по  $k$ »? Как это обозначается? Как вычисляется? Пояснить на примере его смысл. Записать разложение бинома.

5. В чем состоит метод математической индукции. Доказать этим методом формулу:

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$$

6. Дать определение элементарной окрестности ( $\varepsilon$ -окрестности) числа  $p$ , элементарной окрестности  $\infty$ , элементарной окрестности  $-\infty$ .
7. Дать определение функции. Привести основные обозначения функции. Что называется областью определения функции и областью ее значений? Что значит «задать функцию  $f$ »? Дать определение графика функции.
8. Дать определение композиции двух отображений (сложной функции). Перечислить основные свойства композиции. Дать определение обратной функции. Каким свойством обладают графики взаимно-обратных функций. Привести несколько примеров взаимно-обратных функций.
9. Дать определение следующих классов функций:
  - а) монотонно-возрастающие;
  - б) монотонно-убывающие;
  - в) невозрастающие;
  - г) неубывающие;
  - д) периодические с периодом  $T$ ;
  - е) четные;
  - ж) нечетные;
  - з) линейные;
  - и) полином  $n$ -ого порядка;
  - к) рациональные.
10. Дать определение числовой последовательности. Дать определение предела числовой последовательности в двух формах: топологическое (через элементарную окрестность) и арифметическое (в терминах « $\varepsilon - \delta$ »). Сформулировать теорему о единственности

предела.

11. Какая числовая последовательность называется монотонной? Ограниченной? Сформулировать теоремы о пределе монотонной последовательности и неравенстве пределов.
12. Сформулировать основные теоремы о вычислении пределов числовых последовательностей:
  - а) о сумме пределов;
  - б) о произведении пределов;
  - в) о пределе последовательности обратных величин;
13. Чему равны следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}, k \in \mathbb{N}, a > 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

14. Какие последовательности называются сходящимися? Расходящимися? Сформулировать критерий Коши сходящейся последовательности.
15. Дать « $\varepsilon - \delta$ » определение непрерывности функции в точке. Непрерывности функции на отрезке. Обозначение непрерывности функции. Привести примеры разрывных в точке функций.
16. Сформулировать теорему об основных свойствах непрерывных функций (сумма, разность, произведение и частное двух функций). Доказать с помощью этой теоремы непрерывность полинома  $n$ -ого порядка на всей числовой прямой.
17. Сформулировать теорему о непрерывности композиции функций и теорему о непрерывности обратной функции.
18. Сформулировать теорему о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции. Доказать с помощью этой теоремы, что полином нечетного порядка имеет на числовой прямой по крайней мере один ноль.
19. Дать определение предела функции в двух формах: топологическое (через элементарную окрестность) и арифметическое (в терминах « $\varepsilon - \delta$ »). Сформулировать теорему о единственности предела. Сформулировать критерий Коши существования предела функции.
20. Сформулировать основные теоремы о вычислении предела функции:
  - а) о сумме пределов;
  - б) о произведении пределов;
  - в) о пределе последовательности обратных величин;

Доказать с помощью этой теоремы, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^a}{x} = 0, a > 1$ .

20. Сформулировать теорему о пределе сложной функции и теорему о пределе обратной функции.

21. Дать определение правостороннего предела функции и левостороннего предела. Привести примеры.

22. Дать определение следующих пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B;$$

23. Если  $a$  – число, чему равен следующий результат:

$$+\infty + a = \quad \quad \quad +\infty \cdot (a) = \quad \quad \quad \frac{a}{+\infty} =$$

$$+\infty + \infty = \quad \quad \quad a \cdot (-\infty) = \quad \quad \quad \frac{a}{-\infty} =$$

$$-\infty + a = \quad \quad \quad (+\infty) \cdot (+\infty) = \quad \quad \quad \frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$-\infty - \infty = \quad \quad \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = \quad \quad \quad \frac{+\infty}{-\infty} =$$

$$+\infty - \infty = \quad \quad \quad (\infty)^0 = \quad \quad \quad \frac{0}{0} =$$

$$0 \cdot (+\infty) =$$

Чему равны «замечательные» пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} =$$

24. Дать определение сравнения двух функций типа:

$$\varphi(x) = O(f(x)), x \in X$$

$$\varphi(x) = O(f(x)), x \rightarrow a$$

и сформулировать критерий для последнего сравнения.

25. Дать определение функции

$$f(x) = O(x^p), x \rightarrow 0, p > 0$$

$$f(x) = O(x^p), x \rightarrow \infty, p > 0$$

Привести примеры.

26. Дать определение сравнения двух функций типа:

$$\varphi(x) = O(f(x)), x \rightarrow a$$

и сформулировать соответствующий критерий.

27. Дать определение эквивалентности функций  $\varphi(x) \sim f(x), x \rightarrow a$  и сформулировать соответствующий критерий.

28. Дописать эквивалентные функции в следующих выражениях:

$$\sin(x) \sim \dots, x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg}(x) \sim \dots, x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 \sim \dots, x \rightarrow 0$$

$$a^x - 1 \sim \dots, x \rightarrow 0; a > 0$$

$$\ln(1+x) \sim \dots, x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha \sim \dots, x \rightarrow 0$$