МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Е.А. Жукова, Л.Д. Жулева

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Справочный материал и пособие к практическим занятиям и СРС

для студентов 1 и 2 курсов

всех специальностей и форм обучения

Москва 2012

Первообразная и неопределённый интеграл

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на (a,b), если $F^{/}(x)=f(x)$ на (a,b).

Множество всех первообразных для функции f(x) называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
2. $(\int f(x)dx)^{/} = f(x)$
3. $\int df(x) = \int f^{/}(x)dx = f(x) + C$
4. $\int[f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\int c \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и U=U(x), где U(x)- непрерывно дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$
7. Если x=x(t) непрерывно дифференцируемая функция, то $\int f(x)dx = \int f\big(x(t)\big) \cdot x^{/}(t)dt.$

Таблица 1

Таблица простейших часто встречающихся интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
5. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$
6. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
9. $\int sinx\,dx = -cosx + C$
10. $\int \cos x\,dx = sinx + C$
11. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$
12. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$
13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$
16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = -\int \frac{dx}{x^2-1}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

При применении свойств 6 и 7 полезно использовать табл. 2.

Таблица 2

Таблица основных дифференциалов

1. $dx = d(x \pm C) \quad dx = \frac{1}{C} d(C \cdot x) \;\; dx = C \cdot d(\frac{x}{C})$ *где С-константа*.
2. $xdx = \frac{1}{2} dx^2$
3. $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^2$
4. $x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1}) \;\; n \neq -1$
5. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$
6. $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $\frac{dx}{x} = dlnx$
8. $e^x dx = de^x$
9. $a^x dx = \frac{1}{\ln a} da^x$
10. $sinx\, dx = -dcosx$
11. $cosx\, dx = d \sin x$
12. $\frac{dx}{cos^2 x} = d\, tgx$
13. $\frac{dx}{sin^2 x} = -dctgx$
14. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\, arccosx = d\, arcsinx$
15. $\frac{dx}{1+x^2} = d\, arctgx$

Рассмотрим примеры нахождения неопределенного интеграла методом «подведения под знак дифференциала», т.е. будем использовать табл. 2.

Пример 1

$\int \sqrt{2x-5} dx = \int \frac{\sqrt{2x-5}}{2} d(2x-5) = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2} + C. \quad (U = 2x-5).$

Пример 2

$\int \frac{x\, dx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + C. \quad (u = x^2+3).$

Пример 3

$\int sin^2 x \cos x\, dx = \int sin^2 x d \sin x = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sin^3 x}{3} + C. \quad (U = sinx).$

Пример 4

$\int \frac{\sqrt[3]{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt[3]{arcsinx}\, d\, arcsinx = \int \sqrt[3]{u} du = \frac{3}{4} u^{4/3} + C = \frac{3}{4} (arcsinx)^{4/3} + C. \quad (U = arcsinx).$

➢ Интегрирование путем замены переменной

Один из наиболее распространенных методов, применяемых при вычислении неопределенных интегралов, метод замены переменных или подстановки.

Если известно, что $\int f(t)dt = F(t) + C$, то

$\int f\big(u(x)\big)u^{/}(x)dx = F\big(u(x)\big) + C$ где f(t), u(x), $u^{/}$(x) – непрерывны.

Способ подстановки состоит в том, что сообразно виду подынтегральной функции составляют вспомогательную функцию, подстановка которой в исходный интеграл приводит его к виду более удобному для интегрирования (часто табличному).

Рассмотрим примеры, уже решенные ранее:

Пример 1

$$\int \sqrt{2x-5}dx = \left\{\begin{matrix} 2x-5=t & x=\frac{t+5}{2} \\ 2x=t+5 & dx=\frac{1}{2}d(t+5)=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\} = \sqrt{\mathrm{t}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int \mathrm{t}^{1/2}\cdot\mathrm{dt} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\mathrm{t}^{3/2} = \frac{1}{3}(2\mathrm{x}-5)^{3/2} + \mathrm{C}.$$

Пример 2

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \left\{\begin{matrix} x^2+3=t & d(x^2)=d(t-3)\ \ xdx=\frac{1}{2}dt \\ x^2=t-3 & 2xdx=dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t| =$$
$$\frac{1}{2}ln|x^2+3| + \mathrm{C}.$$

Пример 3

$$\int sin^2x\cdot cosx\,dx = \left\{\begin{matrix} sinx=t \\ d(sinx)=dt \\ \cos xdx=dt \end{matrix}\right\} = \int t^2dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}sin^3x + \mathrm{C}.$$

Пример 4

$$\int \frac{\sqrt[3]{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{\begin{matrix} arcsinx=t \\ d(arcsinx)=dt \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dt \end{matrix}\right\} \int \sqrt[3]{t}\,dt = \int t^{1/3}\,dt = \frac{3}{4}t^{4/3} = \frac{3}{4}(arcsinx)^{4/3} + C.$$

Используем замену в более сложных примерах.

Пример 5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}$$

В этом случае используется форма подстановки, а именно $x = t^6$, получим

$$\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = d(t^6) = 6t^5 dt$$

и $\int \frac{6t^5 dt}{t^3(4+t^2)} = 6\int \frac{t^2\,dt}{4+t^2} = 6\int \frac{(t^2+4)-4}{t^2+4} dt = \int 6\,dt - 24\int \frac{dt}{t^2+4} = 6t - 12arctg\,\frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} +$ $+12arctg\,\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$

Пример 6

Использование универсальной тригонометрической подстановки

$$t = tg\,\frac{x}{2}(-\pi < x < \pi)$$

$$sinx = \frac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$cosx = \frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctg\,t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\int \frac{dx}{\cos 3x + 2sin3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{cos3x+2sin3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{cosz+2sinz} = \frac{1}{3}\int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2})} =$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-t^2+4t} =$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dt}{5-(t-2)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{5-u^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{5}}\,ln\left|\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right| + C = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,ln\left|\frac{tg\frac{3x}{2}-2+\sqrt{5}}{tg\frac{3x}{2}-2-\sqrt{5}}\right| + \text{C}.$$

Метод замены переменной является одним из общих методов интегрирования. Умения использовать такие подстановки, которые упрощают подынтегральные выражения, вырабатываются практикой. Общих указаний по выбору выгодной подстановки дать нельзя.

➢ *Интегрирование по частям*

Пусть $U(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, тогда $\int udv = u \cdot v - \int vdu.$ или $\int u \cdot v^{/}dx = u \cdot v - \int v \cdot u^{/}dx$

Пример 7

$\int x \cdot e^{-x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{x} \end{matrix} \right\} = -x \cdot e^{-x} - \int(-e^{-x})dx = x \cdot e^{-x} - e^{-x} + \text{C}.$

Пример 8

$\int x^2 \cos x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = cosx\, dx & v = -sinx \end{matrix} \right\} = -x^2 sinx - \int 2x\,(-sinx)dx.$

Рассмотрим получившийся интеграл

$$2\int x \sin x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = sinxdx & v = -cosx \end{matrix} \right\}$$
$$= -2x\, cosx - \int(-cosx)dx = -2xcosx + sinx$$

Ответ: $-x^2 sinx - 2xcosx + sinx + C.$

Замечания

Метод интегрирования по частям применяется при интегрировании следующих видов функций. $P_m(x) \cdot sinax$; $P_m(x)\cos ax$; $P_m(x) \cdot e^{ax}$; $P_m(x)arctgax$; $P_m(x)arcsinax$; $P_m(x)arccosax$; $P_m(x) \cdot lnax$.

1. При интегрировании функций вида $e^{ax}sinbx$; $e^{ax}cosbx$ интегрирование по частям применяется 2 раза, что приводит к решению уравнения для получения конечного ответа.

Пример 9

$\int e^x \cos x\, dx = \int \cos x\, de^x = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x +$
$+ \int \sin x\, de^x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x cos\, x\, dx.$

Пусть $I = \int e^x \cos x\, dx.$

Тогда последнее равенство может быть переписано в виде

$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I.$

Получим уравнение

$2I = e^x(cosx + sinx)$

Отсюда

$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + s\,in\, x) + C.$

2. Метод интегрирования по частям может быть использован при интегрировании функций $\sqrt{ax^2+b}$, тогда $U = \sqrt{ax^2+b}$, $dv = dx$.

Пример 10

$$J = \int \sqrt{7-x^2}dx = \begin{cases} u = \sqrt{7-x^2} & du = \frac{1}{2\sqrt{7-x^2}}(-2x)dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}\Bigg\} \to x\cdot \sqrt{7-x^2} - \int \frac{(-2x)\cdot x}{2\sqrt{7-x^2}}dx.$$

Рассмотрим получившийся интеграл.

$$\int \frac{-x^2}{\sqrt{7-x^2}}dx = \int \frac{(7-x^2)-7}{\sqrt{7-x^2}}dx = \int \sqrt{7-x^2}\,dx - {}^{7}\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = J - 7arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}.$$

Имеем: $J = x\sqrt{7-x^2} - J + 7arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}$ уравнение относительно J.

$$2J = x\sqrt{7-x^2} + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}.$$

Ответ:

$$J = \int \sqrt{7-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{7-x^2} + 7arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Пример 10 может быть решен методом замены.

Пусть $x = \sqrt{7}\cdot \sin t$, тогда $7 - (\sqrt{7}\sin t)^2 = 7 - 7sin^2t = 7(1 - sin^2t) = 7\cdot cos^2t \to \sqrt{7cos^2t} = \sqrt{7}\cdot \cos t.$

$$dx = \sqrt{7}\cos t\; dt.$$

$$\mathrm{J} = \int \sqrt{7}\cos \mathrm{t}\cdot \sqrt{7}\cos \mathrm{t\,dt} = 7\int \cos^2\mathrm{t\,dt} = \frac{7}{2}\int 2\cos^2\mathrm{t\,dt} = \frac{7}{2}\int(1 + \cos 2\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = \frac{7}{2}\left(\mathrm{t} + \frac{\sin 2\mathrm{t}}{2}\right) = \frac{7}{2}\left[\arcsin\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\sin 2(\arcsin\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{7}})\right] + \mathrm{C}.$$

При вычислении одного и того же интеграла разными методами могут получаться отличные друг от друга ответы. Здесь имеем две функции $F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{7-x^2} + \frac{7}{2}arctg\ \frac{x}{\sqrt{7}} + C$ и $g(x) = \frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{7} + \frac{7}{4}\sin 2(arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}) + C$. Однако $F^/(x) = g^/(x) = \sqrt{7-x^2}$

Предлагается проверить самостоятельно.

3. Необходимо иметь в виду, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, т.к. правая часть формулы (1) содержит интеграл. Но при правильном применении метода этот интеграл получается табличным или просто приводящимся к табличному.

Если в результате применения метода интегрирования по частям в правой части получается интеграл сложнее исходного, необходимо заново применить этот метод, разбив подынтегральное выражение на другие два множителя U и dV, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части.

Умения правильного использования этого метода приобретаются только в результате упражнений.

➢ ***Интегрирование дробно-рациональных выражений***

1. $\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$$\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{q+\frac{p^2}{4}}\ arctg\ \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{2}}},\ q-\frac{p^2}{2} > 0. \\ \frac{1}{2\sqrt{p^2/2-q}} \cdot \ln\frac{x+p/2-\sqrt{p^2/2-q}}{x-p/2+\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}},\ q-\frac{p^2}{2} < 0. \end{matrix} \right\} \to x^2+px+q =$$

$$x^2 + \frac{2p}{2}\cdot 1 + (\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4}).$$

2. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ $\qquad x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right) + (q-\frac{p^2}{4})$, причем, как предполагалось выше, $q-\frac{p^2}{4} > 0$.

Обозначим: $a \coloneqq \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Сделаем замену переменных

$z = x+\frac{p}{2},\ \ dz = dx\ ,x^2+px+q = z^2+a^2,$

$Ax+B = A\left(z-\frac{p}{2}\right)+B = Az+(B-\frac{p\cdot A}{2}).$

Имеем:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Az+(B-\frac{pA}{2})}{z^2+a^2}dz = \frac{A}{2}\int \frac{2z\,dz}{z^2+a^2} + \left(B-\frac{pA}{2}\right)\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln(z^2+a^2) +$$
$$+\frac{1}{a}\cdot\left(B-\frac{pA}{2}\right)arctg\ \frac{z}{a} + C = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-p\cdot A}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\ \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

3. Пусть $\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$ правильная дробь, т.е. m < n. Рассмотрим упрощенный вариант разложения многочлена на множители (полные способы разложения здесь не рассматриваются)

$Q_n(x) = (x-a)(x-b)^2\cdot(x^2+px+q)$, т.е. n=5;

Тогда

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)(x-b)^2(x^2+px+q)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C_x+D}{x^2+px+q}.$$

Найдя коэффициенты A,B,C и D, мы придем к вычислению трех уже известных интегралов

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{(x-b)^2} + \int \frac{C_x+D}{x^2+px+q}dx.$$

Пример 11

$$J = \int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx.$$

$\left.\begin{cases} P_m(x) = 2x^2-3x+1 & m=2. \\ Q_n(x) = x^3+1 & n=3 \end{cases}\right\}$-> m < n дробь правильная.

$Q_3(x) = x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ –> разложили как сумму кубов

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

$$2x^2-3x+1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1).$$

Т.к $Q_3(x)$ имеет действительный корень x=-1 (x+1=0), то применим метод частных значений: подставим x=-1 в левую и правую часть разложения $Q_3(x)$

$$2(-1)^2-3(-1)+1 = A((-1)^2-(-1)+1) + (B(-1)+C)(-1+1).$$

$6 = 3A$–><u>*A=2*</u>.

Других удобных значений X у нас нет. Применим метод сравнения коэффициентов при одинаковых степенях X в левой и правой частях.

$x^2|\ 2 = A+B = 2+B \to B = 0.$

$x^0|\ 1 = A+C = 2+C \to C = -1.$

Имеем

$J = \int \frac{2\,dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x^2-1+1} = 2\ln|x+1| - \int \frac{dx}{(x-{}^1/_2)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$.

$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C. + C.$

➢ ***Необходимые сведения и формулы***

1. **Формулы сокращенного умножения**

   $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

   $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

   $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

   $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^3 \pm b^3$.

2. **Выделение полного квадрата**

   $x^2 + px + q = x^2 + \frac{2p}{2^* x} + q = x^2 + \frac{2p}{2^* x} + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})$.

   $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a^* x} + \frac{c}{a}\right)$, далее учесть, что $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$.

3. **Разложение квадратного трехчлена на множители**

   $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

где x_1, x_2- корни квадратного трехчлена

$ax^2 + bx + c = 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если коэффициент b-четный, то удобнее использовать следующую формулу:

$x_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$.

4. **Тригонометрические формулы**

✓ **<u>Функции одного угла</u>**

$sin^2 a + cos^2 a = 1$; $1 + 1/cos^2 a = tg^2 a$; $1 + 1/sin^2 a = ctg^2 a$,

$tga = \sin a / \cos a$; $ctg\, a = \cos a / \sin a$; $tga^* ctga = 1$.

✓ **<u>Функции кратных углов</u>**

$sin2a = 2\sin a^* \cos a$; $cos2a = cos^2 a - sin^2 a$; $tg2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}$.

✓ **<u>Функции половинного угла</u>**

$2sin^2 a = 1 - cos2a$; $2cos^2 a = 1 + cos2a$.

✓ **Произведение функций**

$sina\ sin\beta = 1/2(\cos(a-\beta) - \cos(a+\beta));$

$cosa\ cos\beta = 1/2(\cos(a-\beta) + \cos(a+\beta));$

$sina\ cos\beta = 1/2(\sin(a-\beta) + \sin(a+\beta)).$

✓ **Универсальная тригонометрическая подстановка**

$$sin2a = \frac{2\,tga}{1+tg^2a};\ cos2a = \frac{1-tg^2a}{1+tg^2a}.$$

5. Гиперболические функции

$$shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}; chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}; thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Основные формулы гиперболической тригонометрии

$ch^2x - sh^2x = 1; sh2x = 2shx\ chx; ch2x = sh^2x + ch^2x.$

6. Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная
C (постоянная)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$1/x$	$-1/x^2$
$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$1/n\sqrt[n]{x^{n-1}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$log_a x$	$1/x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg\ x$	$1/cos^2x$
$ctg\ x$	$-1/sin^2x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$arctgx$	$1/(1+x^2)$
shx	chx
chx	shx
thx	$1/ch^2x$

7. Правила дифференцирования

$(C^*U)^/ = C^*U^/$; $(U \pm V)^/ = U^/ \pm V^/$; $(U/V)^/ = \frac{U^/V - UV^/}{V^2}$;

$(U^*V)^/ = U^/V + UV^/$.

8. Производная сложной функции (функции от функции - цепное правило)

$Y = F(u); u = Z(t); t = R(x); Y_x^/ = F^/(u)Z^/(t)R^/(x)$

В случае длинной цепочки поступают аналогично.

9. Свойства дифференциала

$dx = 1/c^*d(cx)$, $dx = c^*d(x/c)$, $dx = d(x \pm c)$, где С-константа.

10. Общие правила интегрирования

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

Интеграл суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов от слагаемых:

$\int(u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$, где *u,v,w* – функции от х.

Правило подстановки:

если x=z(t), то $\int f(x)dx = \int f\big(z(t)\big)z^/(t)dt.$

Интегрирование по частям

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$, где *u,v* – функции от х.

В дальнейшем во всех формулах постоянная интегрирования опущена, первообразные, содержащие $\ln f(x)$*, следует понимать как* $\ln|f(x)|$*, знак абсолютной величины опущен для простоты.*

11. Таблица основных интегралов

Степенные функции	***Показательные функции***
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1);$ $\int dx = x.$	$\int e^x dx = e.$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x.$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}.$
Тригонометрические функции	***Гиперболические функции***
$\int \sin x\, dx = -\cos x.$	$\int sh\ x\, dx = ch\ x.$
$\int \cos x\, dx = \sin x.$	$\int ch\ x\, dx = sh\ x.$
$\int tg\ x\, dx = -\ln\cos x.$	$\int th\ x\, dx = \ln ch\ x.$
$\int ctg\ x\, dx = \ln\sin x.$	$\int cth\ dx = \ln sh\ x.$
$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x.$	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\ x.$
$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\ x.$	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\ x.$
Дробно-рациональные функции	***Иррациональные функции***
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a}.$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}.$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln\frac{a+x}{a-x}(x < a).$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}).$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\frac{(x-a)}{(x+a)}\ (x > a).$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}).$

12. Интегрирование иррациональных функций

Эти интегралы вычисляются с помощью следующих подстановок:

$\int R\,(x, \sqrt{x^2+a^2})dx;\ x - a\ sht$ или $x - a\ tgt$

$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx;\ x = cht$

$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx;\ x = a\sin t;\ x = a\cos t$

$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx;\ x = t^n$

(n-наименьшее общее кратное показателей всех радикалов, под которым X входит в подынтегральную функцию)

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, Интегралы этого вида после выделения полного квадрата под корнем линейными подстановками сводятся к следующим:

1) если a > 0, то $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$
2) если a < 0, то $\int \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}$

13. Интегрирование биномиальных дифференциалов

$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$

может быть выражен в элементарных функциях только в следующих трех случаях:

1) p- целое. Следует произвести все указанные действия в подынтегральной функции.
2) $\frac{m+1}{n}$ - целое. Замена $t=\sqrt[r]{a+bx^n}$, где *r*- знаменатель дроби *p*
3) $\frac{m+1}{n}+p$- целое. Замена $t=\sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где *r*- знаменатель дроби *p*

14. Интегрирование тригонометрических функций

$\int R\,(\sin x\,,\cos x)dx.$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$tg\ \frac{x}{2}=t;\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$

Частные подстановки

- Если R (sin x, cos x)нечетная относительно cos x, то применима подстановка sin x=t.

- Если R (sin x, cos x) четная относительно cos x и sin x, то tg x=t

- $\int sin^m x^* cos^n x\ dx.$

1) Если показатель одной из тригонометрических функций – нечетное положительное целое число, то, принимая другую функцию за t, сведем интеграл к табличным.
2) Если m+n есть четное отрицательное целое число, подстановка tg x=t сводит интеграл к табличным.
3) Если m и n – четные неотрицательные числа, то применение формул понижения степени

$2sin^2x=1-\cos 2x$

$2cos^2x=1+\cos 2x$

позволяет упростить интеграл.

15. Дополнение к таблице неопределенных интегралов

1. $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad (n \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b).$
3. $\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b).$
4. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b).$
5. $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n-1}(ax+b)^{1-n}.$
6. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\frac{ax+b}{x}.$
7. $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = -\frac{1}{b^2}\left(ln\frac{ax+b}{x} + \frac{ax}{ax+b}\right).$
8. $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{ax}{c} - \frac{bc-ad}{c^2}\ln(cx+d).$
9. $\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\ln\frac{cx+d}{ax+b}.$
10. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg\ \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}},\ \ 4ac-b^2>0.$
11. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}ln\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}},\ 4ac-b^2<0.$
12. $\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$
13. $\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|.$
14. $\int \frac{dx}{x(a^2\pm x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2\pm x^2}\right|.$
15. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^2}\begin{cases} arctg\frac{b\sqrt{x}}{a}, \text{для } + \\ \frac{1}{2}ln\left|\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}\right|, \text{для } "-" \end{cases}.$
16. $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}.$
17. $\int x\sqrt{ax+b}\ \ dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}}{15a^2}.$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}.$
19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}.$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}, \text{для } b>0 \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}arctg\sqrt{\frac{ax+b}{-b}},\ \text{для } b<0 \end{cases}.$
21. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$

22. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a})$.

23. $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(\sqrt{a^2 - x^2})^3$.

24. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\, ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

25. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - arcsin\frac{x}{a}$.

26. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}\,\right]$.

27. $\int x\sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(a^2 + x^2)^3}$.

28. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})\,\right]$.

29. $\int x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - a^2)^3}$.

30. $\int \frac{\sqrt{x^2}-a^2}{x} = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{x}$.

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$.

32. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} + 2ax + b\right); a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax + b)\,,\ a > 0,\ b^2 - 4ac = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}},\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}.$$

33. $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

34. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

35. $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{1}{k}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ где $k = \frac{4a}{(4ac-b^2)}$.

36. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax$.

37. $\int sin^2ax\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$.

38. $\int sin^3ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}cos^3ax$.

39. $\int x \sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax$.

40. $\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax$.

41. $\int \frac{dx}{sin^2ax} = -\frac{1}{a}ctg\ ax$.

42. $\int \frac{dx}{1\pm\sin ax} = \mp\frac{1}{a}tg\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right)$.

43. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax$.

44. $\int cos^2ax\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$.

45. $\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x \cdot \sin ax$.

46. $\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax.$

47. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln tg\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

48. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln tg\ \frac{ax}{2}.$

49. $\int \frac{dx}{cos^2 ax} = \frac{1}{a} tg\ ax.$

50. $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a} tg\ \frac{ax}{2}.$

51. $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\ ctg\ \frac{ax}{2}.$

52. $\int \sin ax \cdot \cos ax\, dx = \frac{1}{2a} sin^2 ax.$

53. $\int sin^2 ax \cdot cos^2 ax\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$

54. $\int sin^n ax \cdot \cos ax\, dx = \frac{1}{a(n+1)} sin^{n+1} ax,\ n \neq -1.$

55. $\int \sin ax \cdot cos^n ax\, dx = \frac{-1}{a(n+1)}\ cos^n ax,\ n \neq -1.$

56. $\int \frac{dx}{\sin ax \cdot \cos ax} = \frac{1}{a}\ln tg\ ax.$

57. $\int ctg\ ax\ dx = \frac{1}{a}\ln \sin ax.$

58. $\int tg\ ax\ dx = -\frac{1}{a}\ln \cos ax.$

59. $\int ctg^2 ax\ dx = -\frac{ctg\ ax}{a} - x.$

60. $\int tg^2 ax\ dx = -\frac{1}{a} tg\ ax - x.$

61. $\int sh\ ax\ dx = \frac{1}{a} ch\ ax.$

62. $\int ch\ ax\ dx = \frac{1}{a} sh\ ax.$

63. $\int \frac{dx}{sh\ ax} = \frac{1}{a}\ln th\ \frac{ax}{2}.$

64. $\int \frac{dx}{ch\ ax} = \frac{2}{a}\ arctg\ e^{ax}.$

65. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$

66. $\int x e^{ax}\ dx = \frac{1}{a^2} e^{ax}(ax - 1).$

67. $\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}.$

68. $\int x^2 e^{ax}\ dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right).$

69. $\int e^{ax} \sin bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)\ .$

70. $\int e^{ax} \cos bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx).$

71. $\int \ln x\ dx = x \ln x - x.$

72. $\int(\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$

73. $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right].$

74. $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$

75. $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)arcsin\ \frac{x}{a} + \frac{x}{4}\ \sqrt{a^2 - x^2}.$

76. $\int \arccos\frac{x}{a}\ dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$

77. $\int x\arccos\frac{x}{a}\ dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}.$

78. $\int arctg\ \frac{x}{a}dx = x\cdot arctg\ \frac{x}{a} - \frac{a}{2}ln|a^2 + x^2|.$

79. $\int x\ arctg\ \frac{x}{a}\ dx = \frac{x^2}{2}arctg\ \frac{x}{a} - \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}arctg\ \frac{x}{2}.$

Во всех формулах постоянная интегрирования опущена, первообразные, содержащие $lnf(x)$, *следует понимать как* $ln|f(x)|$, *знак абсолютной величины опущен для простоты.*