МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А. В. Самохин, Ю. И. Дементьев

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ДНЕВНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Москва — 2008

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

Кафедра высшей математики

А. В. Самохин, Ю. И. Дементьев

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ДНЕВНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Москва — 2008

Содержание

1. Введение

В данном пособии приведены образцы экзаменационных билетов, варианты заданий олимпиад и собеседований по математике, предлагавшихся поступающим в МГТУ ГА на дневное отделение в 1997 — 2008 годах. К части билетов даны решения, к остальным — ответы и указания.

Поступающие в МГТУ ГА сдают по математике один экзамен в письменной форме. Длительность экзамена составляет 3 астрономических часа. Абитуриенты, имеющие аттестат с медалью, могут пройти (устно) собеседование по математике. Собеседование включает в себя три задачи и один теоретический вопрос (см. далее пункт 2.2). При успешном прохождении собеседования эти абитуриенты зачисляются без экзаменов. Медалисты, не прошедшие собеседование, сдают все экзамены на общих основаниях. Поступающие по договору сдают вступительное собеседование, в которое входит один теоретический вопрос (см. далее пункт 2.2) и две задачи.

Экзаменационный билет по математике содержит несколько задач разного уровня сложности. Решать задачи можно в любом порядке, указав её номер. На чистовик нужно переписать полностью условие задачи, решение и ответ.

Решение каждой задачи должно быть приведено полностью с необходимыми обоснованиями. При использовании теорем и утверждений, входящих в программу средней школы по математике, достаточно сослаться на них, не давая их формулировку. Например, из треугольника ABC по теореме Пифагора получаем $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Задача на доказательство завершается словами „что и требовалось доказать“ или „доказательство завершено“.

2. Программа вступительного экзамена по математике для поступающих в МГТУ ГА в 2008 г.

Настоящая программа состоит из трёх разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий как на письменном экзамене, так и на собеседовании.

Второй раздел представляет собой перечень теоретических вопросов, доказательства которых надо знать для собеседования; для письменного экзамена надо знать лишь формулировки. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений из этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на письменном экзамене и на собеседовании.

Объём знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их точно формулировать, пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием, отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

2.1. Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.
4. Функция, её область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, чётность, нечётность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.
6. Уравнение, неравенство, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
8. Производные степенных, показательных, логарифмических и тригонометрических функций. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.
9. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
10. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.
11. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.
12. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанный углы.
13. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
14. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
15. Цилиндр, конус, шар, сфера.
16. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
17. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
18. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
19. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объём многогранника, цилиндра, конуса, шара.
20. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

2.2. Содержание теоретической части собеседования

Алгебра

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.

3. Формулы сокращённого умножения.
4. Свойства линейной функции и её график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и её график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и её график.
12. Свойства показательной функции и её график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифм произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и её график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a \sin x + b \cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия

1. Теорема о параллельных прямых на плоскости.
2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.

7. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведённых из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на её внешнюю часть.
12. Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность. Свойство четырёхугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельности прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трёх перпендикулярах.

2.3. Требования к поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1) выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;

2) сравнивать числа и находить их приближённые значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
3) решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
4) находить производные суммы, произведения и частного двух функций; решать задачи на нахождение касательной;
5) исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;
6) изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
7) пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
8) пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
9) пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические и тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объёмы;
10) составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
11) излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

На собеседовании по математике поступающий должен дополнительно уметь:

12) давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т.п.), указанные во втором разделе настоящей программы;
13) анализировать формулировки утверждений и их доказательства;
14) решать задачи на построение циркулем и линейкой; находить геометрические места точек.

3. Образцы экзаменационных билетов

3.1. Экзаменационные билеты 1997 г.

Вариант 1.1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 11y = -2, \\ x - 3y = -1. \end{cases}$$

2. В трапеции $MHKP$ (MP и HK — основания) $\angle M = 90^\circ$, $\angle K = 150^\circ$, $|HK| = 2$ см. Найти среднюю линию трапеции, если известно, что её диагональ перпендикулярна боковой стороне.

3. Решить уравнение

$$\cos(4x) + 2\cos^2 x = 0.$$

4. Решить уравнение

$$(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0.$$

5. Найти все натуральные значения параметра a, для которых выражение $\frac{1}{x+y+3}$ определено для всех тех пар (x, y), $x < 0$, $y < 0$, для которых выражение $\log_2(xy - a)$ также определено.

Вариант 1.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 15x + 2y = 2, \\ 13x - 3y = -3. \end{cases}$$

2. В равнобедренной трапеции острые углы равны по 45°, меньшее основание равно 5 см, а высота трапеции равна 4 см. Найти большее основание и среднюю линию трапеции.

3. Решить уравнение

$$\cos(2x) - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{3x}{2x^2 - 4x + 5} + \frac{2x}{2x^2 - 6x + 5} = 3.$$

5. Найти все натуральные значения параметра a, для которых выражение $\frac{1}{x+y-3}$ определено для всех тех пар (x,y), $x>0$, $y>0$, для которых выражение $\log_2(xy-a)$ также определено.

Вариант 1.3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 26x - 15y = -45, \\ 21x + 2y = 6. \end{cases}$$

2. Из точки проведены две касательные к окружности, которые образуют между собой угол α. Радиус окружности равен r. Найти расстояние между точками касания.

3. Решить уравнение

$$\big(1+\cos(4x)\big)\cdot\sin(2x) = \cos^2(2x).$$

4. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$$

5. Найти все целые отрицательные значения параметра a, для которых выражение $\frac{1}{-x+y+3}$ определено для всех тех пар (x,y), $x>0$, $y<0$, для которых выражение $\log_2(a-xy)$ также определено.

Вариант 2.1

1. Решить уравнение

$$3x - 2 = \frac{1}{2x-1}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1, \\ \log_{xy}(x+y) = 0. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$5^{\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots} = 25^{\frac{\cos^2 x}{2}}.$$

4. Найти множество точек плоскости (показать штриховкой), координаты которых удовлетворяют зависимости:

$$|y| \leqslant \log_{\frac{1}{3}}\big||x+2|-1\big|.$$

5. Найти все a из промежутка $(-\infty;4]$, при каждом из которых меньший из корней уравнения

$$x^2 + ax - 3x - 2a - 2 = 0$$

принимает наименьшее значение.

Вариант 2.2

1. Решить уравнение

$$2x - 3 = \frac{1}{9 - 4x}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$3^{\cos^2 x - \cos^4 x + \cos^6 x - \ldots} = \sqrt[3]{3}.$$

4. Найти множество точек плоскости (показать штриховкой), координаты которых удовлетворяют зависимости:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leqslant 0.$$

5. Найти все a из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2 + 2ax - 6x + a - 13 = 0$$

принимает наибольшее значение.

Вариант 2.3

1. Решить уравнение

$$3x + 1 = \frac{16}{5x - 1}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{0,5}(y - x) + \log_{0,5}\frac{1}{y} = -1, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$0{,}5^{\sin^2 x - \sin^4 x + \sin^6 x - \ldots} = \sqrt[15]{0{,}25^{2\cos^2 x}}.$$

4. Найти множество точек плоскости (показать штриховкой), координаты которых удовлетворяют зависимости

$$|x + y| + |x - y| \geqslant 2.$$

5. Найти все a из промежутка $[5; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2 + 2ax - 5x + a - 11 = 0$$

принимает наибольшее значение.

Вариант 3.1

1. Решить уравнение

$$7^{x-5}=\sqrt{7}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_2(x+1)}{x-1}>0.$$

3. Стороны параллелограмма равны 3 и 2, а отношение длин его диагоналей равно $\sqrt{\frac{7}{19}}$. Найти острый угол параллелограмма.

4. Используя производную, доказать, что при $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\sin(2x)-\sqrt{3}\cos^2 x<x-\frac{\pi}{3}.$$

5. Найти все пары чисел $(x;y)$, для каждой из которых выполняется равенство

$$4\left(3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\frac{x+y}{2}+2\cos(x+y)\right)=13+4\cos^2(x+y).$$

Вариант 3.2

1. Решить уравнение

$$4^{3-x}=2.$$

2. Решить неравенство

$$(x-3)\log_{1/7}(x+8)\geqslant 0.$$

3. Угол при вершине A треугольника ABC равен $\frac{\pi}{3}$. Найти угол между медианой AM и основанием BC этого треугольника, если его стороны равны $AB=\sqrt{5-\sqrt{21}}$, $AC=\sqrt{2}$.

4. Используя производную, доказать, что при $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$6x-\pi>-3\sin(2x)-6\sqrt{3}\cos^2 x.$$

5. Найти все пары чисел $(x;y)$, для каждой из которых выполняется равенство

$$\sqrt{3+2x-x^2}\sin^2(2x+y)+\cos(4x+2y)=1+\frac{\cos^2(4x+2y)}{2}.$$

Вариант 3.3

1. Решить уравнение

$$6^{x+1}=\frac{1}{36}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3-x}}{\log_{0,5}(x^2-1)^2} \geqslant 0.$$

3. В треугольнике угол при одной из вершин равен $\frac{\pi}{4}$, отношение боковых сторон, прилежащих к этой вершине, равно $\sqrt{4+\sqrt{15}}$. Найти угол между основанием и медианой, проведённой из вершины.

4. Используя производную, доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ выполняется неравенство

$$\cos(2x) - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -2x.$$

5. Найти все пары чисел $(x; y)$, для каждой из которых выполняется равенство

$$2\sqrt{3-2x-x^2}\cos^2\frac{x+3y}{2} + \sin^2(x+3y) = 3 + 2\cos(x+3y).$$

Вариант 4.1

1. Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 - x - 12$ образует угол в 45° градусов с осью Ox, записать уравнение этой касательной.

2. Решить уравнение

$$\frac{3^{2x}}{100^x} = 2\cdot(0{,}3)^x + 3.$$

3. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 9, а разность между четвёртым и вторым членами равна 0,4. Найти первый член прогрессии.

4. Решить неравенство

$$(4x - x^2 - 3)\cdot\log_2\left(\cos^2(\pi x) + 1\right) \geqslant 1.$$

5. Найти множество всех пар $(a; b)$, для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

Вариант 4.2

1. Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 + 3x - 10$ образует угол в 135° градусов с осью Ox, записать уравнение этой касательной.

2. Решить уравнение

$$\frac{9}{2^{x-2}} = \frac{10 + 4^{x/2}}{4}.$$

3. Сумма третьего и четвёртого членов арифметической прогрессии равна $\frac{5}{12}$. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

4. Решить неравенство

$$(-6x + x^2 + 10) \cdot \log_5 \left(\sin^2(\pi x) + 5\right) \leqslant 1.$$

5. Найти множество всех пар $(a; b)$, для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a \cos x + b = \cos(ax + b).$$

Вариант 4.3

1. В каких точках угловой коэффициент касательных к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3? Запишите уравнения этих касательных.

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9.$$

3. В арифметической прогрессии пятый член больше третьего на 3, а их сумма равна 10. Найти второй член прогрессии.

4. Решить неравенство

$$(4x - x^2) \cdot \log_2 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{4} + 1\right) \geqslant 4.$$

5. Найти множество всех пар $(a; b)$, для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$ae^x + b = e^{ax+b}.$$

Вариант 5.1

1. Решить неравенство

$$x^2 + 6 > 5x.$$

2. Решить уравнение

$$0{,}25 \log_2^2 x^2 + 2 \log_2 \sqrt{x} - 2 = 0.$$

3. В каком соотношении находятся коэффициенты p и q уравнения $x^2 + px + q = 0$, если один корень в два раза больше другого?

4. Площадь треугольника ABC равна S, а основание $AB = a$. Какую форму должен иметь треугольник, чтобы сумма $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$ была наименьшей? (h_1, h_2, h_3 — длины высот треугольника).

5. Найти все значения параметра a, для которых решения системы уравнений

$$\begin{cases} (6x^3 - 37x^2 + 5x + 6) \cdot (\sqrt[4]{12x - x^2 - 34} - 1) = 0, \\ y = a(x^2 - 12x + 35) \end{cases}$$

задают на плоскости xOy вершины тупоугольного треугольника.

Вариант 5.2

1. Решить неравенство

$$4x - 3 > x^2.$$

2. Решить уравнение

$$\log_3^2(9x^2) = \log_3 81.$$

3. Корни x_1 и x_2 уравнения $3x^2 + ax - 2 = 0$ таковы, что ${x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{13}{9}$. Найти a.

4. В фигуру, ограниченную линиями $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 6$ вписан параллелограмм наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой $x = 6$, а две другие на параболах $y = x^2$ и $y = 2x^2$. Найти эту площадь.

5. Найти все значения параметра a, для которых решения системы уравнений

$$\begin{cases} (2x^3 - 5x^2 - 37x + 60) \cdot \log_5(x - x^2 + 3) = 0, \\ y = a(x^2 - x + 2) \end{cases}$$

задают на плоскости xOy вершины тупоугольного треугольника.

Вариант 5.3

1. Решить неравенство

$$x^2 > 6 - x.$$

2. Решить уравнение

$$4\log_{16}^2 x - \log_4 x - 6 = 0.$$

3. При каких значениях k уравнение $2x^2 - (k+1)x + k + 3 = 0$ имеет корни, разность которых равна 1?

4. Какую форму должен иметь треугольник ABC, площадь которого равна S, а длина стороны AB равна a, чтобы радиус полуокружности, которая касается AC и BC, и центр которой лежит на стороне AB, был наибольшим?

5.Найти все значения параметра a, для которых решения системы уравнений

$$\begin{cases} (3x^3 - 4x^2 - 35x + 12) \cdot \log_3(-x - x^2 + 3) = 0, \\ y = a(x^2 + x - 2) \end{cases}$$

задают на плоскости xOy вершины остроугольного треугольника.

3.2. Экзаменационные билеты 1998 г.

Вариант 6.1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2x^2 - 3y^2 = -10. \end{cases}$$

2. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{5^{2x-5} - 2 \cdot 5^{x-1} - 3} + \frac{1}{x-3}.$$

3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагональ AC является биссектрисой угла A и делит трапецию на два подобных треугольника: ABC и ACD. $|AB| = 9$ см, $|CD| = 12$ см. Найти периметр трапеции.

4. Решить уравнение

$$\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{3}.$$

5. Какое наименьшее значение может приобретать выражение $2x + y - z$, если $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$? Указать значения переменных, для которых это значение достигается.

Вариант 6.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 20, \\ a^2 - 4b^2 = 0. \end{cases}$$

2. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{x} \cdot \log_2 \left(2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} - 81\right).$$

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$. Площадь трапеции равна S, $\angle BDA = \alpha$. Найти высоту трапеции.

4. Решить уравнение

$$\arccos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{arctg}(x - 1).$$

5. Какое наименьшее значение может приобретать выражение $2a - b + c$, если $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$? Указать значения переменных, для которых это значение достигается.

Вариант 6.3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = 7, \\ 2x^3 - y^2 = 15. \end{cases}$$

2. Найти область определения функции

$$y = \log_2(x+1) \cdot \sqrt{7 - 5 \cdot 3^x + \frac{3456}{3^x}}.$$

3. В ромб со стороной a и острым углом 60° вписан прямоугольник так, что его бо́льшая сторона параллельна большей диагонали ромба. Найти площадь прямоугольника, если его стороны относятся как $1:2$.

4. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}(x+3) - \operatorname{arctg}(x+2) = \frac{\pi}{4}.$$

5. Какое наименьшее значение может приобретать выражение $p+q-2r$, если $3p^2 + q^2 + r^2 = 4$? Указать значения переменных, для которых это значение достигается.

Вариант 7.1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{9-5x}{3-8x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{3/2}(3x-2) - \log_{3/2} 56 < \log_{3/2}\frac{1}{2} - \log_{3/2} 7.$$

3. Упростить выражение

$$C = \sqrt{\frac{(x^2-3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2 - 8x}.$$

4. Прямоугольный сектор радиусом R разделён на две части дугой круга того же радиуса с центром в конце дуги сектора. Найти радиус круга, вписанного в меньшую из этих частей.

5. Найти все значения параметра a, при которых наибольшее значение выражения

$$2\sin^2(2x) + \left(5 + \sqrt{a+1}\right) \cdot \cos(2x) - a\sqrt{3}$$

больше, чем 5.

Вариант 7.2

1. Решить уравнение
$$\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

2. Решить неравенство
$$\log_{0,7}(3-2x)-\log_{0,7}54>\log_{0,7}\frac{1}{2}-\log_{0,7}9.$$

3. Упростить выражение
$$D=\left|\frac{|x-2|+4}{x-2}\right|\cdot(x^2-4).$$

4. Около квадрата со стороной a описан круг, затем в один из полученных сегментов вписан квадрат. Определить сторону вписанного квадрата.

5. Найти все значения параметра n, при которых наименьшее значение выражения
$$\bigl(5+\sqrt{1-n}\bigr)\cdot\sin(2x)-\cos^2(2x)+n\sqrt{3}$$
больше, чем -5.

Вариант 7.3

1. Решить уравнение
$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt{\frac{18}{2}}.$$

2. Решить неравенство
$$\log_{1/3}(5x-7)-\log_{1/3}5>\log_{1/3}16-\log_{1/3}10.$$

3. Упростить выражение
$$E=\bigl|x^2-1\bigr|+x\cdot|x+1|.$$

4. Катеты треугольника равны 3 см и 4 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведён круг, касательный к гипотенузе. Найти площадь этого круга.

5. Найти все значения параметра n, при которых наименьшее значение выражения
$$\bigl(3+\sqrt{2-3n}\bigr)\cdot\sin(5x)-\cos^2(5x)+n$$
больше, чем -3.

Вариант 8.1

1. Решить уравнение
$$\sqrt[4]{x-5}\leqslant 2.$$

2. Средняя линия трапеции равна 10 см и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найти длины оснований этой трапеции.

3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $a_2 = 2$, а a_3, a_4 и a_6 образуют арифметическую прогрессию.

4. Решить уравнение

$$\left(\cos^2 x + \cos^{-2} x\right) \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2(2y)\right) \cdot (3 + \sin(3z)) = 4.$$

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$$

имеет решение.

Вариант 8.2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2 - x} > 5.$$

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины боковой стороны AB и меньшего основания BC равны 2 см; $BD \perp AB$. Вычислить площадь этой трапеции.

3. Второй, четвёртый и пятый члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой первый член равен 2, совпадают соответственно со вторым, четвёртым и шестым членами некоторой арифметической прогрессии. Найти третий член арифметической прогрессии.

4. Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x) \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 y\right) \cdot (1 + \sin(4z)) = 2\sqrt{2}.$$

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{2a + \sqrt{2a + 2x - x^2}} = 2x - x^2$$

имеет решение.

Вариант 8.3

1. Решить уравнение

$$\sqrt[6]{2x - 3} \leqslant 1.$$

2. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника больше другого катета на 10 см и меньше длины гипотенузы на 10 см. Найти площадь этого треугольника.

3. Третий, четвёртый и шестой члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой первый член равен 4, образуют арифметическую прогрессию. Найти второй член геометрической прогрессии.

4. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) \cdot \left(\sin y + \sqrt{3}\cos y\right) \cdot (1 + \cos(5z)) = 8.$$

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{1 + a + \sqrt{a + 2\cos^2 x}} = \cos(2x)$$

имеет решение.

Вариант 9.1

1. В треугольнике один из внутренних углов равен 30°, а второй угол больше третьего в 2 раза. Найти эти углы.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin(2x) - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos(2x)}.$$

3. Используя производную, доказать, что при $x < \frac{2}{3}$ выполняется неравенство

$$\sqrt[3]{(2x-1)\cdot(1-x)^2} < \frac{1}{3}.$$

4. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{24 + 7x - 5x^2} + \operatorname{tg} x}{3^{x^2 - x} - 9}.$$

5. При каком b система неравенств

$$\begin{cases} by^2 + 4by - 2x + 7b + 4 \leqslant 0, \\ bx^2 - 2y - 2bx + 4b - 2 \leqslant 0 \end{cases}$$

будет иметь единственное решение?

Вариант 9.2

1. В треугольнике сумма двух равных углов больше третьего на 10°. Найти больший угол.

2. Решить уравнение

$$2\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x = \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2 + \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}}.$$

3. Используя производную, доказать, что при $x < 2$ выполняется неравенство

$$\sqrt[3]{(2x-3)\cdot(3-x)^2} < 1.$$

4. Найти область определения функции

$$y = \frac{\operatorname{ctg} x + \sqrt{32 + 6x - 5x^2}}{125 - 5^{x^2 - 2x}}.$$

5. При каком a система неравенств

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 2 \geqslant 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

будет иметь единственное решение?

Вариант 9.3

1. В треугольнике сумма двух равных углов в 1,5 раза больше третьего. Найти больший угол.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin(2x)}{2} - \sin^2 x = \sqrt{1 - \cos(2x)}.$$

3. Используя производную, доказать, что при $x < \frac{14}{3}$ выполняется неравенство

$$3\sqrt[3]{(2x-7)\cdot(7-x)^2} < 7.$$

4. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{(4 - 2^{x^2+3x-8})\cdot \sin^2(2x)} + \operatorname{tg} x.$$

5. При каком a система неравенств

$$\begin{cases} 4ax^2 + 8ax - y + 7a + 2 \geqslant 0, \\ ay^2 - 2x - 2ay + 4a - 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

будет иметь единственное решение?

Вариант 10.1

1. Решить уравнение

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Доказать, что функция

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 60$$

возрастает на всей числовой оси.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ 3^{\log_{\sqrt{3}} x} - 5^{-2\log_{0,2} y} = 5. \end{cases}$$

4. В выпуклом четырёхугольнике, площадь которого равна S, проведены диагонали, разбивающие четырёхугольник на треугольники. Площади двух треугольников, прилежащих к противоположным сторонам, равны P и Q. Найти площади двух других треугольников.

5. При каких значениях параметра b неравенство

$$\sqrt{\left(\sqrt{b^2}-x^2\right)\cdot(|b|+x^2)}>x-b$$

имеет ровно 2 целочисленных решения?

Вариант 10.2

1. Решить уравнение

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Доказать, что функция

$$f(x)=42-2x^3+3x^2-6x.$$

убывает на всей числовой оси.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12, \\ 2^{-\log_2 x}+5^{\log_5 \frac{1}{y}}=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

4. В прямоугольном треугольнике отношение произведения длин биссектрис внутренних острых углов к квадрату длины гипотенузы равно $\frac{1}{2}$. Найти острые углы треугольника.

5. При каких значениях параметра b неравенство

$$\sqrt{25b^2-x^4}>-x+5b$$

имеет ровно 2 целочисленных решения?

Вариант 10.3

1. Решить уравнение

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Доказать, что функция

$$f(x)=2x^3-9x^2+30x-53$$

возрастает на всей числовой оси.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10^{\lg\left(0{,}5(x^2+y^2)\right)+1{,}5}=100\sqrt{10}, \\ \frac{\sqrt{x^2+10y}}{3}=\frac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}. \end{cases}$$

4. Внутри угла величины α с вершиной в точке O взята точка A. Расстояние от точки A до одной из сторон угла равно a, а проекция OA на другую его сторону равна b. Найти $|OA|$.

5. При каких отрицательных значениях параметра b неравенство

$$\sqrt{(b-x^2)\cdot(b+x^2)} > x-b$$

имеет ровно 2 целочисленных решения?

3.3. Экзаменационные билеты 1999 г.

Вариант 11.1

1. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$3+2\log_x 3 = 2\log_3 x.$$

3. Определить углы прямоугольного треугольника, в котором отношение радиуса вписанного к радиусу описанного круга имеет наибольшее значение.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{x+1}+1 \geqslant \sqrt{3x}+2x.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0, \\ 2x^2 - y^2 - xy + 2x + y = 10. \end{cases}$$

Вариант 11.2

1. Решить неравенство

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$$

3. В треугольнике ABC даны угол A, противолежащая ему сторона a и отношение двух других сторон: $\frac{b}{c} = k \neq 1$. Найти b, c и угол B.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{5-x}+4 \geqslant \sqrt{7x+1}+8x.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{tg}^2 \pi y = 0, \\ 2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y = 21. \end{cases}$$

Вариант 11.3

1. Решить неравенство

$$\frac{x+1}{x^2-2x} \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_3(27x) = 10\log_x 3.$$

3. В треугольнике ABC даны площадь S, радиус вписанного круга r и угол A. Найти сторону BC и остальные углы треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{4-5x}-4 > \sqrt{6x+8}+11x.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(\frac{\pi x}{2}) + \sin^2(\frac{\pi y}{2}) = 0, \\ 2x^2 - 2y^2 + 3xy - 2x + y = 10. \end{cases}$$

Вариант 12.1

1. Хорда делит окружность в отношении $5:7$. Найти вписанный угол (в градусах), опирающийся на меньшую из дуг, стягиваемых этой хордой.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin(2x) + \cos(5x) + \sin\left(\frac{7\pi}{2} - 9x\right) = 0.$$

3. При каких значениях a корни уравнения

$$(a+2)x^2 - ax - a = 0$$

симметричны относительно точки $x=1$? Найти эти корни, не решая уравнения.

4. Найти область определения функции

$$F(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{\sqrt{\arcsin(2^x-1)}}.$$

5. Найти все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющие неравенству
$\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2) > z^2-9z+17.$

Вариант 12.2

1. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 10, а центральный угол содержит 100°.

2. Решить уравнение
$$\cos(7x) + \sin(8x) = \cos(3x) - \sin(2x).$$

3. При каких значениях a сумма корней уравнения
$$x^2 + 2a(x-1) - 1 = 0$$
будет равна сумме квадратов его корней?

4. Найти область определения функции
$$F(x) = \operatorname{ctg}(\pi x) + \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{x}{2} - 3\right)}.$$

5. Найти все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющие неравенству
$$\log_3(x - y + z - 1) + \log_3(2x + y - 9z + 2) - \log_3(8z - 3x + 2) > z^2 - 4z + 1.$$

Вариант 12.3

1. Определить площадь сектора, если диаметр круга равен 12, а центральный угол сектора равен 137°.

2. Решить уравнение
$$\sin(3x) + \sin(5x) = 2\left(\cos^2(2x) - \sin^2(3x)\right).$$

3. При каком значении a разность корней уравнения
$$2x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0$$
равна их произведению?

4. Найти область определения функции
$$F(x) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{3} - \arccos\left(2^{x/2}\right)}}{\cos(\pi x)}.$$

5. Найти все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющие неравенству
$$\log_3(3x + y + 2z - 1) - \log_3(x - 2y + 2) + \log_3(y - 4x - 2z + 2) > z^2 + 5z + 1.$$

Вариант 13.1

1. Вычислить $2\sin 3\alpha \sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$.

2. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 7.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1.$$

4. Решить уравнение

$$5^{\log_5{}^2 x} + x^{\log_5 x} = 10.$$

5. При каких значениях a все решения неравенства $|x|+|2y| \leqslant 4$ являются также решениями неравенства $x^2 + y^2 - 2x - 2y \leqslant a^2 - 2$?

Вариант 13.2

1. Вычислить $2\cos 3\alpha \cos 4\alpha - \cos 7\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,8}$.

2. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x - 23.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$2^{\log_{0,5}{}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} = 2,5.$$

5. При каких значениях a все решения неравенства $x^2 + y^2 - 2(x+y) \leqslant 2$ являются также решениями неравенства $|2x| + |y| \leqslant a$?

Вариант 13.3

1. Вычислить $2\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{0,6}$.

2. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 12x - 35.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geqslant 1.$$

4. Решить уравнение

$$3^{\log_3{}^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

5. При каком наибольшем значении параметра a система

$$\begin{cases} |x| + |3y| = 6, \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = a^2 - 5 \end{cases}$$

имеет решения?

Вариант 14.1

1. Диагональ ромба, лежащая напротив угла $60°$, равна $11,2$. Найти периметр ромба.

2. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_3(2x-3) = \log_{\frac{1}{9}}(2x-3).$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{3} - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - 5 = 0.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{\arcsin 1/2} \left(\sqrt{3x+1} - x\right) \leqslant 0.$$

5. Найти наименьшее значение выражения $x + 5y$, если

$$x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leqslant 0$$

и x, y положительны.

Вариант 14.2

1. В прямоугольнике меньшая сторона равна $17\sqrt{3}/2$ и вдвое меньше диагонали. Найти большую сторону прямоугольника.

2. Решить уравнение

$$\log_2 (x-1)^2 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4x-4) + \log_{\sqrt{2}} 16.$$

3. Решить уравнение

$$9 \arccos^2 2x - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{\operatorname{ctg} 9/2} \left(1 + x - \sqrt{x^2-4}\right) \leqslant 0.$$

5. Найти наибольшее значение выражения $x + 3y$, если

$$x^2 + xy + 4y^2 \leqslant 3.$$

Вариант 14.3

1. Найти площадь квадрата, диагональ которого равна $2\sqrt{17}$.

2. Решить уравнение

$$\log_9(x+1) + \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{x+1} = \log_{\frac{1}{9}} 27.$$

3. Решить уравнение

$$2 \arcsin^2 x - 5 \arcsin x - 12 = 0.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{\sin 3}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right) < 0.$$

5. Найти наибольшее значение выражения $x+2y$, если

$$x^2+3xy+7y^2 \leqslant 1.$$

Вариант 15.1

1. Решить уравнение $\log_2^2 x = \frac{1}{4}$.
2. Решить неравенство

$$\sqrt{1+2x} \leqslant \sqrt[4]{5+2x}.$$

3. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 3 и 10. Найти больший катет.
4. Доказать, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то уравнение

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

не имеет корней.
5. Найти целочисленные решения уравнения

$$(p^2+9q^2)(p+q-7)=6pq.$$

Вариант 15.2

1. Решить уравнение $\log_3^2 x = 9$.
2. Решить неравенство

$$\sqrt{1+x} \leqslant \sqrt[4]{5+x}.$$

3. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найти радиус окружности, если её центр лежит на гипотенузе, а длины катетов равны 3 и $2\sqrt{10}$.
4. При каких значениях a уравнение

$$ax^2+2(a-6)x+a=0$$

имеет два положительных неравных корня?
5. Найти целочисленные решения уравнения

$$(p^2+q^2)(p+q-5)=2pq.$$

Вариант 15.3

1. Решить уравнение $\log_2^2 x = 4$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x} \leqslant \sqrt[4]{5-x}.$$

3. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3, а меньший катет равен 10.

4. Найти все значения k, при которых корни уравнения

$$kx^2 - 2(k+1)x + k + 2 = 0$$

имеют разные знаки.

5. Найти целочисленные решения уравнения

$$(m^2+n^2)(m+n-3) = 2mn.$$

3.4. Экзаменационные билеты 2000 г.

Вариант 16.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. Решить уравнение

$$\left(x^2-8\right)^2 + 4(x^2-8) - 5 = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin x \sin y = 3, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/\sqrt{3}}(12 - x^2) < -2.$$

4. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 8 и боковой стороной 6, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка касательной, заключённого между сторонами треугольника.

5. При каком значении a функция

$$F(x) = \sqrt{a - \frac{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}}{x^2+9}}$$

определена на отрезке $[0;4]$?

Вариант 16.2

1. Решить уравнение

$$\left(x^2+6x\right)^2 + 8(x^2+6x) - 9 = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(3x - x^2) < -1.$$

4. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 16 и боковой стороной 17, проведена касательная, параллельная высоте треугольника. Найти длину отрезка касательной, заключённой между сторонами треугольника.

5. При каких $a > 0$ функция

$$F(x) = \sqrt{2x^3 - \frac{27}{2}ax^2 + 12a^2x + 14}$$

определена на отрезке $[0; 2a]$?

Вариант 16.3

1. Решить уравнение

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/4}(5x - x^2) < -1.$$

4. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 15,5, проведена касательная, параллельная основанию треугольника. Найти длину боковой стороны, если отрезок касательной, заключённый между сторонами треугольника, равен 10,5.

5. При каких $a > 0$ функция

$$F(x) = \sqrt[4]{13 - x^4 + 2a^2x^2 - 5a^4}$$

определена на отрезке $[-2a; 2a]$?

Вариант 17.1 (Экзамен в подшефных школах)

1. Решить уравнение

$$\frac{5x^2 - 7x + 2}{4x^2 + x - 5} = \frac{(4x-5)^2}{16x^2 - 25}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{x+2}(x-2) < 1.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = |x+2|(x+5)$$

на отрезке $[-4; 0]$. Сделать рисунок.

4. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Основание пирамиды — треугольник со сторонами $\sqrt{3}$, 2 и 3. Найти объём пирамиды.

5. Существуют ли такие a, что корни уравнения

$$x^2 + 2x + a = 0$$

действительны, различны и $-1 < x_1, x_2 < 1$?

Вариант 17.2

1. Решить уравнение

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 - x - 10} = \frac{(2x+5)^2}{4x^2 - 25}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38, \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$(x+1)^{x^2-1} < 1.$$

4. Числа x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 - 2^{k+1}x + 2k + 1 = 0.$$

При каком значении параметра k сумма $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ принимает наименьшее положительное значение?

5. В шар радиуса R вписывается прямой круговой конус с углом при вершине 2α. В конус вписывается шар, в который опять вписывается конус и так далее. Найти объём 17-го конуса.

Вариант 17.3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{|3x-9|} = x + 3.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$(x-2)^{x^2-1} < 1.$$

4. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x - 5\sin^2 x\cos^2 x > a^2 - 2$$

выполняется для любого x.

5. В правильный шестиугольник со стороной 2 вписан круг, в этот круг вписан квадрат, в квадрат вписан круг, а в него правильный шестиугольник. Далее процесс повторяется. Найти сторону 100-го шестиугольника.

Вариант 18.1

1. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если первый член прогрессии равен 0,2, а второй член прогрессии равен 0,5.

2. В треугольнике два угла равны 105° и 45°, а площадь равна $(\sqrt{3}+1)$ см^2. Найти длину наименьшей высоты треугольника.

3. Найти область определения функции

$$Y = \arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right) - \ln(4-x).$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{-6x-4x^2} < 4 + 2x.$$

5. При каких a уравнение

$$(5\cdot 2^a)^x + 5^{\sqrt{x}}2^{ax} - 5\cdot 2^{ax+1} + 30 = 3(5^x + 5^{\sqrt{x}})$$

имеет ровно одно решение?

Вариант 18.2

1. Найти разность арифметической прогрессии, если первый член прогрессии равен -2, а сумма первых 8 членов прогрессии равна 12.

2. Длина диагонали ромба в четыре раза больше расстояния от точки пересечения его диагоналей до стороны. Найти площадь ромба, если длина стороны равна 2 см.

3. Найти область определения функции

$$Y = \sqrt{3-x} + \arcsin\left(\frac{3-2x}{5}\right).$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{3x-x^2} < 4 - x.$$

5. При каких неотрицательных a уравнение

$$2ax^2\ln x - 3ax\ln x - 3x = 2ax\ln x - x - 5$$

имеет ровно одно решение?

Вариант 18.3

1. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если первый член прогрессии равен 0,5, а десятый член прогрессии равен 12.

2. В прямоугольном треугольнике ACB (угол C прямой) $CE \perp AB$, CD — медиана, $AB = 4$ см, $ED = \sqrt{3}$ см. Найти углы треугольника.

3. Найти область определения функции

$$Y = \arccos\left(\frac{2x-1}{3}\right) + \lg(3-4x).$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{9x - 9x^2} < 4 - 3x.$$

5. При каких a уравнение

$$x\left(a2^{\sqrt{4x}} - 2^{1+\sqrt{x}}\right) = a\cdot 2^{4+\sqrt{x}} + 3x\cdot 2^{\sqrt{x}} - 80$$

имеет ровно одно решение?

Вариант 19.1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - 3x - 7 = 0, \\ x^2 + xy + 3 = 0. \end{cases}$$

2. Внутренние углы выпуклого четырёхугольника относятся между собой как $2 : 2,5 : 9,5 : 10$. Найти меньший угол.

3. Найти область определения функции

$$F(x) = \log_{x+3}\left(2^{2x} - \frac{11}{3}\cdot 6^x + 2\cdot 3^{2x}\right).$$

4. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2}) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

5. Указать такие значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{3}\sin\left(2^{-2x-x^2+1}\right) = a + 2\cos^2\left(2^{-(x^2+2x)}\right)$$

не имеет решения.

Вариант 19.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 8 = 0, \\ y^2 - x^2 - 16 = 0. \end{cases}$$

2. Определить меньший угол выпуклого пятиугольника, если величины углов относятся как $1 : 3,5 : 2 : 2,5 : 3$.

3. Найти область определения функции

$$F(x) = \log_{x-12}\left(0,2^{\lg x} - 5 \cdot 0,04^{\lg^2 x}\right).$$

4. Доказать тождество

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = a + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 19.3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 3 = 0, \\ 2x^2 + xy - 14 = 0. \end{cases}$$

2. В выпуклом пятиугольнике два угла прямые, а оставшиеся относятся между собой как $3 : 4 : 5$. Найти больший угол.

3. Найти область определения функции

$$F(x) = \log_{|x-5|}\left(0,64^{2-\log_{\sqrt{2}} x} - 1,25^{8-\log_2{}^2 x}\right).$$

4. Доказать тождество

$$\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Найти такие значения параметра b, при которых уравнение

$$\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right) + b = \frac{\sin^2\left(2^{2x-x^2}\right)}{\sin(120^\circ)}$$

имеет ровно четыре решения.

Вариант 20.1

1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{\log_2(\pi)} + \frac{1}{\log_5(\pi)} > 2.$$

2. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найти радиус окружности, если её центр лежит на гипотенузе, длина которой равна $(1+\sqrt{2})/4$.

3. Решить уравнение

$$2\sin^2 2x - 5\sin 2x + 2 = 0.$$

4. При каком c значения функции $f(1)$, $f(a)$, $f(b)$ составляют геометрическую прогрессию, если a и b являются точками экстремума функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c$, $(a < b)$?

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2+6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0,$$

не менее 1.

Вариант 20.2

1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{\log_3(\pi)} + \frac{1}{\log_7(\pi)} < 3.$$

2. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3, а меньший катет равен 10.

3. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0.$$

4. Доказать, что если $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$n^2 = (nk)^{\log_k m}.$$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$(x^2 + (2a^2+3)x - a^2 - a - 1)(x^2 + (a^2 + 5a - 5)x - a^2 - a - 1) < 0,$$

не менее 2.

Вариант 20.3

1. Доказать неравенство

$$\log_3(\pi) + 4\log_\pi 3 > 4.$$

2. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2. Один из катетов равен 14. Найти гипотенузу.

3. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0.$$

4. Четыре целых различных числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Большее из этих чисел равно сумме квадратов остальных трёх чисел. Найдите эти числа.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + 2(a^2 - 2a + 4)x - a^2 + 4a - 6}{x^2 + (a^2 + 5a - 13)x - a^2 + 4a - 6} < 0,$$

не менее 1.

3.5. Экзаменационные билеты 2001 г.

Вариант 21.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = 2\cos x + 1$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$$

имеет корни, определить знаки корней в зависимости от a.

3. Радиусы двух окружностей, имеющих внешнее касание, равны R и r. Найти длину их общей касательной.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2(x+y)^2 - y^2 = 14. \end{cases}$$

5. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{\ln(2)m^2}{\ln(10)} + 2nm - \frac{3\ln(2)m}{\ln(10)} - 6n - \frac{\sqrt{3}n\ln(2)m}{\ln(10)} - 2\sqrt{3}n^2 = 0.$$

Вариант 21.2

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = 3 - 2\sin x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$$

имеет корни, определить знаки корней в зависимости от a.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c. Найти радиусы описанной и вписанной окружностей.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 2xy + 15 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 21. \end{cases}$$

5. Решить в целых числах уравнение

$$m^2 + m\sqrt{2}n + m\sqrt{2} - \sqrt{3}nm - \sqrt{3}n^2\sqrt{2} - \sqrt{3}n\sqrt{2} = 0.$$

Вариант 21.3

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = 4\operatorname{tg} x - 2$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{4}$.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$3ax^2 - 2(3a-2)x + 3(a-1) = 0$$

имеет корни, определить знаки корней в зависимости от a.

3. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит её на отрезки, разность между которыми равна 20 см. Найти стороны треугольника, если отношение катетов равно $\frac{3}{2}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17, \\ -x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

5. Решить в целых числах уравнение

$$2m^2 + \frac{m\ln(2)n}{\ln(3)} - 2m - \frac{\ln(2)n}{\ln(3)} - 2\sqrt{3}nm - \frac{\sqrt{3}n^2\ln(2)}{\ln(3)} = 0.$$

Вариант 22.1 (Экзамен в подшефной школе)

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x+2}{x^2}} 7 > \log_{\frac{x+2}{x^2}} 3.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2 - \sqrt{3 + x}} < \sqrt{4 + x}.$$

4. Длины боковых сторон трапеции равны 9 см и 12 см, а длины оснований равны 30 см и 15 см. Найти угол, который образуют продолжения боковых сторон трапеции.

5. Решить уравнение

$$\log_2(3 + 2x - x^2) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

Вариант 22.2

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} < \sqrt{4 - x}.$$

4. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание, $\angle D = 60^\circ$. Биссектрисы углов C и D пересекаются в точке O, $OD = a$, $BC = b$, $AD = c$. Найти площадь трапеции.

5. Решить уравнение

$$\cos^2(x + 1) \cdot \log_4(3 - 2x - x^2) = 1.$$

Вариант 22.3

1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{x+5}} 11 < \log_{\sqrt{x+5}} 9.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0,25, \\ x + y = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2-\sqrt{3-2x}} < \sqrt{4-2x}.$$

4. В некоторой трапеции один из углов прямой, а другой равен 30°. Бо́льшая боковая сторона трапеции равна 12 см. Найти площадь трапеции, если известно, что в неё можно вписать окружность.

5. Решить уравнение

$$10^{x^2-4x+2} = \frac{1}{25}\left(\sin\frac{\pi x}{12} - \sin^2\frac{\pi x}{12}\right).$$

Вариант 23.1 (Экзамен в подшефной школе)

1. Решить уравнение

$$5^x - 3^{x+1} = 2\left(5^{x-1} - 3^{x-2}\right).$$

2. В точке $M(1;8)$ к графику функции $y = \sqrt{\left(5 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$ проведена касательная. Найти длину её отрезка, заключённого между осями координат.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18, \\ xy + x^2 + y^2 = 19. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$4\cos x - \sin 2x > 0.$$

5. Решить неравенство

$$2\left(\sqrt{1-|x|}\right)^2 - x > a$$

при всех a.

Вариант 23.2

1. Решить уравнение

$$2^{x+3} - 5^x = 7\cdot 2^{x-2} - 3\cdot 5^{x-1}.$$

2. К гиперболе $y = \frac{4}{x}$ проведены две касательные: одна в точке $(2;2)$, а другая — параллельно прямой $y = -4x$. Найти площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18, \\ xy + x^2 + y^2 = 12. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$3\sin x + \sin 2x < 0.$$

5. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{1-2|x|}\right)^2 - x > a$$

при всех a.

Вариант 23.3

1. Решить уравнение

$$5^x - 4^x = 5^{x-1} + 2^{2x-2}.$$

2. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 91, \\ x + y + \sqrt{xy} = 13. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$3\operatorname{tg} x > 2\operatorname{tg}^2 x.$$

5. Решить неравенство

$$2a + \left(\sqrt{1-\sqrt{x^2}}\right)^2 > \frac{x}{2}$$

при всех a.

Вариант 24.1

1. Найти область определения функции

$$Y = \sqrt{6 - \frac{4x+3}{2x-5}}.$$

2. Решить уравнение

$$9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0.$$

3. Найти $\alpha - \beta$, если

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{3}, \quad \pi < \alpha < 1,5\pi, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

4. При каких значениях a сумма кубов корней уравнения

$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 - a + 3 = 0$$

будет наименьшей?

5. Найти площадь фигуры, заданной на плоскости $(x; y)$ неравенством

$$\log_{(x^2+y^2)}(x+y) > 1.$$

Вариант 24.2

1. Найти область определения функции

$$Y = \sqrt{\frac{6-5x}{x+6} - 1}.$$

2. Решить уравнение

$$25^x + 175 \cdot 5^{x-2} - 60 = 0.$$

3. Найти $\alpha + \beta$, если

$$\operatorname{ctg}\alpha = 0,75, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}.$$

4. При каком значении параметра k сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + e^k x - k^2 + k = 0$$

будет наименьшей?

5. Найти площадь фигуры, заданной на плоскости $(x; y)$ неравенством

$$\log_{(x^2+y^2-2x+1)}(x+y-1) > 1.$$

Вариант 24.3

1. Найти область определения функции

$$Y = \sqrt{2 - \frac{5x+8}{4-x}}.$$

2. Решить уравнение

$$4^{x+2} + 30 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0.$$

3. Найти $\alpha + \beta$, если

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{tg}\beta = 7, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2}.$$

4. При каких значениях параметра a сумма кубов корней уравнения

$$6x^2 + 6(a-1)x - 5a + 2a^2 = 0$$

будет наименьшей, а при каких наибольшей?

5. Найти площадь фигуры, заданной на плоскости $(x; y)$ неравенством

$$\log_{(x^2+y^2)}(y-x) > 1.$$

Вариант 25.1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1. \end{cases}$$

2. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии, все члены которой больше нуля, равна 221. Третий член этой прогрессии больше первого на 136. Найти сумму шести членов данной прогрессии.

3. Большее основание трапеции равно 6 см, а меньшее 4 см. Углы при большем основании равны 30° и 45°. Найти площадь трапеции.

4. Представить выражение $x^4 + 2x^2 + 9$ в виде произведения двух приведённых квадратных трёхчленов.

5. Решить уравнение

$$2\sin\left(\frac{\pi x^2}{x^4+4}\right) = 2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 + \sqrt{2}.$$

Вариант 25.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1. \end{cases}$$

2. В геометрической прогрессии $b_1 + b_3 + b_5 = 182$, а $b_2 + b_4 + b_6 = 546$. Сумма какого числа членов этой прогрессии равна 242?

3. Высоты параллелограмма равны 6 см и 7,8 см, а его площадь 78 см^2. Найти длину его меньшей диагонали.

4. Представить выражение $x^4 + 3x^2 + 4$ в виде произведения двух приведённых квадратных трёхчленов.

5. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{x^2+4}\right) + x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Вариант 25.3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = \frac{73}{9}, \\ 2^x \cdot 3^y = \frac{8}{9}. \end{cases}$$

2. Найти геометрическую прогрессию $u_1, u_2, u_3, \ldots$ если известно, что $u_3 - u_1 = 9$, $u_5 - u_3 = 36$.

3. Треугольник ABC прямоугольный (угол C прямой), $P \in AC$ и $K \in \in AB$, причём $PK \parallel BC$ и $PK = KB$, $AP = 5$ дм, $PC = 4$ дм. Найти периметр треугольника ABC.

4. Представить выражение $x^4 + 4x^2 + 9$ в виде произведения двух приведённых квадратных трёхчленов.

5. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi x}{x^2+64}\right) = x^2 - 16x + 65.$$

3.6. Экзаменационные билеты 2002 г.

Вариант 26.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2^x} = 4^{-\sqrt{x}}.$$

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$x + 2 = a|x - 1|$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$2\sqrt{11 - 14\cos x} + 7\cos x > 3.$$

5. Найти уравнение общей касательной к графикам функций

$$y = -x^2 + 1, \qquad y = x^2 - x + \frac{9}{4}.$$

Вариант 26.2

1. Решить уравнение

$$3^{x^2 - \frac{5x}{7}} = \sqrt[7]{9}.$$

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$a|x - 3| = x + 1$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{7 + 4\sin x} > 7 - 8\sin x.$$

5. Найти уравнение общей касательной к графикам функций

$$y = x^2 + 4x + 8, \qquad y = x^2 + 8x + 4.$$

Вариант 26.3

1. Решить уравнение

$$9^{2\sqrt{x}} = 3^{2x+6}.$$

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$2x = a|2x - 1|$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{6\cos x + 3} \geqslant 3\cos x.$$

5. Найти уравнение общей касательной к графикам функций

$$y = (x - 1)^2, \qquad y = x^3.$$

Вариант 27.1 (Экзамен в подшефной школе)

1. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{5}{6 - x}} > -1 - 4x^2.$$

2. В равнобедренной трапеции диагональ равна 25 см, а высота 15 см. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{\sqrt{11}+2\sqrt{3}}}(x^2 + 4x + 5) = \log_{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}}(2x + 5).$$

4. Решить неравенство

$$12\sin^4 x - 25\sin^2 x + 12 > 0.$$

5. При каких a корень уравнения

$$\frac{\sqrt{x+2}-a}{x+4}=x$$

единственен? Найти это корень при каком-либо значении a.

Вариант 27.2

1. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{7}{x-4}}>-1-|x|.$$

2. Диагонали некоторой трапеции равны 5 см и 12 см, а основания 3 см и 10 см. Найти углы между диагоналями этой трапеции.

3. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{10}}}(x^2+5x+5)=\log_{\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{11}}}(3x+4).$$

4. Решить неравенство

$$4\cos^4 x-17\cos^2 x+4<0.$$

5. При каких a уравнение

$$x^2=\frac{ax+1}{x}$$

имеет ровно два корня? Найти в этом случае отрицательные корни.

Вариант 27.3

1. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{10}{x}+\frac{12}{x-2}}>-1-3x^2.$$

2. Две окружности, радиусы которых равны 1 см и 3 см, касаются внешним образом в точке C, AB — их общая внешняя касательная (A и B — точки касания). Найти площадь треугольника ACB.

3. Решить уравнение

$$\log_{3+\sqrt{10}}(x^2-3x+3)=\log_{\sqrt{10}-3}(2x-1).$$

4. Решить неравенство

$$6\cos^2 x-5\cos x+1>0.$$

5. При каких a корень уравнения

$$x-6-\frac{\sqrt{x-3}}{x}=\frac{a}{x}$$

единственен? Найти это корень при каком-либо значении a.

Вариант 28.1 (Экзамен в подшефной школе)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8\left(\sqrt{2}\right)^{x-y} = 0{,}5^{\,y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{-\cos x} > \sqrt{-\sin x}.$$

3. Для всех a решить уравнение

$$\big||3x-1|-4\big| - |a| = 0.$$

4. Стороны треугольника равны $2a$, b, b. Найти расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис этого треугольника.

5. Решить уравнение

$$3\log_6\left((x-1)^2+1\right) = x^2 - 2x - 28.$$

Вариант 28.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7, \\ 2^{\frac{x}{8}} = 4 \cdot 2^{-\frac{y}{8}}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\operatorname{tg} 5x} < \sqrt[4]{3}.$$

3. Для всех a решить уравнение

$$\big||2x+1|-3\big| + a = 0.$$

4. Каким должен быть угол при основании равнобедренного треугольника, чтобы его основание было средним геометрическим радиусов вписанной и описанной окружностей?

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3x-13}\cdot\lg x = \sqrt{2x-3}.$$

Вариант 28.3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y = 10^{1+\lg 2}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2\sin^2 3x} < 1.$$

3. Для всех a решить уравнение

$$\big||3-x|-5\big| = \sqrt{a}.$$

4. Равнобедренная трапеция описана около круга. В каком отношении делит площадь трапеции линия, проходящая через точки касания круга с боковыми сторонами, если острый угол при основании трапеции равен α.

5. Решить уравнение

$$2^{2+x^2} - 5\log_3(2+x^2) = 3.$$

Вариант 29.1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y} = -1. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}.$$

3. Сколько килограммов сухарей с влажностью 15% можно получить из 255 кг хлеба с влажностью 45%?

4. Решить уравнение

$$(x-3)^4 + (x-2)^4 - (2x-5)^4 = 0.$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\cos 2x + 7\sin x\cos x + \sin(2x+\varphi) = a$$

не будет иметь решения ни при каких φ?

Вариант 29.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{y} = 4, \\ 2\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{y} = 2. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(8x^2+x) > 2 + \log_3(x^2) + \log_3 x.$$

3. Свежие белые грибы содержат 90% воды, а сушёные — 12%. Сколько надо собрать грибов, чтобы получить $4,5$ кг сушёных?

4. Решить уравнение

$$(x-3)^4+(x-2)^4=17.$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\cos 2x+5\sin x\cos x+\cos(2x-\varphi)=a$$

будет иметь решение при любых φ?

Вариант 29.3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt{y+1}=2, \\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt{y+1}=2. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{0,3}(3x-8)>\log_{0,3}(x^2+4).$$

3. В 2 литра 10% раствора уксусной кислоты добавили 8 литров воды. Определить новую концентрацию раствора.

4. Решить уравнение

$$x^4+x^3-10x^2+x+1=0.$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\cos 3x-5\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin(3x+\varphi)=a$$

не будет иметь решения ни при каких φ?

Вариант 30.1

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x)=-4x^3+6x^2-12x+7.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{4-x^2}>-1.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x\cdot 9^y=81, \\ \lg(x+y)^2-\lg y=2\lg 3. \end{cases}$$

4. Корни уравнения $2\sin(x+3)=a$ образуют арифметическую прогрессию. Определить, при каких a это возможно и найти разность прогрессии.

5. Плоскость выложена касающимися кругами одинакового радиуса так, что каждый круг касается четырёх других, и линии их центров разрезают плоскость на одинаковые квадраты. В оставшиеся непокрытыми участки плоскости затем вписаны окружности максимально большого размера. Найти процент непокрытой в итоге части площади плоскости.

Вариант 30.2

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = 4x^3 + 12x^2 + 24x - 23.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} > -2.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 625, \\ \lg\left(\sqrt{xy}\right) = 1 + \lg 3. \end{cases}$$

4. Корни уравнения $\cos(2x + 1) = a$ образуют арифметическую прогрессию. Определить, при каких a это возможно и найти разность прогрессии.

5. Плоскость выложена касающимися кругами одинакового радиуса так, что каждый круг касается шести других, и линии их центров разрезают плоскость на одинаковые равносторонние треугольники. В оставшиеся непокрытыми участки плоскости затем вписаны окружности максимально большого размера. Найти процент непокрытой в итоге части площади плоскости.

Вариант 30.3

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 12x - 35.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 16} > -3.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10^{1 + \lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

4. Корни уравнения $3\sin(3x + 2) = a$ образуют арифметическую прогрессию. Определить, при каких a это возможно и найти разность прогрессии.

5. Плоскость выложена касающимися кругами одинакового радиуса так, что каждый круг касается четырёх других, и линии их центров разрезают плоскость на одинаковые квадраты. В оставшиеся непокрытыми участки

плоскости затем вписаны квадраты максимально большого размера. Найти процент непокрытой в итоге части площади плоскости.

Вариант 31.1

1. Решить уравнение
$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_{\sqrt{2}} 4 = 7.$$
2. Найти целые решения системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+2} = 3, \\ \sqrt{x+2y+5} = y - x. \end{cases}$$
3. Решить уравнение
$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$
4. Найти все значения y, при которых неравенство
$$|3x-7| - \frac{6y+5}{3-3y} \geqslant 1$$
имеет решением любое x.

5. Найти периметр фигуры, заданной на плоскости системой неравенств
$$\begin{cases} 2|x+2| \arcsin(y-1)^2 \leqslant \pi(x+2), \\ 2|y-1| - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Вариант 31.2

1. Решить уравнение
$$\log_3 9 + \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{4}}(3x+1).$$
2. Найти целые решения системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y - 6. \end{cases}$$
3. Решить уравнение
$$1 - \cos\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{4}.$$
4. Найти все значения y, при которых неравенство
$$|2x+11| - \frac{3y-2}{2y-3} \geqslant 2$$
имеет решением любое x.

5. Найти периметр фигуры, заданной на плоскости системой неравенств
$$\begin{cases} |x+3| \arccos(y-2)^2 \leqslant \pi(x+3), \\ 3|y-2| - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Вариант 31.3

1. Решить уравнение

$$2\log_2 8+\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} x=9.$$

2. Найти целые решения системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{y-x+5}=3,\\ \sqrt{x+y-5}=11-2y.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$$

4. Найти все значения y, при которых неравенство

$$|2x-4|+\frac{y+4}{1-4y}\geqslant 3$$

имеет решением любое x.

5. Найти периметр фигуры, заданной на плоскости системой неравенств

$$\begin{cases}2|y+2|\arcsin(4x^2-4x+1)\leqslant \pi(y+2),\\ 2|2x-1|-y\geqslant 0.\end{cases}$$

Вариант 32.1

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, E — середина стороны AB, $\angle BAC=50^\circ$. Найти угол EOD.

2. Решить неравенство

$$(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 3x=\sin 2x$$

в интервале $75^\circ<x<150^\circ$.

4. Найти площадь области, являющейся решением неравенства

$$(1-|x|-|y|)(|x+y|+|x-y|-1)\geqslant 0.$$

5. Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было бы на 5 человек больше, то она бы закончила работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, считая производительность всех землекопов одинаковой.

Вариант 32.2

1. В ромбе $ABCD$ $\angle A=31^\circ$, а его диагонали пересекаются в точке O. Найти углы треугольника BOC.

2. Решить неравенство

$$(x^2+x+1)(x^2+x-3) \geqslant 5.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos 3x = 0$$

в интервале $0^\circ < x < 90^\circ$.

4. Найти площадь области, являющейся решением неравенства

$$(1-x^2-y^2)((x-1)^2+(y+1)^2-9) \geqslant 0.$$

5. Мастер и ученик за час успевают изготовить по целому количеству деталей, причём мастер делает их больше 5 штук и на две больше, чем ученик. Мастер в одиночку выполнит заказ за целое число часов и на час медленнее, чем два ученика вместе. Сколько заказано деталей?

Вариант 32.3

1. Периметр прямоугольника равен 26 см, а одна из его сторон 9 см. Найти сторону квадрата, имеющего ту же площадь, что и данный прямоугольник.

2. Решить неравенство

$$(x^2+4x+1)(x^2+4x-3) \geqslant 5.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 4x = \sin 2x$$

в интервале $0^\circ < x < 60^\circ$.

4. Найти площадь области, являющейся решением неравенства

$$(1-|x|-|y|)((x+1)^2+(y-1)^2-9) \geqslant 0.$$

5. Маршрут, связывающий города A и B обслуживают самолёты трёх типов, которые могут принимать на борт по 230, 110 и 40 пассажиров и по 27, 12 и 5 контейнеров соответственно. Всего самолётов менее 9 и вместе в них можно разместить 760 пассажиров и 88 контейнеров. Определить число самолётов каждого типа.

3.7. Экзаменационные билеты 2003 г.

Вариант 33.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+11y=-2, \\ x-3y=-1. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1+4\cos^2 7x} = 3\cos 7x + 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(x+2) < 1.$$

4. В круг радиусом R вписана трапеция, у которой боковая сторона равна верхнему основанию, а дуга, стягиваемая этим основанием, равна α. Найти площадь трапеции, если центр круга лежит внутри неё.

5. Найти все значения параметра a, при каждом их которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2) + y = 3a, \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

Вариант 33.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 26x - 15y = -45, \\ 21x + 2y = 6. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$-\sqrt{45 - 48\sin^2 5x} = 8\cos 5x + 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{2x+1}(5-2x) > 1.$$

4. В окружности даны две хорды: $AB = a$, $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найти радиус окружности.

5. Найти все значения параметра a, при каждом их которых система уравнений

$$\begin{cases} (a-1)(x+2) + y + 3 = 3a, \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+1)x^3 + 1 \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

Вариант 33.3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{x-3}(4-x) > 1.$$

4. Определить длину окружности, если вписанный в неё угол со сторонами a и b опирается на дугу, содержащую α°.

5. Найти все значения параметра a, при каждом их которых система уравнений

$$\begin{cases} x + 2a(y+1) = 4a + 2, \\ (x-2)^3 + 2a(2y^3+1) = 2ay^3 + 4a \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

Вариант 34.1

1. Решить уравнение

$$\log_2(5-x) = 3.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{5-x} - 1 < x.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x - 2\sqrt{1-\cos^2 x} \cdot (\log_4 x - \log_4 2) = 0.$$

4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB : BC = 1 : 4$. На стороне AD взята точка L, а на стороне CD — точка K, причём $CK = KD$, $AL : LD = 1 : 3$. Найти острый угол между прямыми BK и LC.

5. Из всех решений $(t; y)$ уравнения

$$4\sin^2 t - 4y\sin^2 t + 9y = 6\cos t - 8y\cos t + 7$$

найти те решения, при которых y наименьшее.

Вариант 34.2

1. Решить уравнение

$$\log_6(3-x) = 2.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{6-x} - 6 < x.$$

3. Решить уравнение

$$\cos x + \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot (2\log_5 x - 1) = 0.$$

4. Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 4 см. На одной прямой взяты точки A и K, на второй прямой — точки B и L, причём $AK = 1$ см, $BL = 2$ см, $AB = 4$ см. Найти тупой угол между прямыми AL и BK.

5. Из всех решений $(t; y)$ уравнения

$$16\cos^2 t - 16y\cos^2 t + 22y = 8y\sin t - 12\sin t + 21$$

найти те решения, где y наименьшее.

Вариант 34.3

1. Решить уравнение

$$\log_2(2 - x) = 5.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{7 - x} + 1 < x.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = 2\cos x \cdot (\log_2 x - 1 - \log_2 \sqrt{2}).$$

4. На сторонах прямого угла с вершиной M взяты точки A и B на одной стороне, точки C и D на другой стороне. Известно, что $AB = 1$, $MC = 3$, $MA = CD = 2$. Найти острый угол между прямыми BC и AD.

5. Из всех решений $(t; y)$ уравнения

$$4\sin t - 2y\sin t + 8y = 4y\cos^2 t - 4\cos^2 t + 9$$

найти те решения, где y наибольшее.

Вариант 35.1

1. Решить неравенство $9^{3x-1} \leqslant 3^{-x}$.

2. В арифметической прогрессии $d = \sqrt{3}$, $S_n = 55\sqrt{3}$, $a_1 = \sqrt{3}$. Найти a_n и n.

3. Решить уравнение

$$x^2 - 7 = 3\left|x - \frac{6}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right|.$$

4. В трапецию вписана окружность и около трапеции описана окружность. Найти отношение радиусов этих окружностей, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

5. При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 4x\sin b - 2y = 4\sin b + 3, \\ 2x + (2\sin b + 3)y = 2\sin b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 35.2

1. Решить неравенство $8^{4x+3} > 2^x$.

2. В арифметической прогрессии $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_n = \frac{21\sqrt{2}}{2}$, $a_n = 3\sqrt{2}$. Найти a_1 и n.

3. Решить уравнение

$$x^2 - 2\left|x - \frac{18}{\pi}\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right| = 9.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = AC = b$, $\angle A = \alpha$. Через вершину B и центр описанной вокруг треугольника ABC окружности проведена прямая, пересекающаяся со стороной AC в точке D. Найти AD.

5. При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 2y\cos b = 2\cos b, \\ (2\cos b - 3)x + 2y = 2\cos b + 4 \end{cases}$$

имеет менее двух (одно или ни одного) решений?

Вариант 35.3

1. Решить неравенство $16^{1-x} < 4^{2x}$.

2. В арифметической прогрессии $d = 0{,}2$, $n = 21$, $S_n = 57{,}75$. Найти a_1 и a_n.

3. Решить уравнение

$$3\left|x - \frac{9}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = x^2 - 9.$$

4. В треугольнике ABC $AB = a$, $AC = b$, а угол при вершине A вдвое больше угла при вершине B. Определить BC.

5. При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 3x\cos b + 4y = 3\cos b, \\ 3x + (3\cos b + 1)y = 3\cos b + 7 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

3.8. Экзаменационные билеты 2004 г.

Вариант 36.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. Решить уравнение

$$\frac{3x}{4} - \frac{12}{x} = 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sin 6x - \sqrt{2}\cos 3x = 0.$$

3. На сколько процентов уменьшится площадь параллелограмма, если одну пару противоположных сторон параллелограмма уменьшить на 35%, а другую пару — на 80%, не изменяя углы параллелограмма.

4. Решить неравенство
$$x - 15 < 6\left|3 - \sqrt{x-2}\right|.$$

5. Найти все значения параметра a, при которых функция
$$f(x) = \log_{7-6a-a^2}\left(2\cos 5x - \sqrt{12}\sin 5x - a - 1\right)$$
определена для всех x.

Вариант 36.2

1. Решить уравнение
$$\frac{10}{x} - \frac{2x}{5} = 0.$$

2. Решить уравнение
$$\sqrt{2}\cos 2x + \sin 4x = 0.$$

3. На сколько процентов увеличится площадь параллелограмма, если одну диагональ параллелограмма увеличить на 60%, а другую диагональ — на 15%, не изменяя угол между диагоналями.

4. Решить неравенство
$$x + 4 + 6\left|\sqrt{9-x} - 3\right| > 0.$$

5. Найти все значения параметра a, при которых функция
$$f(x) = \log_{6-a-a^2}\left(\sqrt{6}\sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x + a + 2\right)$$
определена для всех x.

Вариант 36.3

1. Решить уравнение
$$\frac{12}{x} - \frac{4x}{3} = 0.$$

2. Решить уравнение
$$\sin 4x + \cos 2x = 0.$$

3. На сколько процентов уменьшится площадь параллелограмма, если одну диагональ параллелограмма уменьшить на 65%, а другую диагональ — на 20%, не изменяя угол между ними.

4. Решить неравенство
$$6\left|\,\sqrt{x+3} - 3\,\right| > x - 10.$$

5. Найти все значения параметра a, при которых функция

$$f(x) = \log_{6-a^2-5a}\left(\sqrt{5}\cos 3x + 2\sin 3x - a + 1\right)$$

определена для всех x.

Вариант 37.1

1. Найти целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} 17 - 4x < 0, \\ 10x - 67 < 0. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2^x - 3} = 5 - 2^x.$$

3. Сумма четвёртого и двенадцатого членов арифметической прогрессии равна 48. Найти сумму первых пятнадцати членов этой прогрессии.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{-18 - x^2 - 9x} \cdot (\cos 2x - \sin 2x + \sqrt{2}) = 0.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = |2a - 5|, \\ x^2 + y^2 = 7a^2 - 2a + 4 \end{cases}$$

при $a = 1$ и найти значение параметра a, при котором произведение xy принимает наибольшее значение.

Вариант 37.2

1. Найти целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} 5 - 2x > 0, \\ 3x + 4 > 0. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2^x - 1} = 3 - 2^x.$$

3. Произведение третьего, восьмого и десятого членов геометрической прогрессии равно 27. Найти произведение пятого и девятого членов прогрессии.

4. Решить уравнение

$$(\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x - 2) \cdot \sqrt{2x + 3 - x^2} = 0.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = |3a + 1|, \\ x^2 + y^2 = 11a^2 + 3a - 2 \end{cases}$$

при $a = -1$ и найти значение параметра a, при котором произведение xy принимает наибольшее значение.

Вариант 37.3

1. Найти целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} 21 - 2x < 0, \\ 3x - 40 < 0. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3^x - 2} = 4 - 3^x.$$

3. В арифметической прогрессии $a_n = 98 - 5n$. Найти сумму членов прогрессии с седьмого по шестнадцатый.

4. Решить уравнение

$$\lg(-x^2 - 5 - 6x) \cdot (\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 2) = 0.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = |4a + 1|, \\ x^2 + y^2 = 3a^2 + 2a + 2 \end{cases}$$

при $a = 0$ и найти значение параметра a, при котором произведение xy принимает наименьшее значение.

Вариант 38.1

1. Решить неравенство

$$7x^2 - 2x - 5 \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + \sin(3\pi + 2x) = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\log_2(x - 2) + \log_2(x + 1) = 2.$$

4. Одна сторона треугольника на 2 см больше другой, а угол между ними равен 60°. Длина третьей стороны равна $2\sqrt{3}$ см. Найти площадь треугольника и радиус описанной окружности.

5. Решить уравнение

$$\arcsin \left| 16^x + 25^x + a\sqrt{6} \cdot 20^x \right| = 0$$

при $a = -\sqrt{6}$ и найти наибольшее значение a, при котором уравнение имеет хотя бы один корень.

Вариант 38.2

1. Решить неравенство

$$5x^2 - 2x - 3 < 0.$$

2. Решить уравнение

$$\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \cos 2x.$$

3. Решить уравнение

$$\log_5(4 + x) + \log_5(1 + 2x) = 2\log_5 3.$$

4. Биссектриса прямого угла делит гипотенузу прямоугольного треугольника на отрезки, разность которых равна 5 см. Найти площадь треугольника и радиус описанной окружности, если катеты относятся как 3 : 4.

5. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\left|a\sqrt{3}\cdot 10^x + 4^x + 25^x\right| = 0$$

при $a = -\sqrt{3}$ и найти наибольшее значение a, при котором уравнение имеет хотя бы один корень.

Вариант 38.3

1. Решить неравенство

$$3x^2 - 2x - 1 \geqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 2) = 1.$$

4. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 1 : 3. Найти площадь треугольника и проекции катетов на гипотенузу, если длина гипотенузы равна 40 см.

5. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\left|25^x + 4^x + a\sqrt{7}\cdot 10^x\right| = 0$$

при $a = -\sqrt{7}$ и найти наибольшее значение a, при котором уравнение имеет хотя бы один корень.

3.9. Экзаменационные билеты 2005 г.

С 2005 года экзаменационный билет содержит восемь задач. Задачи оцениваются по балльной системе, затем баллы за каждую задачу суммируются. Максимальное число баллов за задачу указано после её номера.

В ответах к заданиям 1 — 3 надо указать один из вариантов ответа а) — г), решения приводить не надо. Задания 4 — 8 должны быть приведены с подробными решениями.

Вариант 39.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. (5 баллов). Вычислить $\sqrt[5]{3^{10} \cdot (-2)^5}$.

а) -18; б) -6; в) -1; г) 18.

2. (5 баллов). Найти сумму корней уравнения $2x^2 = 3x$.

а) $-\frac{3}{2}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{2}$.

3. (5 баллов). Найти промежуток, которому принадлежит корень уравнения $16^{2-x} = 4$.

а) $(-4; -2)$; б) $(-2; 0)$; в) $(0; 2)$; г) $(2; 4)$.

4. (15 баллов). Найти $|\cos\alpha|$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$2\log_2\left(1 - \frac{13}{2x+7}\right) - 12 = 3\log_2\left(2 + \frac{13}{x-3}\right).$$

6. (15 баллов). Два билета в театр, три билета в кинотеатр и один билет в цирк стоят 1000 рублей, а четыре билета в театр, один билет в кинотеатр и два билета в цирк стоят 1500 рублей. Сколько стоят два билета в театр и один билет в цирк вместе?

7. (15 баллов). Решить систему

$$\begin{cases} |x - 2 + y| = 3 - x, \\ 1 - \sqrt{x + 1 - y} = y. \end{cases}$$

8. (25 баллов). При каких значениях величины β многочлен от x

$$y = x^4 - 2^{\sin\beta}x^2 + x\left(\sqrt{3} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{3}\right) + 2^{\sin\beta} - 1$$

является квадратом квадратного трёхчлена относительно x?

Вариант 39.2

1. (5 баллов). Вычислить $\sqrt[4]{(-3)^4 \cdot 2^8}$.

а) -12; б) 1; в) 6; г) 12.

2. (5 баллов). Найти сумму корней уравнения $5x = 7x^2$.

а) $-\frac{7}{5}$; б) $-\frac{5}{7}$; в) $\frac{5}{7}$; г) $\frac{7}{5}$.

3. (5 баллов). Найти промежуток, которому принадлежит корень уравнения $36^{4-x}=6$.

а) $(-5;-3)$; б) $(-3;0)$; в) $(0;3)$; г) $(3;5)$.

4. (15 баллов). Найти $|\operatorname{ctg}\alpha|$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$.

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$3\log_6\left(3-\frac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\frac{1}{x+1}\right)+3.$$

6. (15 баллов). Три розы, один гладиолус и два тюльпана стоят 370 рублей, а одна роза, три гладиолуса и шесть тюльпанов стоят 470 рублей. Сколько стоят два гладиолуса и четыре тюльпана вместе?

7. (15 баллов). Решить систему

$$\begin{cases} x+\sqrt{y+10-x}=4,\\ y+3+|y+1+x|=0.\end{cases}$$

8. (25 баллов). При каких значениях величины β многочлен от x

$$y=x^4+2^{\operatorname{tg}\frac{\beta}{3}}x^2-x\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)-1+2^{\operatorname{tg}\frac{\beta}{3}}$$

является квадратом квадратного трёхчлена относительно x?

Вариант 39.3

1. (5 баллов). Вычислить $\sqrt[6]{(-2)^6}\cdot\sqrt[3]{-27}$.

а) -12; б) -6; в) ±6; г) 6.

2. (5 баллов). Найти сумму корней уравнения $4x+9x^2=0$.

а) $-\frac{9}{4}$; б) $-\frac{4}{9}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $\frac{9}{4}$.

3. (5 баллов). Найти промежуток, которому принадлежит корень уравнения $49^{3-x}=7$.

а) $(-6;-3)$; б) $(-3;0)$; в) $(0;3)$; г) $(3;6)$.

4. (15 баллов). Найти $|\operatorname{tg}\alpha|$, если $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$4\log_2\left(2+\frac{6}{2x-5}\right)-8=3\log_2\left(2-\frac{3}{x-1}\right).$$

6. (15 баллов). Один ананас, два авокадо и три манго стоят 280 рублей, а два ананаса, пять авокадо и шесть манго стоят 590 рублей. Сколько стоят один ананас и три манго вместе?

7. (15 баллов). Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+7}=x+1,\\ 3+|4-x+y|=-y.\end{cases}$$

8. (25 баллов). При каких значениях величины β многочлен от x

$$y = x^4 + 2^{\cos\beta} x^2 - x\operatorname{tg}\frac{\beta}{5} + 2^{\cos\beta} - 1$$

является квадратом квадратного трёхчлена относительно x?

Вариант 40.1

1. (5 баллов). Найти значение выражения $\frac{\sqrt[3]{125}}{25} - \frac{2}{5/3}$.
а) 1; б) -1; в) $-\frac{6}{5}$; г) 0.
2. (5 баллов). Найти корень уравнения $25^{x-1} = 5^{3x-4}$.
а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
3. (5 баллов). Какая из функций положительна при любом x?
а) $\log_5(x^2+1)$; б) 3^{x^2-5}; в) $\log_2|x|+1$; г) $5^{x^2}-1$.
4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\log_5(x^2+2x) = \log_5 x + \log_5 4.$$

5. (15 баллов). Найти корни уравнения

$$\sin x\cos x + \sin\frac{\pi}{6} = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{4}; 0\right]$.

6. (15 баллов). Путь от деревни до железной дороги занял на один час больше, чем обратный путь и был пройден со скоростью, на один км/час меньшей, чем обратный путь. С какой скоростью был пройден обратный путь, если расстояние между деревней и железной дорогой равно 12 км?

7. (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$a = -\frac{x(x+2)|\sqrt{x+5}-\sqrt{2}|}{\sqrt{x+5}-\sqrt{2}}$$

имеет ровно одно решение?

8. (25 баллов). Решить неравенство

$$\frac{\log_2(4-x)+1}{2x-4} > \frac{3}{2x-5}.$$

Вариант 40.2

1. (5 баллов). Найти значение выражения $\frac{4/3}{2} - \frac{\sqrt{81}}{3}$.
а) $-\frac{5}{2}$; б) 0; в) $-\frac{7}{3}$; г) -3.
2. (5 баллов). Найти корень уравнения $16^{x-2} = 4^{x-1}$.
а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
3. (5 баллов). Какая из функций положительна при любом x?

а) $\frac{\sin x-2}{2}$; б) $\frac{\cos^2 x}{5}$; в) $\frac{3-\cos 2x}{4}$; г) $\frac{\sin^3 x+1}{3}$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\log_6 x + \log_6 2 = \log_6(x^2 - 3x).$$

5. (15 баллов). Найти корни уравнения

$$\sqrt{3} + 2\sin 3x = 2\cos 390^\circ,$$

принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. (15 баллов). План рабочего составляет 24 детали за смену. После увеличения своей производительности на 1 деталь в час рабочий стал выполнять план на 2 часа быстрее. Найти первоначальную производительность рабочего.

7. (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$a = \frac{|\sqrt{x+4} - \sqrt{2}|(x+1)(3-x)}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2}}$$

имеет ровно два решения?

8. (25 баллов). Решить неравенство

$$\frac{1 + \log_2(2x+1)}{6x-3} < \frac{2}{4x-1}.$$

Вариант 40.3

1. (5 баллов). Найти значение выражения $\frac{2}{\sqrt[3]{27}} - \frac{4/3}{2}$.

а) $-\frac{2}{3}$; б) 0; в) $-\frac{1}{3}$; г) 1.

2. (5 баллов). Найти корень уравнения $4^{2-x} = 2^{5-x}$.

а) -1; б) 0; в) 2; г) 3.

3. (5 баллов). Какая из функций положительна при любом x?

а) 4^{2-x^3}; б) $\log_5|1-x^2|$; в) $7^{1/x}$; г) $\log_2(x+5)$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\log_2(4x + x^2) = \log_2 7 + \log_2 x.$$

5. (15 баллов). Найти корни уравнения

$$\cos^2 2x + \cos\frac{3\pi}{2} = 1,$$

принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

6. (15 баллов). Ученик прочёл книгу в 480 страниц, ежедневно читая одинаковое количество страниц. Если бы он читал каждый день на 16 страниц больше, то прочёл бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней ученик читал книгу?

7. (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$a = \frac{(x+3)(x+1)\left(\sqrt{x+8}-2\right)}{|\sqrt{x+8}-2|}$$

не имеет решений?

8. (25 баллов). Решить неравенство

$$\frac{6}{7-4x} > \frac{\log_2(5-2x)+1}{3-2x}.$$

Вариант 41.1

1. (5 баллов). Найти значение выражения $1 - \log_3 49 \cdot \log_7 3$.

а) -2; б) -1; в) 1; г) 2.

2. (5 баллов). Найти корень уравнения $|3-2x| = x-1$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

3. (5 баллов). Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2-1}$.

а) $[-1;1]$; б) $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; в) $(-1;1)$; г) $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

4. (15 баллов). Найти сумму шести первых членов геометрической прогрессии 3, 6, ...

5. (15 баллов). Решить неравенство

$$49^{2\sqrt{3-x}+1} < 7^{2\sqrt{3-x}+6}.$$

6. (15 баллов). При каких значениях параметра a произведение квадратов корней уравнения

$$4x^2 - 3x - a = 0$$

равно 3?

7. (15 баллов). Найти наименьшее значение $\operatorname{ctg} y$, если

$$\begin{cases} x + 2x\sin y = 4\cos y, \\ \sin y + x\cos y = 2. \end{cases}$$

8. (25 баллов). Доказать, что все решения неравенства

$$\log_7(x^2-9) + \log_2(x-3) > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$2\log_2(x-3)\cdot\log_2(16x-48) + 1 > 4\log_7(x^2-9) - 2\log_7^2(x^2-9).$$

Вариант 41.2

1. (5 баллов). Найти значение выражения $\log_5 27 \cdot \log_3 5 - 2$.

а) -2; б) -1; в) 1; г) 2.

2. (5 баллов). Найти корень уравнения $|2-7x| = 3x+2$.

а) -1; б) 0; в) 1; г) 2.

3. (5 баллов). Найти область определения функции $y = \log_3(4 - x^2)$.

а) $(-2; 2)$; б) $[-2; 2]$; в) $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; г) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

4. (15 баллов). Найти сумму семи первых членов арифметической прогрессии 8, 4, ...

5. (15 баллов). Решить неравенство

$$5^{5\sqrt{4-x}+4} > 25^{5\sqrt{4-x}-8}.$$

6. (15 баллов). При каких значениях параметра a квадрат произведения корней уравнения

$$3x^2 - 2x + a = 0$$

равен 6?

7. (15 баллов). Найти наибольшее значение $\operatorname{tg} y$, если

$$\begin{cases} \sin y - 2 = 2x\cos y, \\ 2\cos y + 2x\sin y = -x. \end{cases}$$

8. (25 баллов). Доказать, что все решения неравенства

$$\log_3(x^2 - 4) + \log_6(x - 2) > 5$$

удовлетворяют неравенству

$$\log_3(x^2 - 4) \cdot \log_3(9x^2 - 36) > 4\log_6(x - 2) - \log_6^2(x - 2) + 3.$$

Вариант 41.3

1. (5 баллов). Найти значение выражения $2 - \log_7 16 \cdot \log_4 7$.

а) -1; б) 0; в) 1; г) 2.

2. (5 баллов). Найти корень уравнения $|4 - x| = 2x - 11$.

а) 5; б) 6; в) 7; г) 8.

3. (5 баллов). Найти область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

а) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-3; 3)$; в) $[-3; 3]$; г) $(-3; 0) \cup (0; 3)$.

4. (15 баллов). Найти сумму пяти первых членов геометрической прогрессии 9, 3, ...

5. (15 баллов). Решить неравенство

$$64^{5\sqrt{2-x}-4} < 8^{5\sqrt{2-x}+7}.$$

6. (15 баллов). При каких значениях параметра a квадрат суммы корней уравнения

$$ax^2 - 4x - 4 = 0$$

равен 5?

7. (15 баллов). Найти наименьшее значение $\operatorname{tg} y$, если

$$\begin{cases} 4\sin y - x = 2x\cos y, \\ \cos y + x\sin y = 2. \end{cases}$$

8. (25 баллов). Доказать, что все решения неравенства

$$\log_7(x-2) + \log_5(x^2-4) > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$2\log_5(x^2-4)\cdot\log_5(25x^2-100) + 9 > 8\log_7(x-2) - 2\log_7^2(x-2).$$

3.10. Экзаменационные билеты 2006 г.

Вариант 42.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. (5 баллов). Сколько натуральных делителей имеет число 10?

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

2. (5 баллов). Каким числом не может быть второй член геометрической прогрессии?

а) -2; б) 0; в) 1; г) может быть любым числом.

3. (5 баллов). Какому интервалу принадлежит число $\sqrt{8} - \log_3 5$?

а) $(0;1)$; б) $(1;2)$; в) $(2;3)$; г) $(3;4)$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$2\sin 3x \sin 2x = \cos x.$$

6. (15 баллов). В треугольнике ABC сторона AB равна 5, сторона BC равна $\sqrt{19}$, угол при вершине A равен 60°. Найти площадь треугольника ABC, если медиана, проведённая к стороне AB, меньше $\sqrt{6}$.

7. (20 баллов). Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{10}(24x^2-12x+1)} \leqslant \log_{10x-3} 5 + \frac{1}{\log_2(10x-3)}.$$

8. (20 баллов). Решить неравенство в целых числах

$$\sqrt{x^3+x^2-9x-9} \leqslant 4\log_2(2y) - 4\log_2(2y^2-7y+8).$$

Вариант 42.2

1. (5 баллов). Сколько натуральных делителей имеет число 9?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.

2. (5 баллов). Каким числом не может быть знаменатель геометрической прогрессии?

а) -1; б) 0; в) 1; г) может быть любым числом.

3. (5 баллов). Какому интервалу принадлежит число $\sqrt{13} + \log_3 7$?

а) $(2; 3)$; б) $(3; 4)$; в) $(4; 5)$; г) $(5; 6)$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$x^3 + x^2 - 6x = 0.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$2 \sin 6x \cos 2x = \sin 4x.$$

6. (15 баллов). В треугольнике ABC сторона AB равна $2\sqrt{2}$, сторона BC равна $\sqrt{5}$, угол при вершине A равен 45°. Найти площадь треугольника ABC, если высота, опущенная из вершины C, меньше $\sqrt{2}$.

7. (20 баллов). Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_3(5x-13)} + \log_{5x-13} 4 \leqslant \frac{1}{\log_{12}(6x^2 - 30x + 37)}.$$

8. (20 баллов). Решить неравенство в целых числах

$$\sqrt{-x^3 + 4x^2 + 4x - 16} \leqslant 6 \log_2(2y) - 6 \log_2(2y^2 - 3y + 2).$$

Вариант 42.3

1. (5 баллов). Сколько натуральных делителей имеет число 6?

а) 3; б) 4; в) 5; г) 6.

2. (5 баллов). Каким числом не может быть знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

а) -1; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) может быть любым числом.

3. (5 баллов). Какому интервалу принадлежит число $\sqrt{10} - \log_7 5$?

а) $(1; 2)$; б) $(2; 3)$; в) $(3; 4)$; г) $(4; 5)$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$2 \cos 5x \cos 3x = \cos 8x.$$

6. (15 баллов). В треугольнике ABC сторона BC равна 4, сторона AC равна $\sqrt{7}$, угол при вершине B равен 30°. Найти площадь треугольника ABC, если высота, опущенная из вершины A, больше 2.

7. (20 баллов). Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{15}(6x^2-18x+13)} \leqslant \frac{1}{\log_5(7-5x)} + \log_{7-5x} 3.$$

8. (20 баллов). Решить неравенство в целых числах

$$\sqrt{-x^3+x^2+16x-16} < 8\log_3(3y) - 8\log_3(4y^2-23y+36).$$

Вариант 43.1

1. (5 баллов). Сколько различных корней имеет уравнение $x^3 = 4x$?
а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
2. (5 баллов). Какое из чисел наибольшее?
а) $\log_2 5$; б) $\log_2 7$; в) $\log_3 5$; г) $\log_3 7$.
3. (5 баллов). Какая из функций убывает на интервале $(0;4)$?
а) $y = 3\cos x$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = -\log_2 x$.
4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{3}}(3-2x) = 4.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$x\cos x = 2\cos(\pi - x).$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$3|2x-1| + |x+3| \leqslant 7x+1.$$

7. (20 баллов). В трапеции $ABCD$ точка K делит боковую сторону AB так, что $AK : KB = 2 : 1$. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке L и угол ALD равен 60°. Отрезок DK является медианой треугольника ALD. Найти площадь трапеции $ABCD$, если сумма KL и KD равна 12, а длина отрезка DL равна 8.

8. (20 баллов). Найти наименьшее значение выражения $x^2 + y^2$ при условиях:

$$xy - b(x+y) + b^2 = a, \qquad \frac{a - \sqrt{b-3} - 1}{\sqrt{x-b}} \geqslant 0.$$

Вариант 43.2

1. (5 баллов). Сколько различных корней имеет уравнение $x^2 + 4 = 0$?
а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
2. (5 баллов). Какое из чисел наименьшее?
а) $\log_3 5$; б) $\log_3 8$; в) $\log_4 5$; г) $\log_4 8$.
3. (5 баллов). Какая из функций возрастает на интервале $(-1;1)$?
а) $y = 2x^2$; б) $y = 1 - \sin x$; в) $y = -|x|$; г) $y = x^3 - 1$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{7}}(1-3x)=2.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$5\sin x = x\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$|x-1|-4|x+3|\geqslant 3x+2.$$

7. (20 баллов). В трапеции $ABCD$ основание BC равно 2, сумма диагоналей AC и BD равна $12\sqrt{2}$, угол CAD равен 45°. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O — точка пересечения диагоналей, равно 9. Найти площадь трапеции.

8. (20 баллов). Найти наименьшее значение выражения x^2+y^2 при условиях:

$$(b-x)(b+y)=a, \qquad \frac{1-a+\sqrt{b-4}}{\sqrt{x-b}}\leqslant 0.$$

Вариант 43.3

1. (5 баллов). Сколько различных корней имеет уравнение $x=x^4$?
а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
2. (5 баллов). Какое из чисел наименьшее?
а) $\log_2 9$; б) $\log_4 9$; в) $\log_2 5$; г) $\log_4 5$.
3. (5 баллов). Какая из функций возрастает на интервале $(-3;0)$?
а) $y=-\cos x$; б) $y=\sqrt{-x}$; в) $y=2-x^2$; г) $y=|x|$.
4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}}(1-5x)=8.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$3\cos x = x\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$|x-3|-4|x+1|<3x-4.$$

7. (20 баллов). В трапеции $ABCD$ точка K делит боковую сторону CD в отношении $2:1$, считая от вершины C. Сумма длин BC и CK равна 12, длина отрезка BK равна 8, угол CBK равен 60°. Найти площадь трапеции $ABCD$, если основание AD равно 9.

8. (20 баллов). Найти наименьшее значение выражения x^2+y^2 при условиях:

$$b^2+b(x-y)-xy=a, \qquad \frac{a-1-\sqrt{b-1}}{\sqrt{-b-x}} \geqslant 0.$$

Вариант 44.1

1. (5 баллов). Найти значение выражения $\log_5 12-\log_5 9+\log_5 2$.

а) 5; б) 1; в) $\log_5 15$; г) $\log_5 \frac{8}{3}$.

2. (5 баллов). В какой четверти находится угол $\sqrt{8}$ радиан?

а) в первой; б) во второй; в) в третьей; г) в четвёртой.

3. (5 баллов). Какая из функций чётная?

а) $\frac{\sin 2x}{x^2}$; б) $\frac{x}{\cos 3x}$; в) $\frac{2x}{\operatorname{tg} x}$; г) $\frac{\operatorname{ctg} 4x}{x^3+1}$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$2\sin(5x)-\sqrt{3}=0.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{12-5x-3x^2}{\sqrt{1+x}}=0.$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$\log_2\left|6x^2-4\right|<5.$$

7. (20 баллов). В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, длина стороны AC равна 5, длина медианы, проведённой к стороне BC, равна $\frac{\sqrt{61}}{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

8. (20 баллов). Найти наибольшее значение параметра a, при котором уравнение

$$\arcsin x=\arccos ax+\operatorname{arcctg} ax$$

имеет решение.

Вариант 44.2

1. (5 баллов). Найти значение выражения $\log_7 3-\log_7 5+\log_7 4$.

а) 1; б) $\log_7 2$; в) 7; г) $\log_7 \frac{12}{5}$.

2. (5 баллов). В какой четверти находится угол $\sqrt{13}$ радиан?

а) в первой; б) во второй; в) в третьей; г) в четвёртой.

3. (5 баллов). Какая из функций нечётная?

а) $\frac{\cos 5x}{x}$; б) $\frac{3x}{\operatorname{ctg} x}$; в) $\frac{x-1}{\operatorname{tg} 2x}$; г) $\frac{2x^3}{\sin x}$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$2\sin(4x)-1=0.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{10 - x - 2x^2}{\sqrt{1-x}} = 0.$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$\log_4 \left|7x^2 - 5\right| \leqslant 2.$$

7. (20 баллов). В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, длина стороны AC равна 6, длина высоты, опущенной на сторону AC, равна $\sqrt{12}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

8. (20 баллов). Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение

$$\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} ax = \arcsin x + \arccos ax$$

имеет решение.

Вариант 44.3

1. (5 баллов). Найти значение выражения $\log_9 4 - \log_9 6 + \log_9 5$.
а) 9; б) $\log_9 \frac{10}{3}$; в) $\log_9 3$; г) 1.
2. (5 баллов). В какой четверти находится угол $\sqrt{5}$ радиан?
а) в первой; б) во второй; в) в третьей; г) в четвёртой.
3. (5 баллов). Какая из функций ни чётная, ни нечётная?
а) $\frac{x^2-1}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\frac{\cos 4x}{x^3}$; в) $\frac{\operatorname{ctg} 3x}{x}$; г) $\frac{x^3+1}{\sin x}$.
4. (15 баллов). Решить уравнение

$$2\cos(7x) + \sqrt{3} = 0.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{6 + 5x - 4x^2}{\sqrt{x-1}} = 0.$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$\log_3 \left|2x^2 - 7\right| < 2.$$

7. (20 баллов). В треугольнике ABC длина стороны AB равна 5, длина медианы, проведённой к стороне BC, равна $\frac{7}{2}$, длина медианы, проведённой к стороне AC, равна $\frac{\sqrt{79}}{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

8. (20 баллов). Найти наибольшее значение параметра a, при котором уравнение

$$\arccos x + \operatorname{arcctg} ax = 2\pi + \arcsin ax$$

имеет решение.

Вариант 45.1

1. (5 баллов). Найти значение выражения $3^{1/3} \cdot 5^{-1} \cdot 3^{2/3}$.

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{5}$; в) -15; г) 1.

2. (5 баллов). Упростить выражение $5\cos^2 x + 1 - 5\sin^2 x$.

а) $1 - 5\cos 2x$; б) 4; в) $5\cos 2x + 1$; г) 6.

3. (5 баллов). Найти координаты точки пересечения графиков $y = \frac{1}{25}$ и $y = 5^x$.

а) $(2; 0)$; б) $\left(-2; \frac{1}{25}\right)$; в) $(2; 25)$; г) $\left(0; \frac{1}{25}\right)$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{x}{7} + 0{,}5 = \frac{1}{3}.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$|2x - 3| = 5.$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{(x+1)(x-2)}{3(x+4)} \leqslant \frac{3(x-2)}{(x+1)(x+4)}.$$

7. (20 баллов). При каждом значении параметра a решить неравенство

$$\log_4(4 - x) + \log_2\sqrt{x+6} < a.$$

8. (20 баллов). Найти все тройки $(x; y; z)$, при которых числа

$$\sqrt{x^2 + \sin^2 z - \frac{7}{2}}; \quad \sqrt{\frac{21}{2} - 2\cos(2y) - 4x} \quad \text{и} \quad \frac{x\cos\frac{y}{3}}{\sqrt{4 - \sin z}}$$

являются соответственно синусом, косинусом и тангенсом некоторого угла.

Вариант 45.2

1. (5 баллов). Найти значение выражения $7^{4/3} \cdot 3^2 \cdot 7^{-1/3}$.

а) $\frac{9}{7}$; б) 1; в) 63; г) -21.

2. (5 баллов). Упростить выражение $3\sin^2 x - 2 - 3\cos^2 x$.

а) $-3\cos 2x - 2$; б) -5; в) 1; г) $3\cos 2x - 2$.

3. (5 баллов). Найти координаты точки пересечения графиков $y = \log_2 x$ и $y = 4$.

а) $(16; 4)$; б) $(4; 2)$; в) $(2; 4)$; г) $(4; 0)$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{x}{3} + 0{,}4 = \frac{1}{7}.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$|3x - 1| = 5.$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{(x-3)(x-1)}{2(x-5)} \geqslant \frac{2(x-1)}{(x-3)(x-5)}.$$

7. (20 баллов). При каждом значении параметра a решить неравенство

$$\log_3 \sqrt{x+2} + \log_9 (8-x) < a.$$

8. (20 баллов). Найти все тройки $(x; y; z)$, при которых числа

$$\sqrt{x^2 - \cos 2z - \frac{29}{4}}; \quad \sqrt{\cos^2 y - 6x + \frac{73}{4}} \quad \text{и} \quad \frac{x \sin \frac{y}{3}}{\sqrt{27 - \sin z}}$$

являются соответственно синусом, косинусом и котангенсом некоторого угла.

Вариант 45.3

1. (5 баллов). Найти значение выражения $5^{2/3} \cdot 6^{-1} \cdot 5^{1/3}$.

а) -30; б) $\frac{125}{6}$; в) $\frac{5}{6}$; г) 1.

2. (5 баллов). Упростить выражение $1 + 7\cos^2 x + 7\sin^2 x$.

а) $7\cos 2x + 1$; б) $1 - 7\cos 2x$; в) 8; г) -6.

3. (5 баллов). Найти координаты точки пересечения графиков $y = -2$ и $y = \log_{1/3} x$.

а) $(-9; 3)$; б) $(-2; 0)$; в) $\left(\frac{1}{9}; -2\right)$; г) $(9; -2)$.

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{x}{6} + 0{,}3 = \frac{1}{4}.$$

5. (15 баллов). Решить уравнение

$$|2x - 7| = 3.$$

6. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{(x-2)(x-7)}{5(x+3)} \leqslant \frac{5(x-7)}{(x-2)(x+3)}.$$

7. (20 баллов). При каждом значении параметра a решить неравенство

$$\log_5 \sqrt{1-x} + \log_{25} (x+5) < a.$$

8. (20 баллов). Найти все тройки $(x; y; z)$, при которых числа

$$\sqrt{2x + 4\cos 2z + \frac{25}{4}}; \quad \sqrt{x^2 + \sin^2 y - \frac{1}{4}} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \frac{z}{5}}{\sqrt{\sin y - 3x}}$$

являются соответственно синусом, косинусом и тангенсом некоторого угла.

3.11. Экзаменационные билеты 2007 г.

Вариант 46.1 (Пробный экзамен на подготовительных курсах)

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{2-7x}=4.$$

2. (15 баллов). Чему равняется $\log_{27}25$, если $\log_5 3=b$?

3. (15 баллов). Решить уравнение

$$(x^2-1)^2=9.$$

4. (15 баллов). Решить неравенство

$$(0{,}2)^{\frac{2x-5}{x}}\leqslant\sqrt{125}.$$

5. (20 баллов). Решить неравенство

$$\cos(2\sqrt{x})+\sqrt{2}\leqslant(2-\sqrt{2})\sin\sqrt{x}+1.$$

6. (20 баллов). Сумма n первых членов геометрической прогрессии на 2 меньше суммы n^2 первых членов арифметической прогрессии с разностью d, причём это соотношение верно при $n=1$, при $n=2$ и при $n=3$. При каких d это возможно?

Вариант 46.2

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{3-2x}=3.$$

2. (15 баллов). Чему равняется $\log_4 125$, если $\log_5 2=a$?

3. (15 баллов). Решить уравнение

$$(x^2+4)^2=25.$$

4. (15 баллов). Решить неравенство

$$(0{,}04)^{\frac{3x-2}{x}}\geqslant\sqrt[3]{5^4}.$$

5. (20 баллов). Решить неравенство

$$(\sqrt{3}-2)\cos\sqrt{x}+1\geqslant\sqrt{3}-\cos(2\sqrt{x}).$$

6. (20 баллов). Сумма n первых членов геометрической прогрессии на 3 больше суммы n^2 первых членов арифметической прогрессии с разностью d, причём это соотношение верно при $n=1$, при $n=2$ и при $n=3$. При каких d это возможно?

Вариант 46.3

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{7-2x}=5.$$

2. (15 баллов). Чему равняется $\log_9 32$, если $\log_2 3 = a$?

3. (15 баллов). Решить уравнение

$$(x^2-3)^2=36.$$

4. (15 баллов). Решить неравенство

$$(0{,}5)^{\frac{x-2}{x}} \leqslant \sqrt{8}.$$

5. (20 баллов). Решить неравенство

$$1-(\sqrt{3}+2)\sin\sqrt{x} \geqslant \cos(2\sqrt{x})-\sqrt{3}.$$

6. (20 баллов). Сумма n первых членов геометрической прогрессии на 1 меньше суммы n^2 первых членов арифметической прогрессии с разностью d, причём это соотношение верно при $n=1$, при $n=2$ и при $n=3$. При каких d это возможно?

Вариант 47.1

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{x+2}=x.$$

2. (15 баллов). Решить уравнение

$$3^{x-1}+3^x=108.$$

3. (15 баллов). Решить неравенство

$$\log_{2/3}(x+5) \geqslant -1.$$

4. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{5^{\sqrt{1-x}}}{5x} > 5^{\sqrt{1-x}-2}.$$

5. (20 баллов). Найти множество значений функции

$$y=\sin^2 x+\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}+1.$$

6. (20 баллов). При каких значениях параметра k уравнение

$$x-2=kx^3$$

имеет ровно два различных корня? Найти эти два корня.

Вариант 47.2

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{3-2x}=x.$$

2. (15 баллов). Решить уравнение

$$2^x+5\cdot 2^{x-1}=\frac{7}{8}.$$

3. (15 баллов). Решить неравенство

$$\log_{2/5}(x-2)\geqslant -1.$$

4. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{4^{\sqrt{x-2}+1}}{16x}>4^{\sqrt{x-2}-2}.$$

5. (20 баллов). Найти множество значений функции

$$y=2-\cos^2 x-\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}.$$

6. (20 баллов). При каких значениях параметра k уравнение

$$kx^3=3x-4$$

имеет ровно два различных корня? Найти эти два корня.

Вариант 47.3

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{2-x}=x.$$

2. (15 баллов). Решить уравнение

$$7\cdot 6^{x-1}-6^x=\frac{1}{36}.$$

3. (15 баллов). Решить неравенство

$$\log_{2/7}(3+x)\geqslant -1.$$

4. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{10^{\sqrt{x-1}+2}}{x+1}>10^{\sqrt{x-1}+1}.$$

5. (20 баллов). Найти множество значений функции

$$y=13-3\sin^2 x-2\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

6. (20 баллов). При каких значениях параметра k уравнение

$$3x - 10 = kx^3$$

имеет ровно два различных корня? Найти эти два корня.

Вариант 48.1

1. (15 баллов). Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

2. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{3}{x+2} < \frac{1}{4}.$$

3. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x - \sin 2x = 0.$$

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3(x^2-4x+4)} = 2^{3\log_{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}\right)}.$$

5. (20 баллов). Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 4. На первой прямой взяты точки A и K, причём $AK = 1$. На второй прямой взяты точки B и L, причём $BL = 2$, $AB = 4$. Найти тупой угол между AL и BK.

6. (20 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{(3x + 3y - z + a)^2} + (2x^2 + 2y^2 - z)^2 = 0$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

Вариант 48.2

1. (15 баллов). Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16, \\ x - y = 8. \end{cases}$$

2. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{2}{x-1} > \frac{1}{7}.$$

3. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos x.$$

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(4x^2-4x+1)} = 3^{3\log_{1/3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}\right)}.$$

5. (20 баллов). В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 4$. На стороне AD взята точка L, а на стороне CD точка K, причём $AL : LD = 1 : 3$, $CK = KD$. Найти острый угол между прямыми BK и LC.

6. (20 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{(x+y-z+a)^2} + (3x^2+3y^2-z)^2 = 0$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

Вариант 48.3

1. (15 баллов). Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -24, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

2. (15 баллов). Решить неравенство

$$\frac{4}{x+5} > \frac{1}{3}.$$

3. (15 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0.$$

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{7}\right)^{\log_7(x^2-10x+25)} = 3^{5\log_{1/3}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{5-x}}\right)}.$$

5. (20 баллов). В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AC = 3$, $BC = 2$. На катете AC взята точка L, причём $CL = \frac{1}{2}LA$. Найти тупой угол между прямой BL и медианой, проведённой к катету BC.

6. (20 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{(2x+2y-z+a)^2} + (5x^2+5y^2-z)^2 = 0$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

Вариант 49.1

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$|2x-3| = 5.$$

2. (15 баллов). Решить уравнение

$$2\cos\frac{\pi x}{9} + \sqrt{3} = 0.$$

3. (15 баллов). Решить неравенство

$$(4-x^2)\cdot(x-3)^2 \geqslant 0.$$

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{\lg 2+\lg(3^x+9)}{2}=\lg(3^x-3).$$

5. (20 баллов). Решить уравнение

$$\left(100+5^{\frac{3x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{2x+1}}=5.$$

6. (20 баллов). При каких значениях параметра k уравнение

$$\big||x-5|-2\big|+1=kx$$

имеет ровно два различных корня?

Вариант 49.2

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$|1-5x|=16.$$

2. (15 баллов). Решить уравнение

$$1+2\sin\frac{\pi x}{3}=0.$$

3. (15 баллов). Решить неравенство

$$(x+2)^2\cdot(x^2-1)\leqslant 0.$$

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{\lg 4+\lg(4^x+20)}{2}=\lg(4^x-4).$$

5. (20 баллов). Решить уравнение

$$\left(36-3^{\frac{3x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{2x+1}}=3.$$

6. (20 баллов). При каких значениях параметра k уравнение

$$\big||x-7|-3\big|+1=kx$$

имеет ровно два различных корня?

Вариант 49.3

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$|1-4x|=7.$$

2. (15 баллов). Решить уравнение

$$1 + 2\cos\frac{\pi x}{15} = 0.$$

3. (15 баллов). Решить неравенство

$$(9 - x^2)\cdot(x+4)^2 \geqslant 0.$$

4. (15 баллов). Решить уравнение

$$\frac{\lg 2 + \lg(4^x + 16)}{2} = \lg(4^x + 4).$$

5. (20 баллов). Решить уравнение

$$\left(1100 - 0{,}1^{\frac{-3x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{1-2x}} = 0{,}1.$$

6. (20 баллов). При каких значениях параметра k уравнение

$$\big||x-10| - 5\big| + 2 = kx$$

имеет ровно два различных корня?

Вариант 50.1

1. (15 баллов). Решить уравнение

$$2 + \frac{4}{x^2} = \frac{9}{x}.$$

2. (15 баллов). Решить неравенство

$$\sqrt{2x+3} < 2.$$

3. (15 баллов). Решить уравнение

$$\log_{1/3}\left(\log_4(x-5)\right) = -1.$$

4. (15 баллов). Решить неравенство

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-10} < \left(\sqrt{5}-2\right)^{x^2-2x-10}.$$

5. (20 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$\cos x = \log_2(a+1)$$

имеет ровно два различных решения на отрезке $\left[\frac{43\pi}{12}; \frac{13\pi}{3}\right]$?

6. (20 баллов). Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + y^2$ на множестве, заданном системой неравенств

$$\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 5, \\ \frac{x}{2} - 4 \leqslant y \leqslant \frac{3x}{4} - 3. \end{cases}$$

Вариант 50.2

1. (15 баллов). Решить уравнение
$$\frac{7}{x} - 2 = \frac{3}{x^2}.$$
2. (15 баллов). Решить неравенство
$$\sqrt{4-5x} < 7.$$
3. (15 баллов). Решить уравнение
$$\log_{1/2}\left(\log_9(x+4)\right) = 1.$$
4. (15 баллов). Решить неравенство
$$\left(\sqrt{65}+8\right)^{x^2-2x} < \left(\sqrt{65}-8\right)^{-x-4}.$$
5. (20 баллов). При каких значениях параметра a уравнение
$$\sin x = \log_{16}(a-3)$$
имеет ровно два различных решения на отрезке $\left[-\frac{47\pi}{12}; -\frac{19\pi}{6}\right]$?

6. (20 баллов). Найти наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+y^2 на множестве, заданном системой неравенств
$$\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ 3 - \frac{3x}{4} \leqslant y \leqslant \frac{14}{3} - \frac{x}{3}. \end{cases}$$

Вариант 50.3

1. (15 баллов). Решить уравнение
$$1 - \frac{25}{x^2} = \frac{24}{x}.$$
2. (15 баллов). Решить неравенство
$$\sqrt{4-3x} < 5.$$
3. (15 баллов). Решить уравнение
$$\log_3\left(\log_{1/3}(1-2x)\right) = 1.$$
4. (15 баллов). Решить неравенство
$$\left(\sqrt{50}+7\right)^{x^2+2x} < \left(\sqrt{50}-7\right)^{2x-32}.$$
5. (20 баллов). При каких значениях параметра a уравнение
$$\cos x = \log_4(a-1)$$
имеет ровно два различных решения на отрезке $\left[\frac{14\pi}{3}; \frac{65\pi}{12}\right]$?

6. (20 баллов). Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + y^2$ на множестве, заданном системой неравенств

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ 4 + \frac{4x}{3} \leqslant y \leqslant 8. \end{cases}$$

4. Примеры задач вступительных собеседований по математике

4.1. Собеседование для медалистов

1. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x+y=1 \end{cases}$$
имеет единственное решение?
2. При каких значениях параметра a решением неравенства
$$(x-a)^2(x-1)(x+1) \leqslant 0$$
является отрезок?
3. Решить неравенство
$$\log_{(x-1)}(x-3) > 1.$$
4. Найти точное значение выражения:
   а) $\log_{1/\sqrt{3}}(81\sqrt{3})$;
   б) $2^{\frac{1}{5\log_5 2}}$;
   в) $0,001^{\lg 2}$.
5. Доказать, что
$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$
6. Доказать, что
$$5\sin 3x - 3\cos 3x \leqslant \sqrt{34}.$$
7. Решить уравнение
$$\left|\sin x^2\right| = 1.$$
8. Превратить десятичную дробь $0,25137137137\ldots$ в обыкновенную.
9. Найти точное значение обратной величины для числа $0,35(28)$.
10. Доказать, что число $\sin 20^\circ$ иррационально.
11. Найти период функции $\cos(x\sqrt{2})$.
12. Доказать, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.
13. Найти стороны прямоугольного треугольника по его периметру и площади.

14. Доказать, что если углы треугольника ABC удовлетворяют равенству
$$\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0,$$
то один из углов равен 36° или 108°.
15. На некоторый товар сначала цену подняли на 25%, а затем снизили на 25%. Как изменилась в результате цена товара?

4.2. Собеседование для поступающих по договору

1. Решить уравнение
$$-x^2 - 4 - 6x = 0.$$
2. Решить уравнение
$$\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-2} = 1.$$
3. Решить неравенство
$$\frac{1}{1-x} \geqslant x - 3.$$
4. Решить уравнение
$$|x+4| = 2x.$$
5. Решить уравнение
$$|x+2| + |3-x| = 2x - 1.$$
6. Вычислить $\sqrt{(7-5\sqrt{2})^2}$.
7. Решить неравенство
$$x^2 - |16 - x^2| \geqslant 16.$$
8. Решить неравенство
$$\frac{4}{|x+1| - 2} \geqslant |x-1|.$$
9. Решить уравнение
$$\frac{1}{|6 + x - x^2|} = \frac{1}{3-x}.$$
10. Решить уравнение
$$\sqrt{5-x} = -\frac{x}{4}.$$
11. Решить уравнение
$$\sqrt{10-x} - \sqrt{x} = \sqrt{x-5}.$$

12. Решить уравнение
$$(x^2+8x+12)\cdot\sqrt{x+4}=0.$$
13. Решить неравенство
$$\sqrt{4-3x}+x\leqslant 0.$$
14. Решить неравенство
$$\sqrt{6-x}+x>0.$$
15. Решить уравнение
$$2^{x-2}=8\sqrt{2}.$$
16. Решить уравнение
$$\sqrt[4]{125^{3-2x}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5}}.$$
17. Решить неравенство
$$2^{4x}<16.$$
18. Решить неравенство
$$\left(\frac{1}{64}\right)^x\leqslant\sqrt{\frac{1}{8}}.$$
19. Решить уравнение
$$\log_3\frac{x+1}{x}=\log_3\frac{x}{2-x}.$$
20. Решить уравнение
$$\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{1/3}x=6.$$
21. Решить неравенство
$$\log_2(2x-1)>-2.$$
22. Решить неравенство
$$\log_{1/3}(5x-2)\geqslant 0.$$
23. Решить неравенство
$$\log_{0,7}(3-2x)-\log_{0,7}54>\log_{0,7}\frac{1}{2}-\log_{0,7}9.$$
24. Решить неравенство
$$\log_{3x-1}(2x)>1.$$
25. Решить уравнение
$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-1.$$

26. Решить уравнение

$$2\sin(x - 60^\circ) = 1.$$

27. Решить уравнение

$$\sin x = \sin(2x).$$

28. Решить уравнение

$$\cos x = \sin(3x).$$

29. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

30. Решить уравнение

$$\cos^2 x + 3\sin^2 x = 2.$$

5. Задания олимпиады МГТУ ГА по математике для абитуриентов

5.1. Олимпиада 1998 г.

Вариант I

1. Сколько диагоналей в выпуклом 7-угольнике? В выпуклом n-угольнике?
2. Изобразить на плоскости решение неравенства
$$(|x| + |y| - 2)(|x + y| + |x - y| - 2)(x^2 + y^2 - 1) < 0.$$
3. Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 + 2n$ делится на 3.
4. Решить неравенство
$$-\frac{3}{4} \leqslant \sin^2 x \leqslant \frac{1}{2}.$$
5. Найти длину кратчайшего пути, ведущего по поверхности куба с ребром 1 из одной вершины в противоположную.

Вариант II

1. Из школы NN в МГТУ ГА поступало 4 человека (А.,Б.,...). Часть из них поступила, а другая нет. Сколько всего вариантов может тут быть по составу поступивших? Тот же вопрос для 10 человек.
2. Изобразить на плоскости решение неравенства
$$(|y| - 4 + x^2)(|x| + |y| - 2)(x^2 + y^2 - 2) < 0.$$
3. Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.
4. Решить неравенство
$$\log_{\sin x} \cos x < 0.$$
5. Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

5.2. Олимпиада 1999 г.

Вариант I

1. Решить уравнение
$$\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{0,5+\sin^2 7x}=3.$$
2. Решить уравнение
$$\left|\log_{0,3}(x^2-5x+6)\right|-\log_{0,3}(x^2-5x+6)=0.$$
3. Найти наибольшее значение функции $\sin(\sin(2x))$.
4. Все стороны четырёхугольника имеют длину не больше 7. Доказать, что площадь четырёхугольника строго меньше 53.
5. При каких a уравнение
$$x(x+1)(x+2)(x+3)=a$$
имеет не меньше трёх отрицательных корней?

Вариант II

1. Решить уравнение
$$\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 5x}+\frac{1}{0,5+\operatorname{tg}^2 x}=4.$$
2. Решить уравнение
$$\left|\log_{2,3}(x^2-3x+2)\right|+\log_{2,3}(x^2-3x+2)=0.$$
3. Найти наименьшее значение функции $\cos(\cos(\pi/4-x))$.
4. Известно, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены неравенства
$$AB>A_1B_1,\quad CB>C_1B_1,\quad AC>A_1C_1.$$
Следует ли из этого, что $S_{ABC}>S_{A_1B_1C_1}$? Ответ обосновать.
5. При каких a уравнение
$$x(x-2)(x-4)(x-6)=a$$
имеет не меньше трёх положительных корней?

5.3. Олимпиада 2000 г.

Вариант I

1. Сколько существует таких пятизначных цифр, у которых каждая последующая цифра больше предыдущей?
2. Доказать, что $\sqrt[3]{13}$ есть число иррациональное.
3. Указать точное значение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\frac{6\pi}{7}))$.
4. Решить неравенство

$$\log_{x^2-6x+8}(x^2-8x+15)>1.$$

5. При каких значениях параметра k уравнение

$$\frac{1}{1+\sin^2(x-1)}+4\sin^2(x-1)=k$$

имеет решение? И сколько их?

Вариант II

1. Сколько существует пятизначных телефонных номеров, содержащих комбинацию „12“? (Номера, начинающиеся на „0“, не допускаются.)
2. Доказать, что $\log_2 5$ есть число иррациональное.
3. Указать точное значение $\arccos(\cos(\frac{7\pi}{4}))$.
4. Решить неравенство

$$\log_{|x-3|}|x^2-5x+6|<2.$$

5. При каких значениях параметра k уравнение

$$4^{\operatorname{arctg}x}+4^{1-\operatorname{arctg}x}=k$$

имеет решение? И сколько их?

5.4. Олимпиада 2001 г.

Вариант I

1. Построить график функции
$$y = \sin(\arcsin x).$$
2. Найти углы треугольника, у которого центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон.
3. Решить уравнение
$$\sin\left(\frac{5x}{4}\right) + \cos x = 2.$$
4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_2 x + 2\log_2 y = 3, \\ x^2 + y^4 = 16. \end{cases}$$
5. Найти скорость и длину поезда, который прошёл мимо семафора за 5 секунд, а мимо платформы длиной 378 метров за 25 секунд.

Вариант II

1. Построить график функции
$$y = 2^{2\log_2(\sin x)}.$$
2. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит боковые стороны?
3. Решить уравнение
$$2\sin x - 3y^2 = 2.$$
4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 625^3. \end{cases}$$
5. Определить те точные моменты времени между 16^{00} и 17^{00}, когда часовая и минутные стрелки находятся на одной прямой.

5.5. Олимпиада 2002 г.

Вариант I

1. Найти все целые числа n, удовлетворяющие неравенству
$$\log_{2\cos\frac{2\pi}{7}-n+8}\left(\frac{\sqrt{n+5}-1}{\sqrt{10-n}}\right)\geqslant 0.$$
2. Найти все решения уравнения
$$9\sin^2 x-5\sin x\sin 2x+17\cos x-11=0,$$
которые являются также решениями уравнения
$$5\cos^3 x-3\sin^2 x+8\cos x-1=0.$$
3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{9\sqrt{3}}{\cos a}+36=0$$
имеет единственное решение.
4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1,2, ...,2002, чтобы сумма двух любых выбранных чисел делилась на 26?
5. Внутри куба, ребро которого равно 13, выбраны 2002 точки. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

Вариант II

1. Найти все целые числа n, удовлетворяющие неравенству
$$\log_{4\sin\frac{\pi}{5}-n+10}\left(\frac{\sqrt{15-n}}{1+\sqrt{n+12}}\right)\leqslant 0.$$
2. Найти все решения уравнения
$$3\sin^3 x-3\cos^2 x+7\sin x-\cos 2x+1=0,$$
которые являются также решениями уравнения
$$\cos^2 x+3\cos x\sin 2x-8\sin x=0.$$
3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2+\frac{2x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{1}{\cos a}+2\sqrt{2}=0$$
имеет единственное решение.

4. Выберем некоторое количество клеток шахматной доски (8×8) так, чтобы они, оставаясь на своих местах, образовывали квадрат. Сколько различных по величине или по расположению квадратов можно получить таким образом?
5. На плоскости отмечены точки с целочисленными координатами. Доказать, что найдётся окружность, внутри которой лежат ровно 2002 отмеченные точки.

5.6. Олимпиада 2003 г.

Вариант I

1. Какое из чисел $\sin 0{,}01^\circ$ или $\operatorname{tg} 0{,}01^\circ$ больше?
2. Решить уравнение
$$\sqrt{4-x}\cdot 4^{\log_2 x} + \log_3(x-2) = 9, \quad x \text{ — целое число.}$$
3. Докажите, что для функции
$$f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$$
справедливо неравенство $f(x) < 0{,}77$.
4. При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_{(a-4)(10-a)}(-x^2+4x-3) = \log_{(a-4)(10-a)}((x-0{,}25a-1)(x-0{,}5a-2))$$
имеет единственное решение?
5. В треугольнике ABC одна из сторон в два раза больше другой, а угол C в два раза меньше угла B. Найти углы треугольника.

Вариант II

1. Какое из чисел $\sin 0{,}02^\circ$ или $2\sin 0{,}01^\circ$ меньше?
2. Решить уравнение
$$\sqrt{7-2x}\cdot 8^{\log_4 x} + \log_3\left(2-\frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{8-x}, \quad x \text{ — целое число.}$$
3. Докажите, что для функции
$$f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$$
справедливо неравенство $f(x) > -\frac{7}{9}$.

4. При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_{(a-4)(9-a)}\left(\left(x-\frac{a}{4}-2\right)\left(x-\frac{a}{8}-3\right)\right)=\log_{(a-4)(9-a)}(-x^2+6x-8)$$
имеет единственное решение?
5. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла A, а одна из сторон в два раза меньше другой. Найти углы треугольника.

5.7. Олимпиада 2004 г.

Вариант I

1. Можно ли записать в строку 26 целых чисел так, чтобы сумма любых четырёх последовательных чисел была положительна, а сумма всех 26 чисел была отрицательна?
2. Найдите все значения x, для каждого из которых выражение
$$\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin\left(\pi(2x+16x^2)\right)$$
имеет смысл и не обращается в ноль.
3. Точка K расположена между двумя параллельными прямыми на расстоянии 2 и 5 от них. Эта точка служит вершиной угла, равного 38°, всевозможных треугольников, две другие вершины которых лежат по одной на данных прямых. Найдите наименьшее значение площади таких треугольников.
4. Постройте на плоскости $(x;y)$ множество точек, таких что
$$\max\{x,y\}=\min\{|x|,|y|\},$$
где $\max\{a,b\}$ — максимум из чисел a и b, $\min\{a,b\}$ — минимум из чисел a и b.
5. Докажите, что при всех a и b имеет место неравенство
$$\frac{6^a}{36^{a+1}+1}\leqslant\frac{5}{6}-b+\frac{1}{3}b^2,$$
и определите, при каких a и b достигается равенство.

Вариант II

1. Можно ли записать в строку 28 целых чисел так, чтобы сумма любых пяти последовательных чисел была отрицательна, а сумма всех 28 чисел была положительна?

2. Найдите все значения x, для каждого из которых выражение
$$\sqrt{3x^4 - 2 - x^8} \cdot \sin\big(\pi(2x - 13x^2)\big)$$
имеет смысл и не обращается в ноль.
3. Точка N расположена между двумя параллельными прямыми на расстоянии 4 и 3 от них. Эта точка служит вершиной угла, равного 54°, всевозможных треугольников, две другие вершины которых лежат по одной на данных прямых. Найдите наименьшее значение площади таких треугольников.
4. Постройте на плоскости $(x; y)$ множество точек, таких что
$$\min\{x, y\} = -\max\{|x|, |y|\},$$
где $\min\{a, b\}$ — минимум из чисел a и b, $\max\{a, b\}$ — максимум из чисел a и b.
5. Докажите, что при всех a и b имеет место неравенство
$$\frac{5^{b+1}}{5^{2b} + 25} \leqslant 13 - 5a + \frac{1}{2}a^2,$$
и определите, при каких a и b достигается равенство.

5.8. Олимпиада 2005 г.

Вариант I

1. Решите систему
$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 = 0, \\ 1 - x_2x_3 = 0, \\ 1 - x_3x_4 = 0, \\ 1 - x_4x_5 = 0, \\ 1 - x_5x_1 = 0. \end{cases}$$
2. Вычислите $\log_{45} 25$, если $\log_{15} 27 = a$.
3. Площадь равнобедренного треугольника равна 1. Докажите, что длина его боковой стороны не менее $\sqrt{2}$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \sin x + \frac{x}{|x|} = \sin y + \frac{y}{|y|}, \\ xy < 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения a, такие что для любого b существует c, что при единственном d выполнено равенство
$$(a-2)d^3 + bcd^2(4-a^2) = (c^2-2)d.$$

Вариант II

1. Решите систему
$$\begin{cases} x_1x_2 = 1, \\ x_2x_3 = 1, \\ x_3x_4 = 1, \\ x_4x_1 = 1, \\ x_1 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{1}{x_4} = 1. \end{cases}$$
2. Вычислите $\log_6 8$, если $\log_{18} 81 = a$.
3. Площадь параллелограмма равна 1. Докажите, что длина его большей диагонали не менее $\sqrt{2}$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \frac{|x|}{x} - \cos x = \cos y - \frac{|y|}{y}, \\ xy > 0. \end{cases}$$
5. Найдите все значения a, такие что для любого b существует c, что при единственном d выполнено равенство
$$(a+3)d^3 + (c^2-1)d = bcd^2(9-a^2).$$

5.9. Олимпиада 2006 г.

Вариант I

1. Решить уравнение
$$(\sin x)^{\cos x} = 1.$$
2. Найти все значения x, при которых не существует y, задаваемый формулой
$$y = \log_{5-x}(x^2-7).$$
3. Разложить многочлен на множители
$$x^3 + (1+\sqrt{5})x^2 - 5.$$

4. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках M и N. Докажите, что угол MAN прямой.
5. Найти остаток от деления числа 2006^{6002} на 11.

Вариант II

1. Решить уравнение
$$(\cos x)^{\sin x} = 1.$$
2. Найти все значения x, при которых не существует y, задаваемый формулой
$$y = \log_{10-x^2}(x+2).$$
3. Разложить многочлен на множители
$$x^3 - (\sqrt{7}+1)x^2 + 7.$$
4. Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB касается меньшей окружности в точке P. Докажите, что луч SP делит угол ASB пополам.
5. Найти остаток от деления числа 6002^{2006} на 13.

5.10. Олимпиада 2007 г.

Вариант I

1. Решить в целых числах систему
$$\begin{cases} x \leqslant y \leqslant z, \\ x+y+z = 3, \\ |x+y-z| = 1. \end{cases}$$
2. Первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической прогрессии, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической прогрессии. Произведение пятого члена арифметической прогрессии на разность второго и четвёртого членов геометрической прогрессии равно нулю. Найти разность между суммой шести первых членов геометрической прогрессии и суммой четырёх первых членов арифметической прогрессии, если в арифметической прогрессии нет отрицательных членов.

3. На поле чудес росли золотые монеты. Ночью Карабас-Барабас сорвал часть монет, однако днём на поле выросли новые монеты, и число монет на поле стало в 2 раза больше, чем оставалось после набега Карабаса-Барабаса. На следующую ночь Карабас-Барабас снова сорвал часть монет, а днём число монет опять удвоилось по сравнению с тем, что оставил Карабас-Барабас. На пятую такую ночь он собрал с поля последние 20 монет. Сколько монет было на поле первоначально, если каждую ночь Карабас-Барабас собирал на 10 монет меньше, чем в предыдущую ночь?
4. Решить неравенство $2007^{\sin x} \leqslant 9009^{\sin x} - 7002^{\sin x}$.
5. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 2 см, а угол при основании равен 80°. Найти минимальный периметр выпуклого четырёхугольника, одна из вершин которого является точкой пересечения биссектрис треугольника, а три другие вершины лежат на сторонах треугольника (по одной на каждой стороне).

Вариант II

1. Решить в целых числах систему
$$\begin{cases} x \leqslant y \leqslant 2x, \\ x + y + z = 2, \\ |x + y - z| = 2. \end{cases}$$
2. Разность арифметической прогрессии равна первому члену геометрической прогрессии, а знаменатель геометрической прогрессии равен первому члену арифметической прогрессии. Произведение четвёртого члена арифметической прогрессии на разность третьего и пятого членов геометрической прогрессии равно нулю. Найти разность между суммой пяти первых членов арифметической прогрессии и суммой десяти первых членов геометрической прогрессии, если в геометрической прогрессии нет отрицательных членов.
3. На золотой яблоне росли золотые яблоки. Ночью Кащей сорвал с яблони половину яблок, но днём на яблоне выросло ещё некоторое количество яблок. Следующей ночью Кащей снова сорвал половину яблок, а днём на яблоне опять появились новые яблоки. После пятой такой ночи на яблоне осталось 20 яблок, а следующим днём уже ничего не выросло. Сколько яблок было на яблоне первоначально, если каждый день на яблоне вырастало на 10 яблок меньше, чем в предыдущий день?
4. Решить неравенство $2007^{\cos x} \leqslant 7002^{\cos x} - 4995^{\cos x}$.

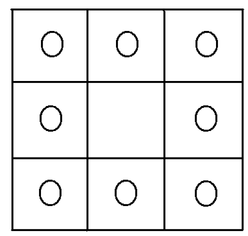
5. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 4 см, а угол при вершине равен 20°. Найти минимальный периметр выпуклого четырёхугольника, три вершины которого лежат на сторонах треугольника (по одной на каждой стороне), а четвёртая вершина является точкой пересечения биссектрис треугольника.

6. Задания окружного этапа московской региональной олимпиады по математике для школьников 11 класса

6.1. Олимпиада 2008 г.

Вариант I

1. Доказать, что сумма двух последовательных натуральных чисел нечётна.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax + by + c = 0$, проходит через I, II и III координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа ab.
3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза больше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 3 раза меньше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 2 раза больше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.



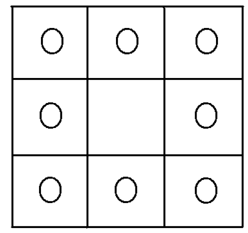
Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение
$$f(g(x+1)) = 3, \quad \text{где } f(x) = \frac{|2x-1|}{2}, \quad g(x) = |3x+2|.$$
5. Около некоторой окружности начерчены 6 окружностей радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R; и начерчены 4 окружности радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r. Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение R/r.
6. При каких значениях параметра α графики
$$xy - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = 8\sin^2\alpha$$

разбивают плоскость ровно на 7 частей?

Вариант II

1. Доказать, что произведение двух нечётных чисел нечётно.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax + by + c = 0$, проходит через I, III и IV координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа bc.
3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза меньше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 2 раза больше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 3 раза больше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.



Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение
$$g(f(x-2)) = 1, \quad \text{где } f(x) = |4x+1|, \quad g(x) = \frac{|2x-3|}{5}.$$
5. Около некоторой окружности начерчены 3 окружности радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R; и начерчены 6 окружностей радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r. Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение r/R.
6. При каких значениях параметра α графики
$$xy + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{8}{3}\cos^2\alpha$$
разбивают плоскость ровно на 4 части?

7. Решения, указания и ответы

7.1. Экзаменационные билеты 1997 г.

Вариант 1.1

Ответы:

Задача 1. $(-1; 0)$.

Задача 2. 5 см.

Задача 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. 1; $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$.

Задача 5. 3; 4; 5;...

Вариант 1.2

Ответы:

Задача 1. $(0; 1)$.

Задача 2. Большее основание равно 13 см, средняя линия равна 9 см.

Задача 3. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. 1; $\frac{5}{2}$. `Указание.` Сократив обе дроби на x, сделайте замену $y = 2x + \frac{5}{x}$.

Задача 5. 3; 4; 5;...

Вариант 1.3

Ответы:

Задача 1. $(0; 3)$.

Задача 2. $2r\cos\frac{\alpha}{2}$.

Задача 3.

Задача 4. $-2 \pm \sqrt{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. `Указание.` Это возвратное уравнение четвёртой степени решается делением на $x^2 \neq 0$ и заменой $y = x + \frac{1}{x}$.

Задача 5. -3; -4; -5;...

Вариант 2.1

Ответы:

Задача 1. $1; \frac{1}{6}$.

Задача 2. $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задача 3. $\pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, возможны любые сочетания верхних и нижних знаков.

Задача 4.

Задача 5. 4.

Вариант 2.2

Ответы:

Задача 1. $2; \frac{7}{4}$.

Задача 2. $(6;8)$; $(8;6)$.

Задача 3. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 4.

Задача 5. 1.

Вариант 2.3

Ответы:

Задача 1. $1, -\frac{17}{15}$.

Задача 2. $(-2;2)$.

Задача 3. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 4.

Задача 5. 5.

Вариант 3.1

Ответы:

Задача 1. $\frac{11}{2}$.

Задача 2. $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Задача 3. 60°.

Задача 4. `Указание.` Положив $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x - x+\frac{\pi}{3}$, доказать, что $f'(x)<0$ при $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$.

Задача 5. $x=2$, $y=-2\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 3.2

Ответы:

Задача 1. $\frac{5}{2}$.

Задача 2. $[-7; 3]$.

Задача 3. 45°.

Задача 4. `Указание.` Положив $f(x) = 6x - \pi + 3\sin 2x - 6\sqrt{3}\cos^2 x$, доказать, что $f'(x) > 0$ при $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 5. $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 3.3

Ответы:

Задача 1. -3.

Задача 2. $(-\sqrt{2}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup \{3\}$.

Задача 3. 150°.

Задача 4. `Указание.` Положив $f(x) = \cos(2x) - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2x$, доказать, что $f'(x) = 2\sin(2x) - 2\cos(2x) + 2 < 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Задача 5. $x = -1$, $y = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 4.1

Ответы:

Задача 1. Точка $(1; -12)$; уравнение касательной $y = x - 13$.

Задача 2. $\log_{0,3} 3$.

Задача 3. 1.

Задача 4. 2.

Задача 5. $(0; 0)$; $(1; 0)$.

Вариант 4.2

Ответы:

Задача 1. Точка $(-2; -12)$; уравнение касательной $y = -x - 14$.

Задача 2. 3.

Задача 3. $\frac{5}{4}$.

Задача 4. 3.

Задача 5. $(1; 0)$; $(0; b$, где b такое, что $b = \cos b$.

Вариант 4.3

Ответы:

Задача 1. Точки $(1;0)$ и $\left(-\frac{1}{3};-\frac{44}{27}\right)$; уравнения касательных $y=3x-3$ и $y=3x-\frac{17}{27}$.

Задача 2. $-\log_2\frac{9}{4}$.

Задача 3. 2.

Задача 4. 2.

Задача 5. $(1;0)$. `Указание.` Рассмотрите бесконечно убывающий x.

Вариант 5.1

Ответы:

Задача 1. $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Задача 2. $\frac{1}{4}$; 2.

Задача 3. $q=\frac{2}{9}p^2$.

Задача 4. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AB.

Задача 5. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Вариант 5.2

Ответы:

Задача 1. $(1;3)$.

Задача 2. $\pm\frac{1}{9}$; ±1.

Задача 3. ±1.

Задача 4. 32.

Задача 5. $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};0\right)\cup\left(0;\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Вариант 5.3

Ответы:

Задача 1. $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.

Задача 2. $\frac{1}{2}$; 64.

Задача 3. -3; 9.

Задача 4. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AB.

Задача 5. $\left(-\infty;-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\cup\left(\frac{3}{\sqrt{14}};+\infty\right)$.

7.2. Экзаменационные билеты 1998 г.

Вариант 6.1

Ответы:

Задача 1. $(1;2)$; $(-1;-2)$; $(1;-2)$; $(-1;2)$.

Задача 2. $[1;3)\cup(3;+\infty)$.

Задача 3. 46 см.

Задача 4. $\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$.

Задача 5. Наименьшее значение равно $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$; достигается при $x = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $y=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $z=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Вариант 6.2

Ответы:

Задача 1. $(4;2)$; $(4;-2)$; $(-4;2)$; $(-4;-2)$.

Задача 2. $(\log_3(16{,}2);4)$.

Задача 3. $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$.

Задача 4. $\sqrt{2}$. `Указание.` Сделать проверку и отбросить посторонние корни 0 и $-\sqrt{2}$.

Задача 5. Наименьшее значение равно $-2\sqrt{3}$; достигается при $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $c=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 6.3

Ответы:

Задача 1. $(2;1)$; $(2;-1)$.

Задача 2. $(-1;3]$.

Задача 3. $\frac{6a^2}{(\sqrt{3}+2)^2}$.

Задача 4. -2; -3.

Задача 5. Наименьшее значение равно $-\frac{8}{\sqrt{3}}$; достигается при $p=-\frac{\sqrt{3}}{6}$; $q=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $r=\sqrt{3}$.

Вариант 7.1

Ответы:

Задача 1. 7,5.

Задача 2. $\left(\frac{2}{3};2\right)$.

Задача 3. $C = \begin{cases} \frac{-2x^2+2x-3}{x} & \text{при } x \in (-\infty; 0), \\ \frac{2x+3}{x} & \text{при } x \in (0; 2), \\ \frac{2x^2-2x+3}{x} & \text{при } x \in [2; +\infty). \end{cases}$

Задача 4. $R/6$.

Задача 5. $\left[-1; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$.

Вариант 7.2

Ответы:

Задача 1. 2,5.

Задача 2. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Задача 3. $D = \begin{cases} (x-6)(x+2) & \text{при } x \in (-\infty; 2), \\ (x+2)^2 & \text{при } x \in (2; +\infty). \end{cases}$

Задача 4. $a/5$.

Задача 5. $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{6}; 1\right]$.

Вариант 7.3

Ответы:

Задача 1. $\frac{5}{4}$.

Задача 2. $\left(\frac{7}{5}; 3\right)$.

Задача 3. $E = \begin{cases} -x-1 & \text{при } x \in (-\infty; -1), \\ x+1 & \text{при } x \in [-1; 1], \\ (x+1)(2x-1) & \text{при } x \in (1; +\infty). \end{cases}$

Задача 4. $\frac{25\pi}{9}$.

Задача 5. $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \frac{2}{3}\right]$.

Вариант 8.1

Ответы:

Задача 1. $[5; 11]$.

Задача 2. 5 см и 15 см.

Задача 3. $2\sqrt{5} + 4$.

Задача 4. $x = \pi n$; $y = \frac{\pi k}{2}$; $z = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \ell}{3}$, $n, k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Вариант 8.2

Ответы:

Задача 1. $(-\infty; -23)$.

Задача 2. $3\sqrt{3}$ см^2.

Задача 3. $\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$.

Задача 4. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $y = \pi k$; $z = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\ell}{2}$, $n, k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $\left[-\frac{1}{8}; 0\right]$.

Вариант 8.3

Ответы:

Задача 1. $[1{,}5; 2]$.

Задача 2. 600.

Задача 3. $2\sqrt{5} - 2$.

Задача 4. $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $y = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$; $z = \frac{2\pi\ell}{5}$, $n, k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $\left[-\frac{5}{4}; -1\right]$.

Вариант 9.1

Ответы:

Задача 1. 100° и 50°.

Задача 2. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. `Указание.` Возведите неравенство в куб.

Задача 4. $\left[-\frac{8}{3}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right) \cup (2; 3]$.

Задача 5. $\frac{1}{3}$.

Вариант 9.2

Ответы:

Задача 1. 85°.

Задача 2. $\frac{\pi}{3} + \pi n$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. `Указание.` Возведите неравенство в куб.

Задача 4. $[-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; \pi) \cup \left(\pi; \frac{16}{5}\right]$.

Задача 5. $-\frac{1}{2}$.

Вариант 9.3

Ответы:

Задача 1. 72°.

Задача 2. $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. `Указание`. Возведите неравенство в куб.

Задача 4. $\left[-5; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right]$.

Задача 5. $-\frac{1}{2}$.

Вариант 10.1

Ответы:

Задача 1. $\frac{\pi}{12} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. `Указание`. Докажите, что $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Задача 3. $(3; 2)$.

Задача 4. Площади равны $\frac{1}{2}\left(S - P - Q + \sqrt{(S-P-Q)^2 - 4PQ}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(S - P - Q - \sqrt{(S-P-Q)^2 - 4PQ}\right)$.

Задача 5. $[-15; -5] \cup \{1\}$.

Вариант 10.2

Ответы:

Задача 1. $-\frac{\pi}{12} \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. `Указание`. Докажите, что $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Задача 3. $(6; 6)$.

Задача 4. Углы равны $\arcsin\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Задача 5. $\left\{-\frac{1}{5}\right\} \cup (1; 3]$.

Вариант 10.3

Ответы:

Задача 1. $(1 + (-1)^n) \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. `Указание`. Докажите, что $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Задача 3. $(4; 2)$; $(-4; 2)$.

Задача 4. $\sqrt{a^2 + \left(\frac{b - a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}$.

Задача 5. $[-15; -5] \cup \{1\}$.

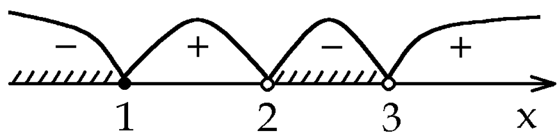
7.3. Экзаменационные билеты 1999 г.

Вариант 11.1

Задача 1. Решаем неравенство методом интервалов

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0.$$

Отметим нуль числителя $x=1$ и нули знаменателя $x=2$, $x=3$ на координатной прямой. Так как $x=2$ и $x=3$ не входят в ОДЗ, то эти точки „выкалываем“. Получим 4 промежутка. В каждом из них определим знак дроби $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$. В соответствии со знаком неравенства ($\leqslant$) выписываем ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup (2; 3)$.



Ответ: $(-\infty; 1] \cup (2; 3)$.

Задача 2. ОДЗ уравнения задаётся условиями $x > 0$, $x \neq 1$. По свойству логарифмов

$$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}.$$

Исходное уравнение примет вид

$$3 + \frac{2}{\log_3 x} = 2\log_3 x.$$

Обозначив $t = \log_3 x$, получим уравнение $3 + \frac{2}{t} = 2t$, которое сводится к квадратному уравнению

$$2t^2 - 3t - 2 = 0,\ t \neq 0,$$

имеющему дискриминант $D = 9 + 16 = 25 = 5^2$ и корни

$$t_1 = \frac{3+5}{4} = 2, \quad t_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

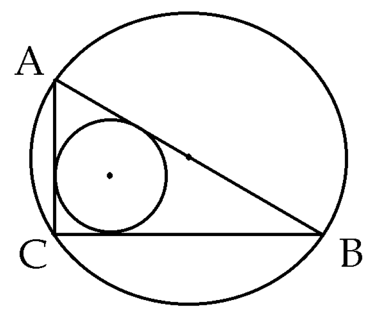
Возвращаясь к x, получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$$

Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $9; \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 3. Рассмотрим $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$. Пусть R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, $\angle A = \alpha$. Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то $AB = 2R$, тогда



$$AC = 2R\cos\alpha, \quad BC = 2R\sin\alpha.$$

Известно, что для прямоугольного треугольника

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2}, \text{ следовательно, } r = R(\cos\alpha + \sin\alpha - 1).$$

Отношение

$$\frac{r}{R} = \cos\alpha + \sin\alpha - 1 = f(\alpha)$$

есть функция от α, где $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, так как α — острый угол треугольника. Вычислим производную

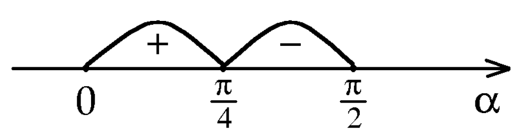
$$f'(\alpha) = (\cos\alpha + \sin\alpha - 1)' = -\sin\alpha + \cos\alpha.$$

Критические точки находим из условия $f'(\alpha) = 0$.

$$-\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = 1, \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то получаем одно значение $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Отметим точку $\alpha = \frac{\pi}{4}$ на координатной прямой и определим знак функции $f'(\alpha)$ на каждом из двух полученных интервалов. Функция $f(\alpha)$ возрастает на $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, убывает на $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, в точке $x = \frac{\pi}{4}$ имеет максимум. Следовательно, $f_{\text{наибольшее}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.



Искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$, тогда $\angle B = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

Задача 4. ОДЗ неравенства задаётся системой

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ 3x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

Перенесём $\sqrt{3x}$ в левую часть, а 1 в правую часть неравенства:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}\geqslant 2x-1.$$

Заметим, что

$$2x-1=3x-(x+1)=\left(\sqrt{3x}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2.$$

Исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}\geqslant\left(\sqrt{3x}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2.$$

Обозначив $u=\sqrt{x+1}$, $v=\sqrt{3x}$, получим

$$u-v\geqslant v^2-u^2\Leftrightarrow(u-v)+(u^2-v^2)\geqslant 0\Leftrightarrow(u-v)(1+u+v)\geqslant 0.$$

Так как $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, то $1+u+v>0$. Следовательно, должно выполняться $u-v\geqslant 0$, то есть $u\geqslant v$. Возвратившись к исходной переменной, имеем

$$\sqrt{x+1}\geqslant\sqrt{3x}.$$

Квадратный корень всегда неотрицателен, поэтому можем возвести обе части неравенства в квадрат, получаем $x+1\geqslant 3x$, откуда $x\leqslant\frac{1}{2}$.

С учётом ОДЗ окончательно имеем

$$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Ответ: $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Задача 5. Так как $\sin^2\pi x\geqslant 0$, $\sin^2\pi y\geqslant 0$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$, то уравнение

$$\sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0$$

равносильно системе

$$\begin{cases}\sin\pi x=0,\\ \sin\pi y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\pi x=\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ \pi y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x,y\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению целых x и y, удовлетворяющих уравнению

$$2x^2-y^2-xy+2x+y=10.$$

Разложим левую часть на множители.

$$2x^2-y^2-xy+2x+y=(2x^2-2xy+2x)+(xy-y^2+y)=$$
$$=2x(x-y+1)+y(x-y+1)=(2x+y)(x-y+1).$$

Так как $x,y\in\mathbb{Z}$, то $(2x+y)\in\mathbb{Z}$ и $(x-y+1)\in\mathbb{Z}$. Значит, $(2x+y)$ и $(x-y+1)$ являются целыми делителями числа 10.

Возможны следующие 8 случаев.

1. $\begin{cases} 2x+y=2, \\ x-y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x-y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ x-y+1=-5 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{8}{3} \Rightarrow$ целых решений нет.

4. $\begin{cases} 2x+y=-5, \\ x-y+1=-2 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{8}{3} \Rightarrow$ целых решений нет.

5. $\begin{cases} 2x+y=10, \\ x-y+1=1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{10}{3} \Rightarrow$ целых решений нет.

6. $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-y+1=10 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{10}{3} \Rightarrow$ целых решений нет.

7. $\begin{cases} 2x+y=-10, \\ x-y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4, \\ y=-2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x+y=-1, \\ x-y+1=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4, \\ y=7. \end{cases}$

Ответ: $(2;-2); (2;1); (-4;-2); (-4;7)$.

Вариант 11.2

Ответы:

Задача 1. $(-\infty;2]\cup(3;4)$.

Задача 2. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; 8$.

Задача 3. $b=\frac{ka}{\sqrt{k^2+1-2k\cos\alpha}}$, $c=\frac{a}{\sqrt{k^2+1-2k\cos\alpha}}$, $\angle B=\arcsin\left(\frac{k\sin\alpha}{\sqrt{k^2+1-2k\cos\alpha}}\right)$.

Задача 4. $\left[-\frac{1}{7};\frac{1}{2}\right]$.

Задача 5. $(3;1)$; $(-5;13)$; $(-5;3)$; $(3;-9)$; $(19;-17)$; $(-21;43)$; $(-21;21)$; $(19;-39)$.

Вариант 11.3

Ответы:

Задача 1. $(-\infty;-1]\cup(0;2)$.

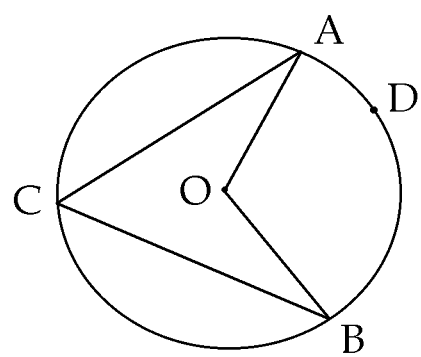
Задача 2. $9; \frac{1}{243}$.

Задача 3. $BC = \frac{S}{2} - r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\angle C = \arcsin\left(\frac{S+r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\sqrt{\left(\frac{S}{r}+r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{8S}{\sin\alpha}}}{S-r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)$, $\angle B = 180^\circ - \alpha - \arcsin\left(\frac{S+r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\sqrt{\left(\frac{S}{r}+r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{8S}{\sin\alpha}}}{S-r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Задача 4. $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{4}{11}\right)$.

Задача 5. $(2;2)$; $(-4;2)$.

Вариант 12.1



Задача 1. По условию имеем отношение угловых величин $\overset{\smile}{ADB} : \overset{\smile}{ACB} = 5 : 7$. Пусть x — одна часть. Тогда $\overset{\smile}{ADB} = 5x$, $\overset{\smile}{ACB} = 7x$. Вся окружность составляет 360°, следовательно, $5x + 7x = 360^\circ$, откуда $x = 30^\circ$. Меньшая дуга $\overset{\smile}{ADB} = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$, поэтому соответствующий ей угол $\angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{ADB}$

Ответ: 75°.

Задача 2. По формуле приведения $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - 9x\right) = -\cos 9x$, поэтому исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0.$$

Для преобразования разности $\cos 5x - \cos 9x$ в произведение воспользуемся формулой

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Имеем

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - 2\sin\left(\frac{5x+9x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-9x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + 2\sin 7x\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x\left(\sqrt{3} + 2\sin 7x\right) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sqrt{3} + 2\sin 7x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \sin 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}, \\ 7x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{21} + \frac{\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{21} + \frac{\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$(a+2)x^2 - ax - a = 0, \quad \text{где } a \neq -2.$$

Согласно теореме Виета имеем

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{a}{a+2}, \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{a+2}. \end{array}\right.$$

Из симметрии корней x_1 и x_2 относительно $x = 1$ следует, что число 1 является серединой отрезка $[x_1; x_2]$, следовательно, $\frac{x_1+x_2}{2} = 1$. Получаем систему уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и a.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{a}{a+2}, \\ x_1 x_2 = -\frac{a}{a+2}, \\ \frac{x_1+x_2}{2} = 1. \end{array}\right.$$

Решая совместно первое и третье уравнения, найдём a.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{a}{a+2}, \\ \frac{x_1+x_2}{2} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{a}{a+2} = 2 \Rightarrow a = 2a + 4 \Rightarrow a = -4.$$

Подставим $a = -4$ во второе уравнение и решим систему.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 - x_2, \\ (2 - x_2)x_2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 - x_2, \\ -x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение имеет корни

$$x_2^{(1)} = \frac{-2 + \sqrt{12}}{-2} = 1 - \sqrt{3} \text{ и } x_2^{(2)} = \frac{-2 - \sqrt{12}}{-2} = 1 + \sqrt{3}.$$

Соответственно

$$x_1^{(1)} = 2 - x_2^{(1)} = 1 + \sqrt{3}, \quad x_1^{(2)} = 2 - x_2^{(2)} = 1 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $a = -4$, корни $1 - \sqrt{3}$ и $1 + \sqrt{3}$.

Задача 4. Область определения функции $F(x)$ задаётся системой

$$\begin{cases} \cos\pi x \neq 0, \\ \arcsin(2^x-1) > 0, \\ -1 \leqslant 2^x - 1 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ \arcsin(2^x-1) > \arcsin 0, \\ 0 \leqslant 2^x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 2^x - 1 > 0, \\ 2^x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 2^x > 2^0, \\ 2^x \leqslant 2^1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x > 0, \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right].$$

При решении второго и третьего неравенств мы использовали тот факт, что функции $y = \arcsin x$ и $y = 2^x$ являются возрастающими, следовательно, для каждой из них большему значению функции соответствует большее значение аргумента.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Задача 5. ОДЗ неравенства задаётся системой

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z + 3 > 0, \\ 3x - 5y + 2z - 2 > 0, \\ 2y + 4z - 5x + 2 > 0. \end{cases}$$

Так как $x, y, z \in \mathbb{Z}$, то все аргументы логарифмов являются целыми числами. Следовательно, в силу положительности, каждый аргумент логарифма больше или равен единице.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z + 3 \geqslant 1, \\ 3x - 5y + 2z - 2 \geqslant 1, \\ 2y + 4z - 5x + 2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Заметим, что сумма

$$(2x + 3y - 6z + 3) + (3x - 5y + 2z - 2) + (2y + 4z - 5x + 2) = 3.$$

Поэтому находим, что

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z + 3 = 1, \\ 3x - 5y + 2z - 2 = 1, \\ 2y + 4z - 5x + 2 = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Следовательно, каждый логарифм в левой части исходного неравенства равен нулю, и вся левая часть тоже равна нулю. Получаем $z^2 - 9z + 17 < 0$.

Решением этого квадратного неравенства является интервал $(z_1; z_2)$, где

$$z_1 = \frac{9-\sqrt{13}}{2} > 2,6 \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{9+\sqrt{13}}{2} < 6,3.$$

Так как $z \in \mathbb{Z}$, то $z = 3, 4, 5, 6$. Подставим поочерёдно в первые два уравнения последней системы значения z. Третье уравнение системы решать не нужно, так как в силу $(*)$ оно является следствием первых двух.

1. $z = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=16, \\ 3x-5y=-3 \end{cases} \Rightarrow$ целых решений нет.
2. $z = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=22 & \mid \times 5 \\ 3x-5y=-5 & \mid \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 95, \\ 3x-5y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$
3. $z = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=28, \\ 3x-5y=-7 \end{cases} \Rightarrow 19x = 119 \Rightarrow$ целых решений нет.
4. $z = 6 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=34, \\ 3x-5y=-9 \end{cases} \Rightarrow 19x = 143 \Rightarrow$ целых решений нет.

Ответ: $(5; 4; 4)$.

Вариант 12.2

Ответы:

Задача 1. $\frac{250\pi}{9}$.

Задача 2. $\frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. $-1; -\frac{1}{2}$.

Задача 4. $(6; 7) \cup (7; 8)$.

Задача 5. $(3; 2; 1)$.

Вариант 12.3

Ответы:

Задача 1. $13,7\pi$.

Задача 2. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. 2.

Задача 4. $\left[-2; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$.

Задача 5. $(1; 1; -1)$.

Вариант 13.1

Задача 1. Преобразовав произведение $\sin 3\alpha \sin 2\alpha$ в сумму по формуле

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right),$$

получим

$$2\sin 3\alpha \sin 2\alpha + \cos 5\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos(3\alpha - 2\alpha) - \cos(3\alpha + 2\alpha)\right) + \cos 5\alpha = \\ = \cos\alpha - \cos 5\alpha + \cos 5\alpha = \cos\alpha.$$

Далее, применив формулу косинуса двойного угла, и, подставив значение $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$, получим

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\left(\sqrt{0,6}\right)^2 - 1 = 1,2 - 1 = 0,2.$$

Ответ: $0,2$.

Задача 2. Вычислим производную функции $f(x)$.
$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 7)' = 12x^3 - 12x^2 + 12x - 12 = 12(x^3 - x^2 + x - 1)$.
Найдём критические точки из условия $f'(x) = 0$.

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$$

Полученное кубическое уравнение решим методом разложения на множители.

$$x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Таким образом, функция $f(x)$ имеет одну критическую точку $x = 1$. Определим знак производной справа и слева от $x = 1$. Для этого вычислим

$$f'(0) = -12 < 0 \text{ и } f'(2) = 12(8 - 4 + 2 - 1) = 12\cdot 5 = 60 > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{array}{lll} f'(x) < 0 \ \text{ при } x \in (-\infty; 1) & \Rightarrow & f(x) \text{ убывает при } x \in (-\infty; 1), \\ f'(x) > 0 \ \text{ при } x \in (1; +\infty) & \Rightarrow & f(x) \text{ возрастает при } x \in (1; +\infty). \end{array}$$

Ответ: $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 1)$ и возрастает при $x \in (1; +\infty)$.

Задача 3. ОДЗ неравенства задаётся системой

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - 3x \geqslant 0, \\ 5 + x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant \frac{1}{3}, \\ x \geqslant -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[-5; \frac{1}{3}\right].$$

Перенесём $\sqrt{5+x}$ в правую часть неравенства. Обе части стали неотрицательными, поэтому неравенство можем возвести в квадрат, при этом знак неравенства сохранится.

$$\left(\sqrt{1-3x}\right)^2 > \left(1+\sqrt{5+x}\right)^2,$$
$$1-3x > 1+2\sqrt{5+x}+5+x,$$
$$2\sqrt{5+x} < -4x-5.$$

Если $-4x-5<0$, то левая часть последнего неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Такое неравенство невозможно, следовательно, в этом случае решений нет.

Теперь рассмотрим случай $-4x-5 \geqslant 0$, то есть $x \leqslant -\frac{5}{4}$. Так как обе части неравенства $2\sqrt{5+x} < -4x-5$ неотрицательны, то можем возвести в квадрат.

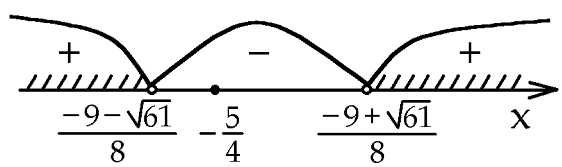
$$\left(2\sqrt{5+x}\right)^2 < (-4x-5)^2,$$
$$4(5+x) < 16x^2+40x+25,$$
$$16x^2+36x+5>0.$$

Корнями уравнения $16x^2+36x+5=0$ являются числа

$$x_{1,2} = \frac{-36\pm\sqrt{976}}{32} = \frac{-9\pm\sqrt{61}}{8}.$$

Решением последнего неравенства являются следующие x:

$$x \in \left(-\infty; \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right) \cup \left(\frac{-9+\sqrt{61}}{8}; +\infty\right).$$



Учитывая ещё условие $x \leqslant -\frac{5}{4}$, получаем $x \in \left(-\infty; \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right)$.

Находим пересечение этого множества с ОДЗ.

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right), \\ x \in \left[-5; \frac{1}{3}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-5; \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right) \Leftrightarrow x \in \left[-5; -\frac{9+\sqrt{61}}{8}\right).$$

Ответ: $\left[-5; -\frac{9+\sqrt{61}}{8}\right)$.

Задача 4. ОДЗ уравнения задаётся условием $x>0$. Заметив, что

$$5^{\log_5^2 x} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} = x^{\log_5 x},$$

получим уравнение

$$2x^{\log_5 x} = 10 \Leftrightarrow x^{\log_5 x} = 5.$$

Прологарифмируем последнее уравнение по основанию 5:

$$\log_5\left(x^{\log_5 x}\right) = \log_5 5 \Leftrightarrow (\log_5 x)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x = 1,\\ \log_5 x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 5,\\ x = \frac{1}{5}.\end{array}\right.$$

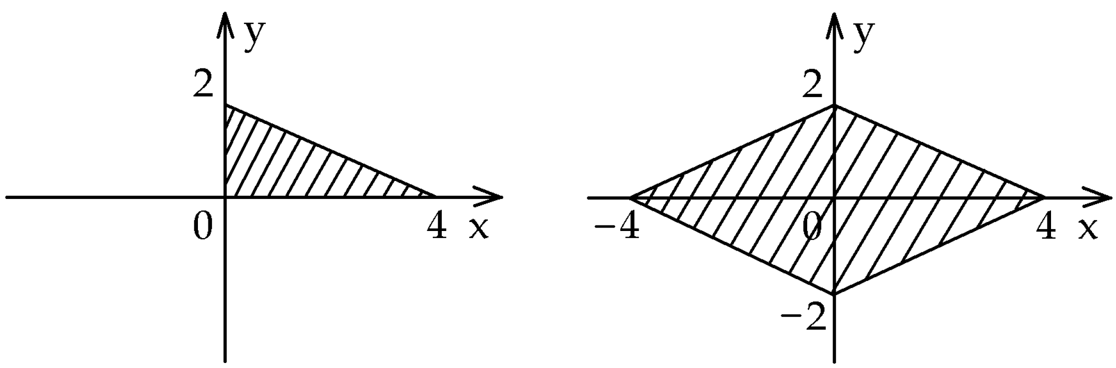
Оба корня $x = 5$ и $x = \frac{1}{5}$ входят в ОДЗ.

Ответ: $5; \frac{1}{5}$.

Задача 5. Строим на плоскости Oxy множества, задаваемые неравенствами

$$|x| + 2|y| \leqslant 4 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \leqslant a.$$

Неравенство $|x|+2|y| \leqslant 4$ задаёт множество, симметричное относительно осей Ox и Oy. В I четверти: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 2y \leqslant 4$. Прямые $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 4$ задают границы искомого множества в I четверти. В остальных четвертях строим множество симметрией относительно осей Ox и Oy, получаем ромб. Таким образом, решениями неравенства $|x| + 2|y| \leqslant 4$ являются все точки плоскости, лежащие внутри и на границе ромба.

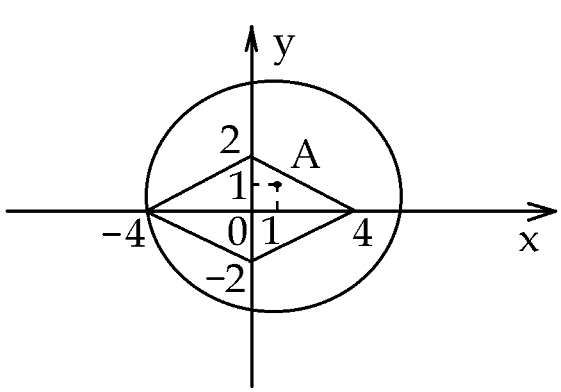


Неравенство $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \leqslant a$ равносильно неравенству

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant a^2,$$

которое задаёт круг с центром в точке $A(1;1)$ и радиусом $R = |a|$.

Все решения первого неравенства будут являться решениями второго неравенства тогда и только тогда, когда ромб лежит внутри круга. Минимальный радиус круга $R_{min} = AB$. Точка A имеет координаты $(1;1)$, точка B имеет координаты $(-4;0)$, расстояние $AB = \sqrt{(-4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{26}$. Следовательно, при $|a| \geqslant \sqrt{26}$, то есть при $a \in \left(-\infty; -\sqrt{26}\right] \cup \left[\sqrt{26}; +\infty\right)$ ромб лежит внутри круга.



Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{26}\right] \cup \left[\sqrt{26}; +\infty\right)$.

Вариант 13.2

Ответы:

Задача 1. $0,6$.

Задача 2. Функция $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; -1)$, возрастает при $x \in (-1; +\infty)$.

Задача 3. $[-1; 3]$.

Задача 4. $\frac{1}{2}; 2$.

Задача 5. $[3 + 2\sqrt{5}; +\infty)$.

Вариант 13.3

Ответы:

Задача 1. $-0,4$.

Задача 2. $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 3)$ и возрастает при $x \in (3; +\infty)$.

Задача 3. $\left[\frac{14+\sqrt{7}}{2}; 9\right]$.

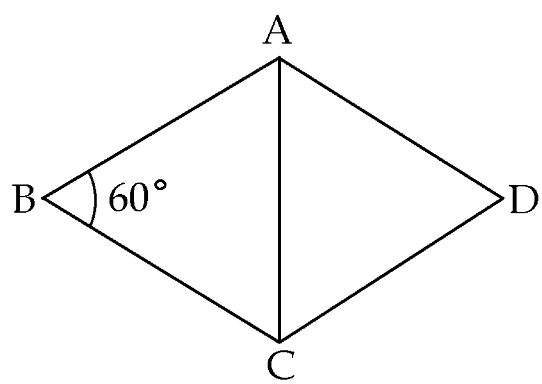
Задача 4. $\frac{1}{9}; 9$.

Задача 5. $\sqrt{65}$.

Вариант 14.1

Задача 1. Дано:
$ABCD$ — ромб,
$\angle ABC = 60^\circ$,
$AC = 11,2$.

Найти: периметр ромба $ABCD$.



Решение. Так как $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный, следовательно,

$$\angle BCA = \angle CAB = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Поэтому, все углы $\triangle ABC$ равны между собой и $\triangle ABC$ — равносторонний. Значит, $AB = AC = 11,2$.

$$P_{ABCD} = 4 \cdot 11,2 = 44,8.$$

Ответ: $44,8$.

Задача 2. ОДЗ уравнения задаётся условием $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$.

$$\begin{gathered}
\log_{1/3}27+\log_3(2x-3)=\log_{1/9}(2x-3),\\
-\log_3 27+\log_3(2x-3)=-\frac{1}{2}\log_3(2x-3),\\
\frac{3}{2}\log_3(2x-3)=\log_3 27,\\
\log_3(2x-3)=\frac{2}{3}\log_3 27,\\
\log_3(2x-3)=\log_3(27)^{2/3},\\
\log_3(2x-3)=\log_3 9,\\
2x-3=9,\\
x=6\in \text{ОДЗ}.
\end{gathered}$$

Ответ: 6.

Задача 3. Допустимым значением уравнения является любое $x\in\mathbb{R}$. Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}=t$. Уравнение примет вид

$$t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1,\\ t=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg}\frac{x}{3}=-1,\\ \operatorname{arctg}\frac{x}{3}=5\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}\frac{x}{3}=-1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\operatorname{tg}(-1)\Leftrightarrow x=-3\operatorname{tg}1.$$

Уравнение $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}=5$ решений не имеет, так как множеством значений функции $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$ является интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а число $5\notin\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $-3\operatorname{tg}1$.

Задача 4.

$$\log_{\arcsin 1/2}\left(\sqrt{3x+1}-x\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow \log_{\arcsin 1/2}\left(\sqrt{3x+1}-x\right)\leqslant \log_{\arcsin 1/2}1.$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}<1$, то при потенцировании знак неравенства изменится на противоположный.

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{3x+1}-x\geqslant 1,\\ \sqrt{3x+1}-x\geqslant 0\ (\text{ОДЗ})\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-x\geqslant 1\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}\geqslant x+1.$$

Последнее неравенство равносильно следующей совокупности систем.

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+1\geqslant 0,\\ \left(\sqrt{3x+1}\right)^2\geqslant (x+1)^2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+1<0,\\ 3x+1\geqslant 0\ (\text{ОДЗ})\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant -1,\\ 3x+1\geqslant x^2+2x+1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<-1,\\ x\geqslant -\frac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \text{ решений нет}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\geqslant -1,\\ x^2-x\leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\geqslant -1,\\ x(x-1)\leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[0;1].$$

Ответ: $[0;1]$.

Задача 5. Обозначим $t=x+5y$. Так как $x,y>0$, то $t>0$. Найдём минимальное значение t_{min}, при котором выполняется неравенство

$$x^2-6xy+y^2+21\leqslant 0.$$

Подставим $x=t-5y$ в это неравенство:

$$(t-5y)^2-6y(t-5y)+y^2+21\leqslant 0,$$
$$t^2-10ty+25y^2-6ty+30y^2+y^2+21\leqslant 0,$$
$$56y^2-16ty+t^2+21\leqslant 0.$$

Это квадратное неравенство относительно y имеет решения, если его дискриминант $D\geqslant 0$. Вычислим

$$\frac{D}{4}=(8t)^2-56(t^2+21)=8t^2-1176.$$

Получаем

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{D}{4}\geqslant 0,\\ t>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}8t^2\geqslant 1176,\\ t>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|t|\geqslant\sqrt{147},\\ t>0\end{array}\right. \Leftrightarrow t\geqslant\sqrt{147}\Leftrightarrow t\geqslant 7\sqrt{3}.$$

Следовательно, $t_{min}=7\sqrt{3}$.

Ответ: $7\sqrt{3}$.

Вариант 14.2

Ответы:

Задача 1. $25, 5$.

Задача 2. 3.

Задача 3. $-\frac{1}{4}$.

Задача 4. $[2;+\infty)$.

Задача 5. $\sqrt{8}$.

Вариант 14.3

Ответы:

Задача 1. 34.

Задача 2. 2.

Задача 3. $-\sin\frac{3}{2}$.

Задача 4. $[1;2)$.

Задача 5. $\sqrt{\frac{20}{19}}$.

Вариант 15.1

Задача 1.

$$\log_2^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

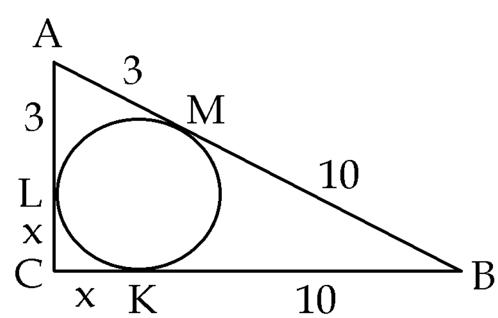
Задача 2. Возведём обе части неравенства в четвёртую степень. Тогда неравенство будет равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} (1+2x)^2 \leqslant 5+2x, \\ 1+2x \geqslant 0, \\ 5+2x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1+2x)^2 \leqslant 5+2x, \\ 1+2x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 - x - 2 \leqslant 0, \\ x \geqslant -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{17}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{17}}{4}, \\ x \geqslant -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$.

Задача 3. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Пусть $\angle C = 90°$, а точки K, L, M являются точками касания окружности и треугольника. Из условия задачи следует, что $AM = 3$, $BM = 10$. По свойству касательных к окружности, имеем



$$AM = AL = 3, \quad BM = BK = 10, \quad CL = CK.$$

Обозначим $CL = CK = x$. По теореме Пифагора

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (AL + LC)^2 + (CK + KB)^2 = (AM + MB)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3 + x)^2 + (x + 10)^2 = (3 + 10)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 26x + 109 = 169 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 13x - 30 = 0 \Rightarrow x = 2, \text{ так как второй корень равен } -15 < 0.$$

Получаем, что больший катет $CB = 2 + 10 = 12$.

Ответ: 12.

Задача 4. Вычислим дискриминант D данного квадратного уравнения.

$$D = \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 - 4b^2c^2 = \left(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc\right)\left(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc\right) =$$
$$= \Big((b - c)^2 - a^2\Big)\Big((b + c)^2 - a^2\Big) =$$
$$= \underbrace{(b - c - a)}_{<0}\underbrace{(b - c + a)}_{>0}\underbrace{(b + c - a)}_{>0}\underbrace{(b + c + a)}_{>0} < 0.$$

Эти неравенства имеют место, так как a, b, c — стороны треугольника. Получили, что дискриминант отрицателен, значит уравнение корней не имеет. Доказательство завершено.

Задача 5. Сначала рассмотрим случай $pq = 0$. Это возможно, когда $p = 0$ или $q = 0$.

$$p = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 0, \\ q = 7, \end{array}\right. \qquad q = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ p = 7. \end{array}\right.$$

Этот случай даёт нам три решения $(p; q)$: $(0; 0); (0; 7); (7; 0)$.

Теперь рассмотрим случай $pq \neq 0$. Так как p и q — целые, то из условия следует, что $6pq$ делится на $p^2 + 9q^2$. Поэтому

$$|6pq| \geqslant p^2 + 9q^2 \Leftrightarrow |p|^2 - 6|p| \cdot |q| + (3|q|)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \Big(|p| - 3|q|\Big)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |p| - 3|q| = 0 \Leftrightarrow |p| = 3|q| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 3q, \\ p = -3q. \end{array}\right.$$

Если $p = 3q$, то, подставив $3q$ вместо p в исходное уравнение и сократив на $18q^2 \neq 0$, получим $4q - 7 = 1$, откуда $q = 2$, $p = 3q = 6$.

В случае $p = -3q$ аналогично приходим к уравнению $-2q - 7 = -1$, поэтому $q = -3$, $p = -3q = 9$.

Ответ: $(p; q) = (0; 0); (0; 7); (7; 0); (6; 2); (9; -3)$.

Вариант 15.2

Ответы:

Задача 1. $27; \frac{1}{27}$.

Задача 2. $\left[-1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

Задача 3. $2,1$.

Задача 4. При $a \in (0;3)$. `Указание.` У приведённого квадратного уравнения должны быть положительны дискриминант и свободный член, а коэффициент при x должен быть отрицателен.

Задача 5. $(p,q) = (0;0); (0;5); (5;0); (3;3)$.

Вариант 15.3

Ответы:

Задача 1. $4; \frac{1}{4}$.

Задача 2. $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2}; 1\right]$.

Задача 3. $7,25$.

Задача 4. При $k \in (-2;0)$. `Указание.` Корни существуют и имеют разные знаки при положительном дискриминанте и отрицательном свободном члене $\frac{k+2}{k}$ приведённого уравнения.

Задача 5. $(m,n) = (0;0); (3;0); (0;3); (2;2)$.

7.4. Экзаменационные билеты 2000 г.

Вариант 16.1

Задача 1. Сделав замену переменных $t = x^2 - 8$, получим квадратное уравнение $t^2 + 4t - 5 = 0$, которое имеет два корня $t_1 = 1$ и $t_2 = -5$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 8 = 1, \\ x^2 - 8 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3, \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-3; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3$.

Задача 2.

$$\left\{\begin{array}{l} 4\sin x \sin y = 3, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Сложим и вычтем уравнения последней системы.

$$\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1, \\ \sin x \sin y - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения и подставим во второе.

$$\begin{cases} x = y + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 2y + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k - \pi n, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k-n), \ n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k+n), \ y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k-n), \ n, k \in \mathbb{Z}.$

Задача 3. ОДЗ неравенства задаётся условием

$$12 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{12}; \sqrt{12}\right).$$

Так как $-2 = \log_{1/\sqrt{3}} 3$, то исходное неравенство примет вид

$$\log_{1/\sqrt{3}}\left(12 - x^2\right) < \log_{1/\sqrt{3}} 3.$$

Потенцируем неравенство, учитывая, что основание логарифмов $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, поэтому знак неравенства изменится на противоположный:

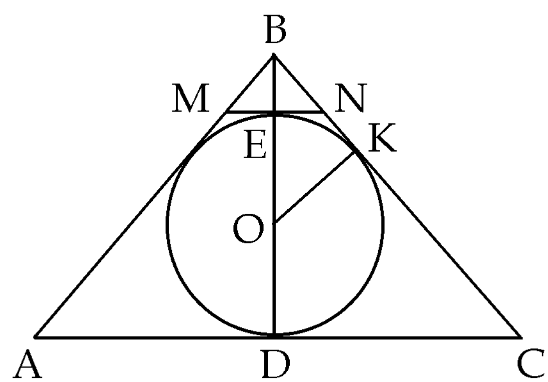
$$12 - x^2 > 3 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow x \in (-3; 3).$$

Интервал $(-3; 3)$ полностью входит в ОДЗ, следовательно, этот интервал является ответом.

Ответ: $(-3; 3)$.

Задача 4. Дано:
ABC — треугольник,
$AB = BC = 6$, $AC = 8$,
$(O; r)$ — вписанная окружность,
$MN \parallel AC$,
K — точка касания MN и $(O; r)$.

Найти: длину MN.



Решение. Проведём $BD \perp AC$. Так как $AB = BC$, то BD является медианой, поэтому $AD = DC = 4$. Из прямоугольного треугольника BDC по теореме Пифагора находим

$$BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Проведём OK — радиус в точку касания, $OK \perp BC$. Следовательно, треугольник BKO — прямоугольный. По свойству касательных к окружности, проведённых из одной точки, имеем $CD = CK$, следовательно,

$$BK = BC - CK = 6 - 4 = 2.$$

Так как $\triangle BKO \sim \triangle BDC$ по двум углам, то

$$\frac{OK}{BK} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Из подобия треугольников BEN и BDC по двум углам, имеем $\frac{EN}{DC} = \frac{BE}{BD}$. Вычислим

$$BE = BD - 2r = 2\sqrt{5} - \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{10-8}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Получаем

$$EN = \frac{DC \cdot BE}{BD} = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = 0,8,$$

следовательно,

$$MN = 2EN = 1,6.$$

Ответ: $1,6$.

Задача 5. Область определения функции $F(x)$ задаётся условием

$$a - \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9} \geqslant 0.$$

Введём функцию

$$f(x) = a - \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$$

и вычислим её производную, используя формулу

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad \text{где } u = (x-1)^{2/3},\ v = x^2+9.$$

$$f'(x) = a' - \left(\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}\right)' = \frac{\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}(x^2+9) - 2x\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\left(x^2+9\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2+9-3x(x-1)}{\left(x^2+9\right)^2\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{-2x^2+3x+9}{\left(x^2+9\right)^2\sqrt[3]{x-1}} = \frac{2\left(x^2-3x-9\right)}{3\left(x^2+9\right)^2\sqrt[3]{x-1}}.$$

Найдём критические точки функции $f(x)$, то есть точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 9 = 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -\frac{3}{2}. \end{array} \right.$$

Производная $f'(x)$ не существует при $x = 1$.

Для того, чтобы неравенство $f(x) \geqslant 0$ выполнялось на всём отрезке $[0; 4]$, необходимо и достаточно, чтобы это неравенство выполнялось в критических точках, принадлежащих этому отрезку, и на концах отрезка. Учитывая, что точка $x = -\frac{3}{2} \notin [0; 4]$, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} f(0) \geqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \\ f(3) \geqslant 0, \\ f(4) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{10} \geqslant 0, \\ a \geqslant 0, \\ a - \frac{\sqrt[3]{4}}{18} \geqslant 0, \\ a - \frac{\sqrt[3]{9}}{25} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \frac{1}{10}, \\ a \geqslant 0, \\ a \geqslant \frac{\sqrt[3]{4}}{18}, \\ a \geqslant \frac{\sqrt[3]{9}}{25} \end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant \frac{1}{10}.$$

Ответ: при $a \geqslant \frac{1}{10}$.

Вариант 16.2

Ответы:

Задача 1. $-3; -3 + \sqrt{10}; -3 - \sqrt{10}$.

Задача 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k + \pi n,\ y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}k + \pi n,\ k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. $(1; 2)$.

Задача 4. 6.

Задача 5. При $a \in (0; 1]$.

Вариант 16.3

Ответы:

Задача 1. $2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}; -\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 2. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} - 2\pi k\right); \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} - 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. $(1; 4)$.

Задача 4. $40,3$.

Задача 5. При $a \in (0; 1]$.

Вариант 17.1

Задача 1. Найдём ОДЗ. Так как уравнение содержит дроби, то знаменатели этих дробей должны быть отличны от нуля, следовательно

$$\begin{cases} 4x^2 + x - 5 \neq 0, \\ 16x^2 - 25 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 1,\ x \neq \frac{5}{4},\ x \neq -\frac{5}{4}.$$

Разложим на множители числители и знаменатели каждой дроби, имеем

$$\frac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(4x+5)} = \frac{(4x-5)^2}{(4x-5)(4x+5)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5x-2}{4x+5} = \frac{4x-5}{4x+5} \Rightarrow 5x-2 = 4x-5 \Rightarrow x = -3.$$

Корень $x=-3$ принадлежит ОДЗ.

Ответ: -3.

Задача 2.

$$\log_{x+2}(x-2) < 1 \Leftrightarrow \log_{x+2}(x-2) < \log_{x+2}(x+2).$$

Рассмотрим два случая: $x+2>1$ и $0<x+2<1$.

При $x+2>1$ неравенство сводится к следующей системе

$$\begin{cases} x+2>1, \\ x-2<x+2, \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>1, \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$$

При $0<x+2<1$ решаемое неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0<x+2<1, \\ x-2>x+2, \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow$$ решений нет, так как из второго неравенства следует, что $-2>2$, что неверно.

Ответ: $x>2$.

Задача 3. По определению модуля

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{при } x+2 \geqslant 0, \\ -(x+2) & \text{при } x+2<0. \end{cases}$$

Поэтому

$$f(x) = |x+2|(x+5) = \begin{cases} (x+2)(x+5) \\ -(x+2)(x+5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+7x+10 & \text{при } x \geqslant -2, \\ -x^2-7x-10 & \text{при } x<-2. \end{cases}$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-4;0]$. Для этого найдём критические точки каждой из ветвей, то есть точки, в которых $f'(x)=0$, причём для „правой“ ветви точки должны принадлежать отрезку $[-2;0]$, а для „левой“ ветви — отрезку $[-4;-2]$.

$$(x^2+7x+10)'=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+7=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\tfrac{7}{2} \notin [-2;0],$$
$$(-x^2-7x-10)'=0 \quad \Rightarrow \quad -2x-7=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\tfrac{7}{2} \in [-4;-2].$$

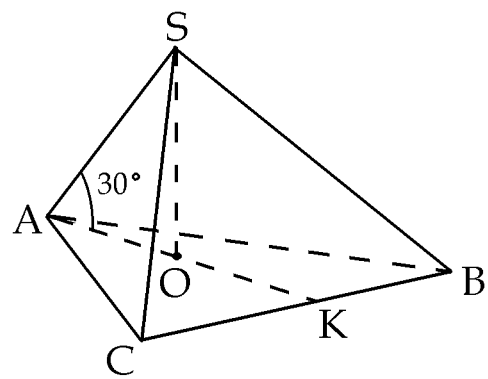
Посчитаем значения функции $f(x)$ в критической точке и на концах отрезков $[-4;-2]$ и $[-2;0]$.

$$f\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{9}{4},\quad f(-4)=2,\quad f(-2)=0,\quad f(0)=10.$$

Среди этих значений самое большое равно 10, самое маленькое равно 0.

Ответ: наибольшее значение равно 10, наименьшее значение равно 0.

Задача 4. Пусть SO — высота пирамиды. Обозначим $h=SO$, $R=OA$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.



Так как известны все стороны треугольника, лежащего в основании пирамиды, то по формуле Герона найдём его площадь

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+5}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+5}{2}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+5}{2}-2\right)\left(\frac{\sqrt{3}+5}{2}-3\right)}=\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

OA — радиус описанной окружности, следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}\Rightarrow\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2\cdot 3}{4R}\Rightarrow R=\frac{3\sqrt{33}}{11}.$$

Из прямоугольного треугольника SAO имеем

$$\frac{SO}{AO}=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\operatorname{tg}30^\circ\Rightarrow h=R\operatorname{tg}30^\circ=\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Теперь вычисляем объём V пирамиды.

$$V=\frac{1}{3}hS_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 5. По условию задачи $x_1>-1$ и $x_2>-1$, значит $x_1+x_2>$ >-2, а по теореме Виета для данного квадратного уравнения, сумма корней должна равняться -2. Следовательно, ни при каких a корни уравнения не могут удовлетворять заданным условиям.

Ответ: такие a не существуют.

Вариант 17.2

Ответы:

Задача 1. 7.

Задача 2. $(3; 1); (-3; -1)$.

Задача 3. $(0; 1)$.

Задача 4. $\frac{2-\ln 2}{2\ln 2}$.

Задача 5. Объём конуса $= \frac{1}{3}\pi R^3 \sin^{48}(2\alpha)\,\mathrm{tg}^{48}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^3(2\alpha)\,\mathrm{ctg}\,\alpha =$ $= \frac{1}{3}\pi R^3 \sin^{51}(2\alpha)\,\mathrm{tg}^{48}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Вариант 17.3

Ответы:

Задача 1. 0.

Задача 2. $(1; 2); (-1; -2); (2; 1); (-2; -1)$.

Задача 3. $[2; 3)$.

Задача 4. $(-1; 1)$.

Задача 5. $2\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^{99}$. **Указание.** Стороны вписанных шестиугольников образуют геометрическую прогрессию.

Вариант 18.1

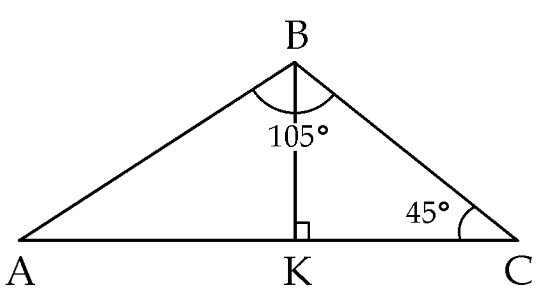
Задача 1. Для арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ разность прогрессии d находится по формуле $d = a_2 - a_1 = 0,5 - 0,2 = 0,3$.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$. Поэтому

$$S_{10} = \frac{2\cdot 0,2 + (10-1)\cdot 0,3}{2}\cdot 10 = \frac{0,4+2,7}{2}\cdot 10 = 15,5.$$

Ответ: 15,5.

Задача 2. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle B = 105^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$. Меньшую длину имеет та высота, которая опущена из вершины, соответствующей большему углу треугольника. Поэтому искомой высотой является высота BK, опущенная из вершины B на сторону AC.



Рассмотрим $\triangle BKC$: $\angle K = 90^\circ, \angle C = 45^\circ$, поэтому $\angle B = 45^\circ$. Следовательно, $\triangle BKC$ равнобедренный. Обозначим $x = BK = KC$.

Рассмотрим $\triangle BKA$: $\angle K = 90^\circ, \angle A = 30^\circ$, $AK = BK \operatorname{ctg} 30^\circ = x\sqrt{3}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2}(AK + KC) \cdot BK = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} + x) \cdot x = \frac{1}{2}x^2(\sqrt{3} + 1).$$

По условию $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3} + 1$, поэтому

$$\frac{1}{2}x^2(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2},$$

так как $x = BK > 0$.

Ответ: $\sqrt{2}$ см.

Задача 3. Функция Y определена, когда определены функции

$$\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right) \quad \text{и} \quad \ln(4-x).$$

Функция $\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)$ определена при $-1 \leqslant \frac{x-3}{2} \leqslant 1$. Функция $\ln(4-x)$ определена при $4 - x > 0$. Поэтому область определения функции Y задаётся системой

$$\begin{cases} -1 \leqslant \frac{x-3}{2} \leqslant 1, \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x - 3 \leqslant 2, \\ 4 > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 4.$$

Ответ: $[1; 4)$.

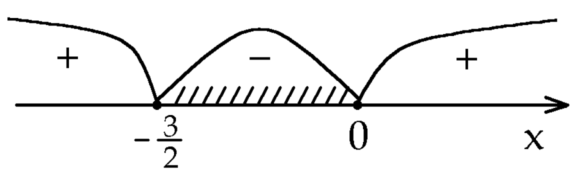
Задача 4. $$\sqrt{-6x - 4x^2} < 4 + 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{-6x - 4x^2}\right)^2 < (4 + 2x)^2, \\ -6x - 4x^2 \geqslant 0, \\ 4 + 2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 4x^2 < 16 + 16x + 4x^2, \\ 6x + 4x^2 \leqslant 0, \\ 2x \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 22x + 16 > 0, \\ x^2 + \frac{3}{2}x \leqslant 0, \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 11x + 8 > 0, \\ x(x + \frac{3}{2}) \leqslant 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Уравнение $4x^2 + 11x + 8 = 0$ корней не имеет (его дискриминант $D < 0$), поэтому неравенство $4x^2 + 11x + 8 > 0$ выполнено для любого x и, значит, это неравенство можно исключить из системы.

Решением неравенства $x(x+3) \leqslant 0$ являются следующие $x : -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 0$.



Итак, решаемая система равносильна следующей

$$\begin{cases} x(x + \frac{3}{2}) \leqslant 0, \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 0.$$

Ответ: $\left[-\frac{3}{2};0\right]$.

Задача 5. Преобразуем исходное уравнение

$$(5\cdot 2^a)^x + 5^{\sqrt{x}}\cdot 2^{ax} - 5\cdot 2^{ax+1} + 30 = 3(5^x + 5^{\sqrt{x}}),$$
$$5^x\cdot 2^{ax} + 5^{\sqrt{x}}\cdot 2^{ax} - 5\cdot 2\cdot 2^{ax} = 3(5^x + 5^{\sqrt{x}}) - 30,$$
$$2^{ax}(5^x + 5^{\sqrt{x}} - 10) = 3(5^x + 5^{\sqrt{x}} - 10),$$
$$(2^{ax} - 3)(5^x + 5^{\sqrt{x}} - 10) = 0,$$
$$2^{ax} - 3 = 0 \qquad \text{или} \qquad 5^x + 5^{\sqrt{x}} - 10 = 0.$$

Решим уравнение $2^{ax} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2^{ax} = 3 \Leftrightarrow ax = \log_2 3$. При $a = 0$ корней нет, при $a \neq 0$ имеем корень $x = \frac{\log_2 3}{a}$.

Решим уравнение $5^x + 5^{\sqrt{x}} - 10 = 0 \Leftrightarrow 5^x + 5^{\sqrt{x}} = 10$. Подбором находим корень $x = 1$. Докажем, что других корней нет. Функции 5^x и $5^{\sqrt{x}}$ возрастают, поэтому функция $y = 5^x + 5^{\sqrt{x}}$ возрастает при $x \geqslant 0$, значит значение 10 функция y принимает только один раз. Доказали, что уравнение $5^x + 5^{\sqrt{x}} - 10 = 0$ имеет ровно один корень $x = 1$.

Чтобы исходное уравнение имело ровно одно решение, нужно, чтобы уравнение $2^{ax} - 3 = 0$ либо не имело решений (так будет при $a = 0$), либо имело только одно решение $x = 1$. Следовательно, $1 = \frac{\log_2 3}{a} \Rightarrow a = \log_2 3$.

Ответ: $0; \log_2 3$.

Вариант 18.2

Ответы:

Задача 1. 1.

Задача 2. $2\sqrt{3}$ см^2.

Задача 3. $[-1;3]$.

Задача 4. $[0;3]$.

Задача 5. $0; \frac{1}{2{,}5\ln 2{,}5}$.

Вариант 18.3

Ответы:

Задача 1. $62,5$.

Задача 2. $15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.

Задача 3. $\left[-1;\frac{3}{4}\right)$.

Задача 4. $[0;1]$.

Задача 5. $(-\infty;0] \cup \{1,25\}$.

Вариант 19.1

Задача 1.

$$\begin{cases} y-3x-7=0, \\ x^2+xy+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+7, \\ x^2+x(3x+7)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+7, \\ 4x^2+7x+3=0. \end{cases}$$

Решим уравнение $4x^2+7x+3=0$. Дискриминант $D=7^2-4\cdot 4\cdot 3=1$.

$$x_1=\frac{-7+1}{2\cdot 4}=-\frac{3}{4}, \quad x_2=\frac{-7-1}{2\cdot 4}=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1=3x_1+7=3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+7=\frac{19}{4}, \quad y_2=3x_2+7=3\cdot(-1)+7=4.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{4};\frac{19}{4}\right);(-1;4)$.

Задача 2. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна $360°$. Из условия задачи следует, что $\angle 1=2x, \angle 2=2,5x, \angle 3=9,5x, \angle 4=10x$ для некоторого числа x. Найдём x.

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360° \Rightarrow 2x+2,5x+9,5x+10x=360° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24x=360° \Rightarrow x=15°.$$

Значит, меньший угол равен $\angle 1=2x=2\cdot 15°=30°$.

Ответ: $30°$.

Задача 3. Область определения функции $F(x)$ задаётся системой неравенств:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ 2^{2x}-\frac{11}{3}\cdot 6^x+2\cdot 3^{2x}>0 \quad \mid :3^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

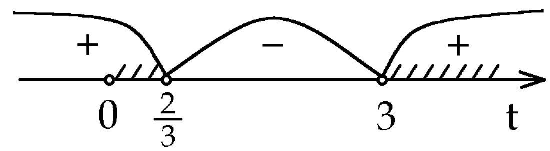
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2, \\ \frac{2^{2x}}{3^{2x}}-\frac{11}{3}\cdot\frac{2^x3^x}{3^x3^x}+2\cdot\frac{3^{2x}}{3^{2x}}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\frac{11}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2>0. \end{cases}$$

Решим отдельно последнее неравенство. Обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t,\ t>0$. Так как $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2=t^2$, то неравенство примет вид

$$t^2-\frac{11}{3}t+2>0 \Leftrightarrow 3t^2-11t+6>0.$$

Для решения этого неравенства найдём корни уравнения $3t^2 - 11t + 6 = 0$. Дискриминант $D = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 121 - 72 = 49 = 7^2$.

$$t_1 = \frac{-(-11)+7}{2 \cdot 3} = \frac{11+7}{6} = \frac{18}{6} = 3,$$
$$t_2 = \frac{-(-11)-7}{2 \cdot 3} = \frac{11-7}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$



Решением неравенства являются следующие t :

$$\left[\begin{array}{l} t > 3, \\ 0 < t < \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3, \\ 0 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \log_{2/3} 3, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \log_{2/3} 3, \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Сравним числа -3 и $\log_{2/3} 3$.

$$-3 \vee \log_{2/3} 3 \Rightarrow -3 \log_{2/3} \frac{2}{3} \vee \log_{2/3} 3 \Rightarrow \log_{2/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \vee \log_{2/3} 3.$$

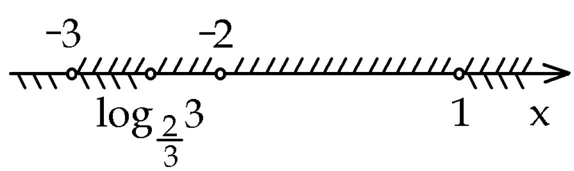
Так как $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 3$ и $\frac{2}{3} < 1$, то $\log_{2/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} < \log_{2/3} 3$, поэтому $-3 < \log_{2/3} 3$. Сравним числа -2 и $\log_{2/3} 3$.

$$-2 \vee \log_{2/3} 3 \Rightarrow -2 \log_{2/3} \frac{2}{3} \vee \log_{2/3} 3 \Rightarrow \log_{2/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \vee \log_{2/3} 3.$$

Так как $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < 3$ и $\frac{2}{3} < 1$, то $\log_{2/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} > \log_{2/3} 3$, поэтому $-2 > \log_{2/3} 3 \Rightarrow -2 \neq \log_{2/3} 3$.

Исходная система неравенств привелась к виду

$$\left\{\begin{array}{l} x > -3, \\ x \neq -2, \\ \left[\begin{array}{l} x < \log_{2/3} 3, \\ x > 1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$



Итак, решениями системы являются следующие значения

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x > -3, \\ x < \log_{2/3} 3, \end{array}\right. \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-3; \log_{2/3} 3) \cup (1; +\infty)$.

Задача 4. Обозначим $\alpha = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2})$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. По определению $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, но $\operatorname{tg}\alpha > 0$, поэтому $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, аналогично $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$.

Докажем, что $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{3+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}(3+2\sqrt{2})}=\frac{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}=1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Так как $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)>0$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$, то $\alpha-\beta$ принадлежит первой координатной четверти, поэтому $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

При $0<x<\frac{\pi}{2}$ функция $y=\operatorname{tg}x$ строго возрастает. Значит, из равенства $\operatorname{tg}x_1=\operatorname{tg}x_2$ следует, что $x_1=x_2$ (если x_1 и $x_2\in(0;\frac{\pi}{2})$). Следовательно,

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. Исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{3}\sin\left(2\cdot 2^{-x^2-2x}\right)=a+2\cos^2\left(2^{-x^2-2x}\right).$$

Обозначим $t=2^{-x^2-2x}$, тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{3}\sin 2t=a+2\cos^2 t.$$

Так как $2\cos^2 t=1+\cos 2t$, то

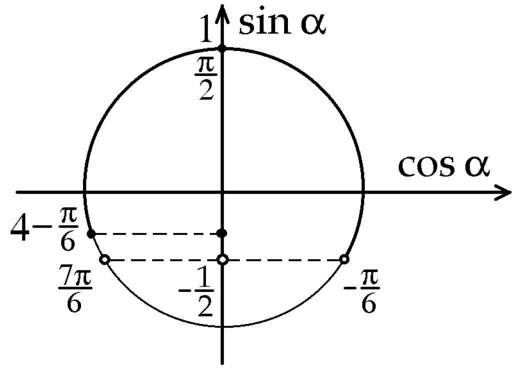
$$\sqrt{3}\sin 2t=a+1+\cos 2t\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin 2t-\cos 2t=a+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t=\frac{a+1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a+1}{2}.$$

Обозначим $\alpha=2t-\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{a+1}{2}$. Заметим, что при $b>1$ и при $b<-1$ последнее уравнение (а, следовательно, и исходное) решений не имеет.

Найдём, какие значения принимает t как функция от x. $t=2^{-x^2-2x}$, следовательно, $t>0$, причём, t может быть сколь угодно близко к 0 при больших x. Максимальное значение выражение $(-x^2-2x)$ принимает в точке $x=-\frac{-2}{2\cdot(-1)}=-1$, в этой точке оно равно 1, поэтому максимальное $t=2^1=2$. Получили, что $t\in(0;2]$.

Так как $t\in(0;2]$ и $\alpha=2t-\frac{\pi}{6}$, то $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6};4-\frac{\pi}{6}\right]$. Найдём, какие значения принимает $\sin\alpha$ при этих α. При возрастании α от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$ функция $\sin\alpha$ возрастает от $-\frac{1}{2}$ до 1. Так как $\frac{\pi}{2}<4-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$ и $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, то $\sin\left(4-\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2}$ и при возрастании α от $\frac{\pi}{6}$ до $4-\frac{\pi}{6}$ функция $\sin\alpha$ убывает от 1 до $\sin\left(4-\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2}$.

Доказано, что $\sin\alpha>-\frac{1}{2}$ при $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6};4-\frac{\pi}{6}\right]$. Поэтому для любого числа $b\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$ существует $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6};4-\frac{\pi}{6}\right]$, такое, что $\sin\alpha=b\Rightarrow$ существует



$t \in (0;2]$, такое, что $\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right) = b \Rightarrow$ существует решение x исходного уравнения. Если же $b \notin \left(-\frac{1}{2};1\right]$, то уравнение решений не имеет.

Итак, задача свелась к решению системы

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b \leqslant -\frac{1}{2}, \\ b > 1, \end{array}\right. \\ b = \frac{a+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a+1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}, \\ \frac{a+1}{2} > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1 \leqslant -1, \\ a+1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leqslant -2, \\ a > 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2] \cup (1;+\infty)$.

Вариант 19.2

Ответы:

Задача 1. $(3;5)$.

Задача 2. 45°.

Задача 3. $(12;13) \cup (13;+\infty)$.

Задача 4. `Указание`. Обозначить $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\beta = \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$ и доказать, что $\alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin(\alpha-\beta) = \sin\frac{\pi}{6}$.

Задача 5. $[-1;2)$.

Вариант 19.3

Ответы:

Задача 1. $(2;3); (-1,4;-7,2)$.

Задача 2. 150°.

Задача 3. $\left(0;\frac{1}{64}\right) \cup (4;5) \cup (5;6) \cup (6;+\infty)$.

Задача 4. `Указание`. Обозначить $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$, $\beta = \arcsin\frac{5}{13}$ и доказать, что $\alpha + \beta \in (0;\pi)$ и $\cos(\alpha+\beta) = \frac{16}{25}$.

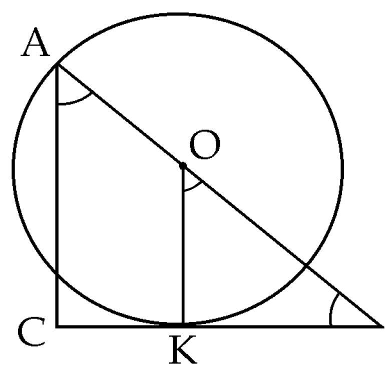
Задача 5. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$.

Вариант 20.1

Задача 1. Используя свойства логарифмов, сделаем равносильные преобразования неравенства.

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2 \Leftrightarrow \log_\pi 2+\log_\pi 5>2 \Leftrightarrow \log_\pi(2\cdot 5)>2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_\pi 10>2 \Leftrightarrow \log_\pi 10>2\log_\pi \pi \Leftrightarrow \log_\pi 10>\log_\pi \pi^2 \Leftrightarrow 10>\pi^2.$$

Так как неравенство $10>\pi^2$ верное, то и исходное неравенство верное, что и требовалось доказать.



Задача 2. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, $AB=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$. Центр окружности O лежит на стороне AB. Пусть окружность касается катета BC в точке K. Тогда искомый радиус окружности $R=OK=OA$. Рассмотри $\triangle OKB$: $OB=AB-OA= =\frac{1+\sqrt{2}}{4}-R$, $\angle O=90^\circ$ ($OK\perp CB$ как радиус, проведённый в точку касания), $\angle B=45^\circ$, следовательно, $\triangle OKB$ — равнобедренный и $BK=OK=R$. По теореме Пифагора $OB^2=OK^2+BK^2$:

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}-R\right)^2=R^2+R^2 \Leftrightarrow R^2+\frac{1+\sqrt{2}}{2}R-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)^2=0.$$

Вычисляем дискриминант квадратного уравнения и находим его корни:

$$D=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2+4\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)^2=2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow R=\frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{2}.$$

Учитывая, что $R>0$ как радиус, получаем

$$R=\frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{-(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{4}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 3. Сделаем замену $t=\sin 2x$. Тогда уравнение примет вид $2t^2-5t+2=0$. Дискриминант $D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9=3^2$.

$$t_1=\frac{5+3}{2\cdot 2}=2,\quad t_2=\frac{5-3}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sin 2x = 2$ решений не имеет, так как $|\sin 2x| \leqslant 1$ для всех x.

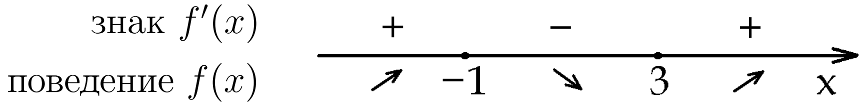
$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Найдём точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c$. Для этого найдём точки, в которых производная равна 0.

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + c)' = 3x^2 - 6x - 9,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$



Поэтому $a = -1,\ b = 3$ — точки экстремума (по условию $a < b$).

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 1 - 3 - 9 + c = -11c = b_1, \\ f(a) & = & f(-1) = -1 - 3 + 9 + c = 5 + c = b_2, \\ f(b) & = & = 27 - 27 - 27 + c = -27 + c = b_3. \end{array}$$

По условию числа b_1, b_2, b_3 составляют геометрическую прогрессию, поэтому по характеристическому свойству геометрической прогрессии $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$.

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3 \Leftrightarrow (5 + c)^2 = (-11 + c) \cdot (-27 + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 + 10c + c^2 = 297 - 38c + c^2 \Leftrightarrow 48c = 272 \Leftrightarrow c = \frac{272}{48} = \frac{17}{3}.$$

Ответ: $\frac{17}{3}$.

Задача 5. Обозначим

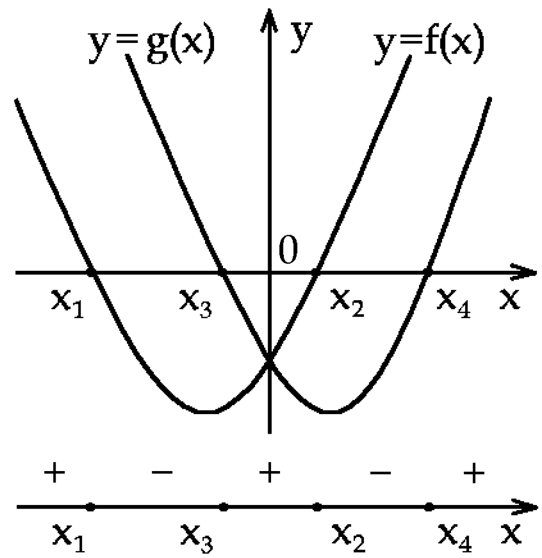
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3, \\ g(x) & = & x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3. \end{array}$$

Тогда $f(0) = g(0) = -a^2 + 2a - 3 < 0$ для любых a, так как дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -8 < 0$ и коэффициент при a^2 отрицателен. Поэтому $f(x)$ имеет два корня x_1 и x_2 разных знаков (произведение корней x_1 и x_2 равно $-a^2 + 2a - 3 < 0$), и $g(x)$ имеет два корня x_3 и x_4 разных знаков.

$$f(x) - g(x) = (x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3) -$$
$$- (x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3) = x(a^2 - 7a + 13).$$

$a^2 - 7a + 13 > 0$ при всех a, так как дискриминант $D = 49 - 52 = -3 < 0$ и коэффициент при a^2 положителен. Значит,

$$f(x) - g(x) > 0 \quad \text{при } x > 0,$$
$$f(x) - g(x) < 0 \quad \text{при } x < 0,$$
$$f(x) = g(x) \quad \text{при } x = 0.$$



Графики функций $f(x)$ и $g(x)$ при любом фиксированном a имеют „похожий“ вид: слева от вертикальной оси $f(x) < g(x)$, а справа $f(x) > g(x)$.

Решим неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ методом интервалов. Например, на интервале от x_2 до x_4 значения $f(x) > 0$, $g(x) < 0$, поэтому $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ на этом интервале.

Сумма длин интервалов, где $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, равна сумме длин интервалов $(x_1; x_3)$ и $(x_2; x_4)$, поэтому она равна

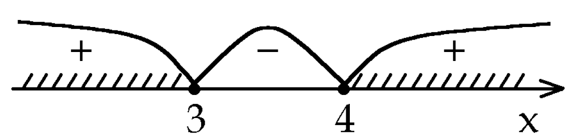
$$(x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) = (x_4 + x_3) - (x_1 + x_2).$$

По теореме Виета для уравнения $f(x) = 0$ имеем $x_1 + x_2 = -(2a^2 + 6)$, для уравнения $g(x) = 0$ имеем $x_3 + x_4 = -(a^2 + 7a - 7)$. Поэтому

$$(x_4 + x_3) - (x_1 + x_2) = -(a^2 + 7a - 7) + (2a^2 + 6) = a^2 - 7a + 13.$$

По условию задачи надо найти такие a, что $a^2 - 7a + 13 \geqslant 1$.

$$a^2 - 7a + 12 \geqslant 0,$$
$$(a-3)(a-4) \geqslant 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} a \leqslant 3, \\ a \geqslant 4. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.

Вариант 20.2

Ответы:

Задача 1. Доказательство аналогично доказательству задачи №1 варианта 10.1.

Задача 2. $7{,}25$.

Задача 3. $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. `Указание`. Использовать свойство арифметической прогрессии $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geqslant 2$ и свойства логарифмов.

Задача 5. $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Вариант 20.3

Ответы:

Задача 1. Указание. Перейти к одному основанию в логарифмах (например, к основанию 3) и доказать неравенство $\frac{(\log_3 \pi - 2)^2}{\log_3 \pi} > 0$.

Задача 2. $14,8$.

Задача 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. $-1; 0; 1; 2$.

Задача 5. $(-\infty; 4] \cup [5; +\infty)$.

7.5. Экзаменационные билеты 2001 г.

Вариант 21.1

Задача 1. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В данном случае $f(x) = 2\cos x + 1$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Вычислим $f(x_0) = 2\cos\frac{\pi}{3} + 1 = 2$. Далее вычислим производную $f'(x) = (2\cos x + 1)' = -2\sin x$. В точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ имеем $f'(x_0) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$. Искомое уравнение касательной имеет вид

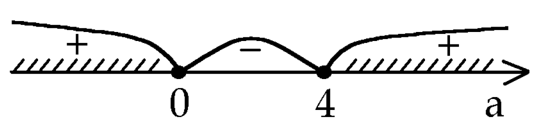
$$y = 2 - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{или} \quad y = -\sqrt{3}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2.$$

Ответ: $y = -\sqrt{3}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2$.

Задача 2. Уравнение является квадратным, оно имеет корни, если его дискриминант $D \geqslant 0$, находим:

$$D = (-2(a-1))^2 - 4(2a+1) = 4(a^2 - 2a + 1) - 8a - 4 = 4a^2 - 16a;$$
$$D \geqslant 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 16a \geqslant 0 \Leftrightarrow 4a(a-4) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов. Отметим на числовой оси нули функции $4a(a-4)$: $a = 0$ и $a = 4$, и в каждом из полученных интервалов определим знак выражения $4a(a-4)$. В соответствии со зна-



ком неравенства ($\geqslant$) находим: $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. При этих значениях параметра a уравнение имеет корни.

Дискриминант $D = 0$ при $a = 0$ и при $a = 4$. При $a = 0$ уравнение имеет один отрицательный корень ($x = -1$); при $a = 4$ — один положительный корень ($x = 4$).

Далее считаем $D \geqslant 0$, тогда исходное уравнение имеет два различных корня. Для определения знаков корней в зависимости от значения параметра a воспользуемся теоремой Виета, согласно которой для корней x_1 и x_2 выполнено

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(a-1) = 2a - 2, \\ x_1 x_2 = 2a + 1. \end{cases}$$

Если оба корня положительны, то сумма и произведение корней также положительны, верно и обратное. Поэтому,

$$\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 > 0, \\ 2a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1; +\infty).$$

С учётом условия $D > 0$ получим систему

$$\begin{cases} a \in (1; +\infty), \\ a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (4; +\infty).$$

Если оба корня отрицательны, то аналогичным образом получим

$$\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 < 0, \\ 2a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

С учётом условия $D > 0$ получим систему

$$\begin{cases} a \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right), \\ a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

Если корни имеют разные знаки, то это равносильно условию $x_1 x_2 < 0$, то есть $2a + 1 < 0$, откуда $a < -\frac{1}{2}$. Учитывая, что $D > 0$, получим

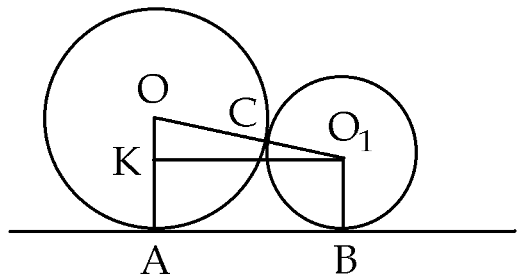
$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \\ a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right).$$

Если один из корней равен нулю, то это равносильно условию $x_1 x_2 = 0$, то есть $2a + 1 = 0$, откуда $a = -\frac{1}{2}$. Подставив $a = -\frac{1}{2}$ в условие $x_1 + x_2 = 2a - 2$, получим $x_1 + x_2 = -3$, а так как один из корней равен нулю, то другой отрицателен. Заметим, что при $a = -\frac{1}{2}$ дискриминант $D > 0$.

Ответ: уравнение имеет корни при $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. При $a = 0$ уравнение имеет один отрицательный корень; при $a = 4$ — один положительный корень; при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ — один отрицательный и один положительный корень; при $a = -\frac{1}{2}$ — один корень отрицательный, а другой равен нулю; при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ — два отрицательных корня; при $a \in (4; +\infty)$ — два положительных корня.

Задача 3. Дано:
$(O; R)$ — окружность,
$(O_1; r)$ — окружность,
C — точка касания окружностей,
AB — общая касательная.

Найти: AB.



Решение. Проведём отрезки OA и OB, они будут перпендикулярны прямой AB как радиусы, проведённые из центров окружностей в точки касания, следовательно, $OA \parallel O_1B$. Точка C лежит на отрезке, соединяющем центры окружностей, так как существует общая касательная ℓ к окружностям, проходящая через точку C, а $OC \perp \ell$, $O_1C \perp \ell$ как радиусы, проведённые в точку касания C. Далее, через точку O_1 проведём прямую параллельную AB, точку пересечения прямой с OA обозначим через K. Расстояние $AK = O_1B = r$.

Рассмотрим треугольник OKO_1: $\angle K = 90°$, $OO_1 = OC + CO_1 = R + r$, $OK = OA - AK = R - r$. По теореме Пифагора получим

$$KO_1^2 = OO_1^2 - OK^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr,$$

откуда $KO_1 = 2\sqrt{Rr}$. Так как $AB = KO_1$, то $AB = 2\sqrt{Rr}$.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$.

Задача 4.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2(x+y)^2 - y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2x^2 + y^2 + 4xy = 14. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое уравнение, получим $xy = 2$:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3 \cdot 2 = 12, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим y через x и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} 2x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 6, \\ y = \frac{2}{x}. \end{cases}$$

Решим отдельно первое уравнение системы:

$$2x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{4}{x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Переменные x и y связаны соотношением $y = \frac{2}{x}$, поэтому получаем четыре решения: $(1; 2)$; $(-1; -2)$; $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Ответ: $(1; 2)$; $(-1; -2)$; $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Задача 5. Разложим на множители левую часть уравнения:

$$m^2\frac{\ln 2}{\ln 10} + 2nm - 3m\frac{\ln 2}{\ln 10} - 6n - \sqrt{3}nm\frac{\ln 2}{\ln 10} - 2\sqrt{3}n^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m^2 \lg 2 + 2nm - 3m \lg 2 - 6n - \sqrt{3}nm \lg 2 - 2\sqrt{3}n^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m^2 \lg 2 + 2nm) - (3m \lg 2 + 6n) - (\sqrt{3}nm \lg 2 + 2\sqrt{3}n^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m(m \lg 2 + 2n) - 3(m \lg 2 + 2n) - \sqrt{3}n(m \lg 2 + 2n) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m \lg 2 + 2n)(m - 3 - \sqrt{3}n) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \lg 2 + 2n = 0, \\ m - 3 - \sqrt{3}n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -\frac{\lg 2}{2}m, \\ m = 3 + \sqrt{3}n. \end{array}\right.$$

Так как по условию m и n — целые числа, а число $-\frac{\lg 2}{2}$ не является рациональным, то уравнение $n = -\frac{\lg 2}{2}m$ в целых числах имеет единственное решение $m = 0$, $n = 0$. Аналогично, уравнение $m = 3 + \sqrt{3}n$ имеет единственное решение в целых числах $m = 3$, $n = 0$, так как число $\sqrt{3}$ является иррациональным.

Ответ: $m = 0$, $n = 0$ и $m = 3$, $n = 0$.

Вариант 21.2

Ответы:

Задача 1. $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 2$.

Задача 2. Уравнение имеет корни при $a \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. При $a = -2; \frac{1}{2}; 3$ уравнение имеет один положительный корень; при $a \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{6}{7}\right)$ — два положительных корня; при $a = \frac{6}{7}$ — один корень отрицательный, а другой равен нулю; при $a \in \left(\frac{6}{7}; 3\right)$ — один отрицательный и один положительный корень; при $a \in (3; +\infty)$ — два положительных корня.

Задача 3. $R = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$, $r = \frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}$.

Задача 4. $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(4; 5)$; $(-4; -5)$.

Задача 5. $m = 0$, $n = 0$ и $m = 0$, $n = -1$.

Вариант 21.3

Ответы:

Задача 1. $y = 8x + 2 - 2\pi$.

Задача 2. Уравнение имеет корни при $a \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$. При $a = 0; \frac{4}{3}$ уравнение имеет один положительный корень; при $a \in (-\infty; 0) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right)$ — два положительных корня; при $a \in (0; 1)$ — один положительный и один отрицательный корень; при $a = 1$ — один корень положительный, а другой равен нулю.

Задача 3. $52; 12\sqrt{13}; 8\sqrt{13}$.

Задача 4. $(3; 5); (-3; -5); \left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right); \left(-\frac{5}{3}; -\frac{13}{3}\right)$.

Задача 5. $m = 0$, $n = 0$ и $m = 1$, $n = 0$.

Вариант 22.1

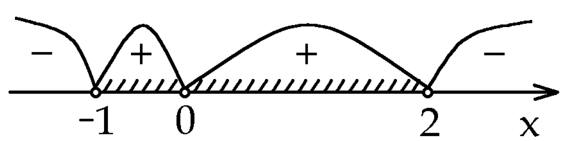
Задача 1. Так как основание логарифма содержит неизвестную, то исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x^2} > 1, \\ 7 > 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < \frac{x+2}{x^2} < 1, \\ 7 < 3. \end{cases}$$

Вторая система не имеет решений, так как не выполнено условие $7 < 3$. Первая система равносильна неравенству

$$\frac{x+2}{x^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+2-x^2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-2)(x+1)}{x^2} > 0,$$

которое решаем методом интервалов и находим $x \in (-1; 0) \cup (0; 2)$.



Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 2)$.

Задача 2.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y} = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x - y = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k+n), \\ y = x - 2\pi k, \ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi(n-k), \ k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi(k+n)$, $y = \frac{\pi}{4} + \pi(n-k)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Обозначим $\sqrt{3+x}=t\geqslant 0$, тогда $x=t^2-3$ и неравенство примет вид

$$\sqrt{2-t}<\sqrt{t^2+1}.$$

Так как обе части неравенства неотрицательны, возведём в квадрат и получим

$$\begin{cases} 2-t<t^2+1, \\ 2-t\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+t-1>0, \\ t\leqslant 2. \end{cases}$$

Корнями уравнения $t^2+t-1=0$ являются числа $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, а решениями квадратного неравенства совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ t>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{array} \right.$$

Учитывая неравенство $t\geqslant 2$ получаем

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ t>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \\ t\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow t\in\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};2\right].$$

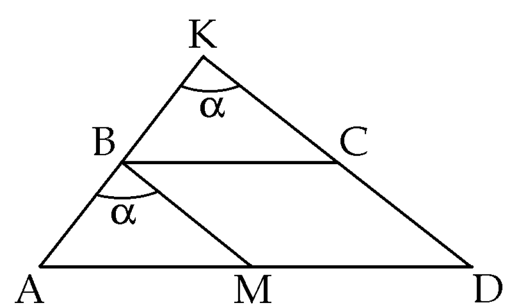
Возвращаемся к переменной x:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<\sqrt{3+x}\leqslant 2\Leftrightarrow\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2<3+x\leqslant 2^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt{5}}{2}<3+x\leqslant 4\Leftrightarrow\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x\leqslant 1\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};1\right].$$

Ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};1\right]$.

Задача 4. Дано:
$ABCD$ — трапеция,
$AB=9$ см, $CD=12$ см,
$AD=30$ см, $BC=15$ см,
K — точка пересечения прямых AB и CD.



Найти: $\angle AKD$.

Решение. Обозначим $\angle AKD=\alpha$ и проведём $BM\parallel CD$, тогда

$$\angle ABM=\angle AKD=\alpha,$$

$$BM=CD=12,\quad MD=BC=15,\quad AM=AD-MD=30-15=15.$$

По теореме косинусов для треугольника ABM имеем

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow 15^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 225 = 81 + 144 - 216\cos\alpha, \text{ откуда } \cos\alpha = 0 \text{ и } \alpha = 90^\circ.$$

Ответ: 90°.

Задача 5. Оценим левую часть уравнения. Так как

$$3 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x-1)^2 + 4 \leqslant 4$$

для любого x, то

$$\log_2(3 + 2x - x^2) \leqslant \log_2 4 = 2$$

для любого допустимого x.

Для оценки правой части неравенства предварительно докажем неравенство $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ для любого $t > 0$. Так как $\frac{(t-1)^2}{t} \geqslant 0$ для любого $t > 0$, то

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} \geqslant 0 \Leftrightarrow t - 2 + \frac{1}{t} \geqslant 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geqslant 2.$$

Неравенство доказано.

Значения x, при которых $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 0$ не являются допустимыми, поэтому положив $t = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) > 0$, получим

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \geqslant 2.$$

Таким образом, левая часть исходно уравнения $\leqslant 2$, а правая часть $\geqslant 2$ для любого допустимого x. Равенство возможно лишь в случае, когда обе части равны 2. Получаем систему

$$\begin{cases} \log_2(3 + 2x - x^2) = 2, \\ \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2x - x^2 = 4, \\ \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ удовлетворяет исходному уравнению.
Ответ: 1.

Вариант 22.2

Ответы:

Задача 1. $(1; +\infty)$.

Задача 2. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $y = (-1)^n\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. $\left[-1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задача 4. $\frac{a(b+c)}{2}$.

Задача 5. -1.

Вариант 22.3

Ответы:

Задача 1. $(-5; -4)$.

Задача 2. $x = \frac{5\pi}{12} \pm \frac{\pi}{12} + \pi n$, $y = \frac{5\pi}{12} \mp \frac{\pi}{12} - \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, знаки берутся либо одновременно верхние, либо одновременно нижние.

Задача 3. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{5}+3}{4}\right)$.

Задача 4. 54 см^2.

Задача 5. 2.

Вариант 23.1

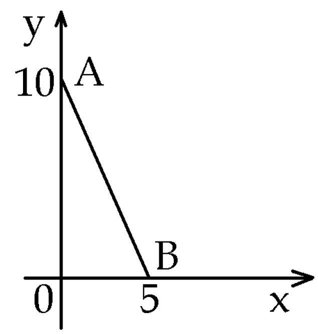
Задача 1.

$$5^x - 3^{x+1} = 2(5^{x-1} - 3^{x-2}) \Leftrightarrow 5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^{x-2+2} - 2 \cdot 5^{x-2+1} = 3^{x-2+3} - 2 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^{x-2} \cdot 25 - 2 \cdot 5^{x-2} \cdot 5 = 3^{x-2} \cdot 27 - 2 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^{x-2}(25 - 10) = 3^{x-2}(27 - 2) \Leftrightarrow 5^{x-2} \cdot 15 = 3^{x-2} \cdot 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5^{x-2} \cdot 15}{3^{x-2} \cdot 15} = \frac{3^{x-2} \cdot 25}{3^{x-2} \cdot 15} \Leftrightarrow \frac{5^{x-2}}{3^{x-2}} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{1} \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 2. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид
$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$
У нас $x_0 = 1$, $y_0 = 8$, $f(x) = \sqrt{\left(5 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$. Найдём
$$f'(x) = \left(\left(5 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\left(5 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}}\left(5 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}};$$
$$f'(1) = -1 \cdot (5 - 1)^{\frac{1}{2}} = -2.$$
Подставив найденные значения в уравнение касательной, получим
$$y = 8 - 2(x - 1) \quad \text{или} \quad y = -2x + 10.$$

Найдём точки пересечения касательной $y = -2x + 10$ с осями координат: если $x = 0$, то $y = 10$; если $y = 0$, то $x = 5$. Отметим на плоскости xOy точки $A(0;10)$ и $B(5;0)$.



Из прямоугольного треугольника AOB по теореме Пифагора найдём

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Ответ: $5\sqrt{5}$.

Задача 3.

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18, \\ xy + x^2 + y^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (x+y)^2 - 2xy = 18, \\ (x+y)^2 - xy = 19. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных $a = x + y$, $b = xy$. В новых переменных система примет вид

$$\begin{cases} a + a^2 - 2b = 18, \\ a^2 - b = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a^2 - 2b = 18, \\ b = a^2 - 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a^2 - 2(a^2 - 19) = 18, \\ b = a^2 - 19. \end{cases}$$

Первое уравнение системы $-a^2 + a + 20 = 0$ имеет корни $a = -4$ и $a = 5$.

При $a = -4$ находим $b = (-4)^2 - 19 = -3$. Возвращаемся к исходным переменным.

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - y, \\ (-4 - y)y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - y, \\ y^2 + 4y - 3 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения $D = 16 + 12 = 28$, корни $y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$. Итак,

$$\begin{cases} x = -4 - y, \\ y = -2 \pm \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2 + \sqrt{7}, \\ y = -2 - \sqrt{7}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 - \sqrt{7}, \\ y = -2 + \sqrt{7}. \end{cases} \end{array} \right.$$

При $a = 5$ находим $b = 5^2 - 19 = 6$. Возвращаемся к исходным переменным.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ (5 - y)y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$

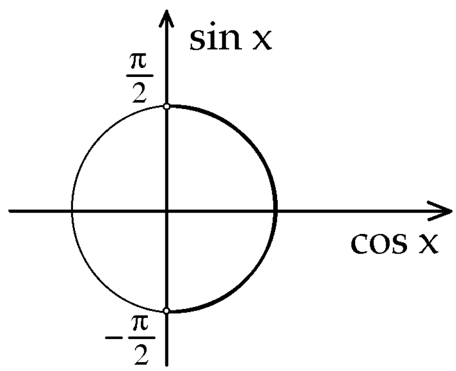
Ответ: $(-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7})$; $(-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})$; $(3; 2)$; $(2; 3)$.

Задача 4.

$$4\cos x - \sin 2x > 0 \Leftrightarrow 4\cos x - 2\sin x\cos x > 0 \Leftrightarrow 2\cos x(2-\sin x) > 0.$$

Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то $-1 \leqslant -\sin x \leqslant 1$, откуда $1 \leqslant 2-\sin x \leqslant 3$, то есть $2-\sin x > 0$ для любого x. Следовательно, получаем неравенство $\cos x > 0$, решениями которого являются

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5.

$$2\left(\sqrt{1-|x|}\right)^2 - x > a \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2|x|-x > a, \\ |x| \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 2-2x-x > a, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 2+2x-x > a, \\ -1 \leqslant x < 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1).

$$\begin{cases} 2-2x-x > a, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2-a}{3}, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Если $\frac{2-a}{3} \leqslant 0$, то решений нет; если $0 < \frac{2-a}{3} \leqslant 1$, то $0 \leqslant x < \frac{2-a}{3}$; если $\frac{2-a}{3} > 1$, то $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Таким образом, для системы (1) получаем: при $a \geqslant 2$ решений нет; при $-1 \leqslant a < 2$ $x \in \left[0; \frac{2-a}{3}\right)$; при $a < -1$ $x \in [0; 1]$.

Решаем систему (2).

$$\begin{cases} 2+x > a, \\ -1 \leqslant x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a-2, \\ -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Если $a-2 < -1$, то $-1 \leqslant x < 0$; если $-1 \leqslant a-2 < 0$, то $a-2 < x < 0$; если $a-2 \geqslant 0$, то решений нет.

Таким образом, для системы (2) получаем: при $a<1$ $x\in[-1;0)$; при $1\leqslant a<2$ $x\in(a-2;0)$; при $a\geqslant 2$ решений нет.

Объединяем решения систем (1) и (2): при $a<-1$ $x\in[0;1]\cup[-1;0]=$ $=[-1;1]$; при $-1\leqslant a<1$ $x\in\left[-1;\frac{2-a}{3}\right)$; при $1\leqslant a<2$ $x\in\left(a-2;\frac{2-a}{3}\right)$; при $a\geqslant 2$ решений нет.

Ответ: при $a<-1$ $x\in[-1;1]$; при $-1\leqslant a<1$ $x\in\left[-1;\frac{2-a}{3}\right)$; при $1\leqslant a<2$ $x\in\left(a-2;\frac{2-a}{3}\right)$; при $a\geqslant 2$ решений нет.

Вариант 23.2

Ответы:

Задача 1. 3.

Задача 2. Площадь каждого треугольника равна 8.

Задача 3. $(-4;2)$; $(2;-4)$; $\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2};\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2};\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Задача 4. $(-\pi+2\pi n;2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 5. При $a<-\frac{1}{2}$ $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; при $-\frac{1}{2}\leqslant a<\frac{1}{2}$ $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1-a}{3}\right)$; при $\frac{1}{2}\leqslant a<1$ $x\in\left(a-1;\frac{1-a}{3}\right)$; при $a\geqslant 1$ решений нет.

Вариант 23.3

Ответы:

Задача 1. 2.

Задача 2. 2.

Задача 3. $(9;1)$; $(1;9)$.

Задача 4. $\left(\pi n;\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 5. При $a\leqslant-\frac{1}{2}$ решений нет; при $-\frac{1}{2}<a\leqslant-\frac{1}{4}$ $x\in\left(-2(2a+1);\frac{2}{3}(2a+1)\right)$; при $-\frac{1}{4}<a\leqslant\frac{1}{4}$ $x\in\left[-1;\frac{2}{3}(2a+1)\right)$; при $a>\frac{1}{4}$ $x\in[-1;1]$.

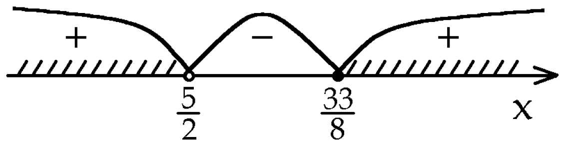
Вариант 24.1

Задача 1. Область определения функции Y задаётся неравенством

$$6-\frac{4x+3}{2x-5}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{6(2x-5)-(4x+3)}{2x-5}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{8x-33}{2x-5}\geqslant 0,$$

которое решим методом интервалов. Отмечаем нуль числителя $x=\frac{33}{8}$ и нуль знаменателя $x=\frac{5}{2}$ на оси x и в каждом из полученных интервалов определяем знак функции $y(x)=\frac{8x-33}{2x-5}$.

В соответствии со знаком неравенства выписываем ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\cup$ $\cup\left[\frac{33}{8};+\infty\right)$.



Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{33}{8}; +\infty\right)$.

Задача 2.

$$9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 75 \cdot 3^x - \frac{1}{3} - 54 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 25 \cdot 3^x - 54 = 0.$$

Данное показательное уравнение решаем заменой $t = 3^x > 0$. Получаем квадратное уравнение

$$t^2 - 25t - 54 = 0,$$

дискриминант которого $D = 25^2 + 4 \cdot 54 = 841$ положителен и корни $t = 27$ и $t = -2$. Так как $t = 3^x > 0$, то $t = -2$ не подходит. Возвращаемся к переменной x, получаем одно уравнение

$$3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 3. Применим формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

и подставим в неё данные значения $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{3}$. Получим

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{3}}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3}} = \frac{(3 - 20) \cdot 12}{(12 + 5) \cdot 12} = -1.$$

Тогда

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha - \beta = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

По условию $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$. Сложив первое и третье неравенства, получим $\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{3\pi}{2}$, то есть $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{4}$.
Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

Задача 4. Вычислим дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - a + 3) = 4(a^2 + 2a + 1 - a^2 + a - 3) = 4(3a - 2).$$

Уравнение будет иметь корни, если $D \geqslant 0$, то есть при $a \geqslant \frac{2}{3}$. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(a+1), \\ x_1 x_2 = a^2 - a + 3. \end{cases}$$

Выразим сумму кубов корней через a:

$$f(a) = x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2) =$$
$$= 2(a+1)(4(a+1)^2 - 3(a^2-a+3)) = 2(a+1)(a^2+11a-5) = 2(a^3+12a^2+6a-5).$$

Найдём производную $f'(a) = 2(3a^2 + 24a + 6)$ и её критические точки из условия $f'(a) = 0$:

$$3a^2 + 24a + 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 8a + 2 = 0.$$

Дискриминант $D = 64 - 8 = 56$, корни уравнения $a_{1;2} = \frac{-8\pm\sqrt{56}}{2} = -4 \pm \sqrt{14}$. Определим знаки $f'(a)$ на интервале $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Обе критические точки $a_{1;2} \notin$ $\notin \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, следовательно, $f'(a)$ сохраняет знак на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Взяв любую точку, например, $1 \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и определив знак $f'(1) = 2(3+24+6) = 66 > 0$, заключаем, что $f'(a) > 0$ при $a \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Следовательно, функция $f(a)$ монотонно возрастает на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и достигает своего наименьшего значения в точке $a = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 5.

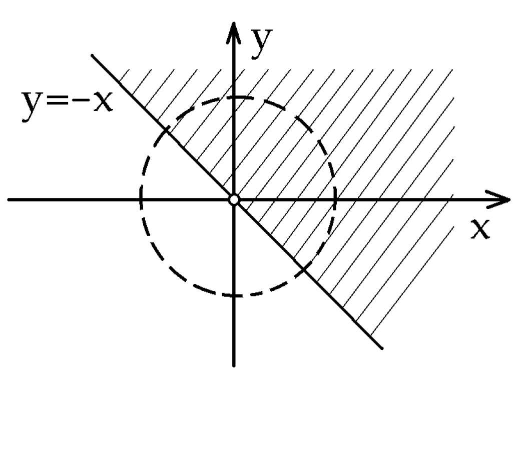
$$\log_{x^2+y^2}(x+y) > 1 \Leftrightarrow \log_{x^2+y^2}(x+y) > \log_{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right).$$

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x + y > 0, \\ x^2 + y^2 > 0, \\ x^2 + y^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -x, \\ x \neq 0,\ y \neq 0, \\ x^2 + y^2 \neq 1. \end{cases}$$

Неравенство $y > -x$ на плоскости xOy задаёт полуплоскость с границей $y = -x$, причём граница не входит в эту полуплоскость и изображается пунктиром. Неравенства $x \neq 0$, $y \neq 0$ исключают начало координат из искомой области. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ — это уравнение окружности с центром в координат и радиусом $R = 1$.

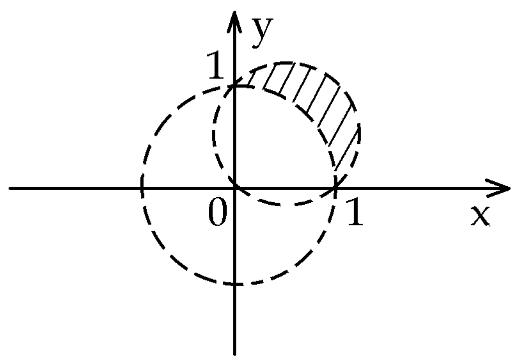
Графически ОДЗ показано на рисунке в виде заштрихованной области.



На ОДЗ исходное логарифмическое неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

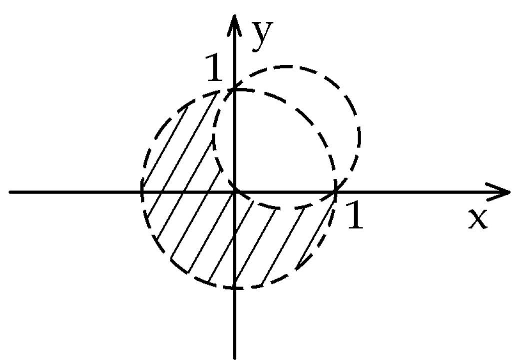
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2>1,\\ x+y>x^2+y^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2<1,\\ x+y<x^2+y^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x^2+y^2>1, & (1)\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, & (2)\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2<1, & (3)\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. & (4)\end{cases}\end{array}\right.$$

Неравенство (1) задаёт на плоскости xOy внешность круга с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R=1$, неравенство (2) задаёт внутренность круга с центром в точке $O_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отметим, что окружности

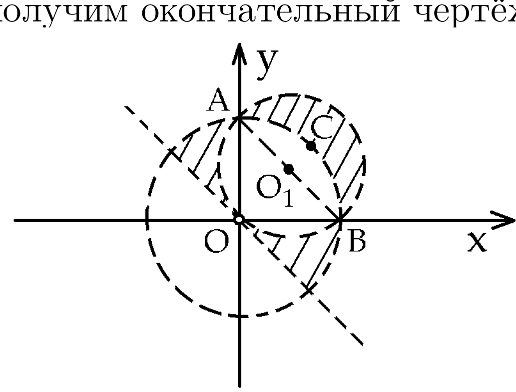


пересекаются в точках $A(0;1)$ и $B(1;0)$.

Аналогично строим множество, заданное неравенствами (3) и (4).



Объединив области, изображённые на последних двух рисунках и взяв их пересечение с ОДЗ, получим окончательный чертёж.



Площадь заштрихованной фигуры есть сумма площадей меньшего круга и большего полукруга за вычетом двух площадей их общей части, которая состоит из меньшего полукруга и сегмента AO_1BC. Заметим, что точка O_1 является серединой отрезка AB и $\angle AOB = \alpha = \frac{\pi}{2}$. Площадь сегмента

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Площадь меньшего круга $S_1 = \pi r^2 = \frac{\pi}{2}$, Площадь большего полукруга $S_2 = = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}$.

Окончательно получаем

$$S = S_1 + S_2 - 2\left(\frac{1}{2}S_1 + S_{\text{сегм}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Ответ: 1.

Вариант 24.2

Ответы:

Задача 1. $(-6; 0]$.

Задача 2. 1.

Задача 3. $\frac{7\pi}{4}$.

Задача 4. $k = 0$. `Указание.` При решении неравенства $D \geqslant 0$ и нахождении критических точек производной можно использовать графический метод.

Задача 5. $S = 1$. `Указание.` Решение аналогично решению задачи 5 варианта 14.1.

Вариант 24.3

Ответы:

Задача 1. $(-\infty; 0] \cup (4; +\infty)$.

Задача 2. -4.

Задача 3. $\frac{15\pi}{4}$.

Задача 4. Сумма кубов корней будет наименьшей при $a = 2 + \sqrt{7}$, будет наибольшей при $a = -\frac{1}{2}$.

Задача 5. $S = 1$.

Вариант 25.1

Задача 1.

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3, \\ x-y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$.

Задача 2. Дано:

$\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия,
$b_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$,
$b_1 + b_2 + b_3 = 221$,
$b_3 - b_1 = 136$.

Найти: S_6.

Решение. По формуле общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, где q — знаменатель прогрессии, имеем $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$. Из условий получаем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 221, \\ b_1 q^2 - b_1 = 136 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 221, \\ b_1(q^2-1) = 136. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $b_1 = \frac{136}{q^2-1}$ и подставим в первое уравнение, получим

$$\frac{136}{q^2-1}(1+q+q^2) = 221.$$

Полученное уравнение сокращаем на 17 и находим q:

$$\frac{8}{q^2-1}(1+q+q^2) = 13 \Leftrightarrow 8(1+q+q^2) = 13(q^2-1) \Leftrightarrow 5q^2 - 8q - 21 = 0.$$

Дискриминант $D = 484$, $q_1 = \frac{8+22}{10} = 3$, $q_2 = \frac{8-22}{10} = -1,4$ — не подходит, так как по условию все члены прогрессии положительны.

Теперь находим $b_1 = \frac{136}{q^2-1} = \frac{136}{8} = 17$. Применив формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии

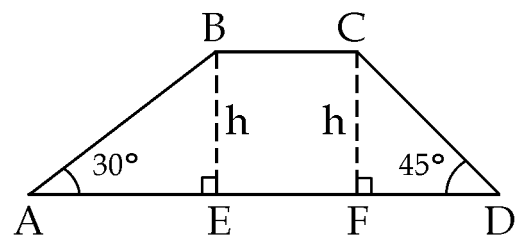
$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},$$

находим

$$S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{17(1-3^6)}{1-3} = 6188.$$

Ответ: 6188.

Задача 3. Дано:
$ABCD$ — трапеция,
$AD = 6$ см, $BC = 4$ см,
$\angle BAD = 30°$, $\angle CDA = 45°$.



Найти: $S_{\text{трапеции}}$.

Решение. Проведём высоты $BE = CF = h$, тогда $EF = BC = 4$. Из прямоугольного треугольника ABE находим $AE = BE \operatorname{ctg} 30° = h\sqrt{3}$. Так как треугольник CFD — прямоугольный и равнобедренный, то $FD = CF = h$. Тогда $AE + FD = AD - EF = 6 - 4 = 2$, то есть $h\sqrt{3} + h = 2$, откуда $h = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

Площадь трапеции

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(6+4)\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{10}{\sqrt{3}+1} = 5(\sqrt{3}-1).$$

Ответ: $5(\sqrt{3}-1)$ см^2.

Задача 4. Сделаем следующие преобразования, цель которых представить исходное выражение в виде разности квадратов.

$$x^4 + 2x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2 = (x^2+3)^-(2x)^2 = \\ = (x^2 + 3 - 2x)(x^2 + 3 + 2x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 3).$$

Мы получили искомое разложение в виде произведения двух приведённых (то есть у которых коэффициент при x^2 равен 1) квадратных трёхчленов.

Ответ: $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 3)$.

Задача 5. Оценим правую часть уравнения:

$$2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 + \sqrt{2} = 2(x - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \geqslant \sqrt{2}$$

для любого x, так как $(x - \sqrt{2})^2 \geqslant 0$ для любого x.

Теперь оценим левую часть уравнения. При $x \neq 0$ имеем $\frac{\pi x^2}{x^4+4} = \frac{\pi}{x^2+\frac{4}{x^2}}$. Подставив в известное неравенство $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ значения $a = x^2$, $b = \frac{4}{x^2}$ получим

$$x^2 + \frac{4}{x^2} \geqslant 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} = 4.$$

Следовательно, $\frac{\pi}{x^2+\frac{4}{x^2}} \leqslant \frac{\pi}{4}$. При $x = 0$ аргумент $\frac{\pi x^2}{x^4+4} = 0$. Получаем при любом x оценку

$$0 \leqslant \frac{\pi x^2}{x^4+4} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Так как функция $y = \sin t$ монотонно возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, то

$$\sin\left(\frac{\pi x^2}{x^4+4}\right) \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$2\sin\left(\frac{\pi x^2}{x^4+4}\right) \leqslant \sqrt{2}.$$

Исходное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда обе части уравнения равны $\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} 2\sin\left(\frac{\pi x^2}{x^4+4}\right) = \sqrt{2}, \\ 2(x-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x^2}{x^4+4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ (x-\sqrt{2})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Отметим, что при решении последней системы корень $x = \sqrt{2}$ второго уравнения можно просто подставить в первое уравнение и проверить получившееся равенство.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Вариант 25.2

Ответы:

Задача 1. $\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

Задача 2. 5.

Задача 3. $\sqrt{61}$ см.

Задача 4. $(x^2+x+2)(x^2-x-2)$.

Задача 5. -2.

Вариант 25.3

Ответы:

Задача 1. $(3; 2)$; $\left(\log_2 \frac{1}{9}; \log_3 8\right)$.

Задача 2. $3; 6; 12; \ldots$ или $3; -6; 12; \ldots$

Задача 3. 36 дм.

Задача 4. $(x^2+\sqrt{2}x+3)(x^2-\sqrt{2}x+3)$.

Задача 5. 8.

7.6. Экзаменационные билеты 2002 г.

Вариант 26.1

Задача 1.

$$\sqrt{2^{2x}} = 4^{-\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{-2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -2\sqrt{x}.$$

Полученное иррациональное уравнение решаем возведением в квадрат:

$$\frac{x^2}{4} = 4x \Leftrightarrow x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x-16) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 16. \end{array}\right.$$

Проверка показывает, что $x = 16$ является посторонним корнем.

Ответ: $x = 0$.

Задача 2. По определению модуля

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \geqslant 1, \\ -x+1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

I случай. При $x \geqslant 1$ получаем уравнение

$$x + 2 = a(x-1) \Leftrightarrow (1-a)x = -a-2,$$

которое при $a \neq 1$ имеет решение $x_1 = \frac{a+2}{a-1}$. Так как $x \geqslant 1$, то решим неравенство

$$\frac{a+2}{a-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{a+2}{a-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a+2-a+1}{a-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{a-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1.$$

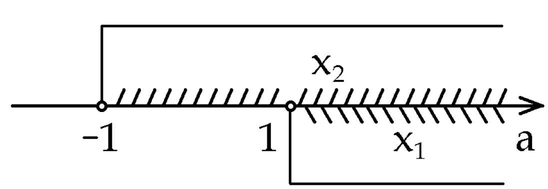
II случай. При $x < 1$ получаем уравнение

$$x + 2 = a(1-x) \Leftrightarrow (a+1)x = a-2,$$

которое при $a \neq -1$ имеет решение $x_2 = \frac{a-2}{a+1}$. Так как $x < 1$, то решим неравенство

$$\frac{a-2}{a+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{a-2}{a+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{a-2-a-1}{a+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{a+1} < 0 \Leftrightarrow a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1.$$



Таким образом, исходное уравнение с модулем имеет решение x_1 при $a > 1$ и решение x_2 при $a > -1$.

Одно решение будет при $a \in (-1; 1]$, и это будет $x_2 = \frac{a-2}{a+1}$.

Ответ: $a \in (-1; 1]$, $x = \frac{a-2}{a+1}$.

Задача 3.

$$\begin{cases} xy + x + y, \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x + y) = 1, \\ (x + y)^2 - 2xy = 6. \end{cases}$$

Данная система является симметрической (если переменные x и y поменять местами, то система не изменится) и она решается заменой переменных $x + y = u$, $xy = v$.

В новых переменных получаем:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 - 2v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u^2 - 2(1 - u) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u^2 + 2u - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ \left[\begin{array}{l} u = 2, \\ u = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2, \\ v = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} u = -4, \\ v = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 - y, \\ (2 - y)y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 - y, \\ (-4 - y)y = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 - y, \\ y^2 - 2y - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 - y, \\ y^2 + 4y + 5 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 - \sqrt{2}, \\ y = 1 + \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, так как уравнение $y^2 + 4y + 5 = 0$ имеет отрицательный дискриминант.

Окончательно получаем два решения

$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2}, \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \text{и} \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}, \\ y = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$; $(1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

Задача 4. Сделаем замену переменной $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$. Получим неравенство

$$2\sqrt{11 - 14t} > 3 - 7t$$

для решения которого рассмотрим два случая.

I случай.

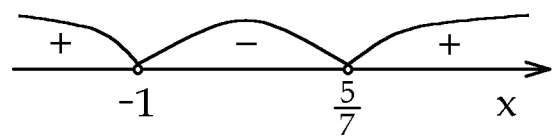
$$\begin{cases} 3 - 7t \geqslant 0, \\ (2\sqrt{11 - 14t})^2 > (3 - 7t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant \frac{3}{7}, \\ 4(11 - 14t) > 9 - 42t + 49t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant \frac{3}{7}, \\ 7t^2 + 2t - 5 < 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $7t^2 + 2t - 5 = 0$ являются числа

$$t = \frac{-2 - 12}{14} = -1 \text{ и } t = \frac{-2 + 12}{14} = \frac{5}{7}.$$

Методом интервалов получаем, что решением неравенства $7t^2 + 2t - 5 < 0$



является промежуток $\left(-1; \frac{5}{7}\right)$. Учитывая неравенство $t \leqslant \frac{3}{7}$ и ограничение на t: $t \in [-1; 1]$, получаем $t \in \left(-1; \frac{3}{7}\right]$.

II случай.

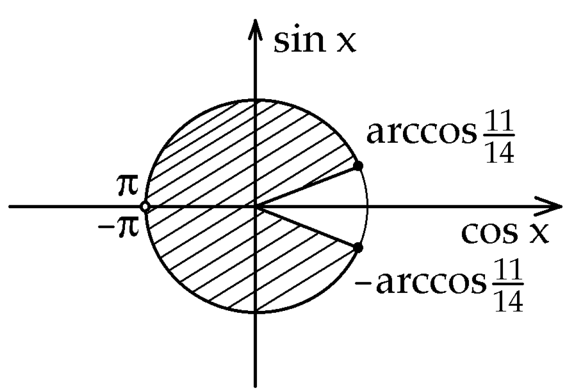
$$\begin{cases} 3 - 7t < 0, \\ 11 - 14t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{3}{7}, \\ t \leqslant \frac{11}{14} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(\frac{3}{7}; \frac{11}{14}\right].$$

Интервал $\left(\frac{3}{7}; \frac{11}{14}\right]$ содержится в отрезке $[-1; 1]$.

Возвращаясь к исходной переменной, получим совокупность двух тригонометрических неравенств:

$$-1 < \cos x \leqslant \frac{3}{7} \quad \text{и} \quad \frac{3}{7} < \cos x \leqslant \frac{11}{14},$$

откуда $-1 < \cos x \leqslant \frac{11}{14}$.



Решением последнего двойного неравенства являются следующие x:

$$x \in \left[\arccos\frac{11}{14} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right) \cup \left(-\pi + 2\pi k; -\arccos\frac{11}{14} + 2\pi k\right], \ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\arccos\frac{11}{14} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right) \cup \left(-\pi + 2\pi k; -\arccos\frac{11}{14} + 2\pi k\right]$, $n, k \in$ $\in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Обозначим $f_1(x) = -x^2 + 1$, $f_2(x) = x^2 - x + \frac{9}{4}$.

Пусть $(x_1; y_1)$ — точка касания графика функции $y = f_1(x)$ и искомой касательной, $(x_2; y_2)$ — точка касания графика функции $y = f_2(x)$ и той же касательной. Заметим, что, вообще говоря, $(x_1; y_1) \neq (x_2; y_2)$. Уравнение касательной к графику функции $y = f_1(x)$, проходящей через точку $(x_1; y_1)$ имеет вид:

$$y = y_1 + f_1'(x_1)(x - x_1).$$

Вычислив $y_1 = f(x_1) = -x_1^2 + 1$, $f_1'(x_1) = -2x_1$, получим уравнение касательной $y = -x_1^2 + 1 - 2x_1(x - x_1)$ или

$$y = -2x_1 x + x_1^2 + 1. \tag{1}$$

Аналогично получим уравнение касательной к графику функции $y =$ $= f_2(x)$, проходящей через точку $(x_2; y_2)$: $y = x_2^2 - x_2 + \frac{9}{4} + (2x_2 - 1)(x - x_2)$ или

$$y = (2x_2 - 1)x - x_2^2 + \frac{9}{4}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) задают одну и ту же прямую, поэтому коэффициенты при переменной x и свободные члены в правых частях уравнений (1) и (2) должны быть равны. Получаем систему:

$$\begin{cases} -2x_1 = 2x_2 - 1, \\ x_1^2 + 1 = -x_2^2 + \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - x_2, \\ \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2 + 1 = -x_2^2 + \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - x_2, \\ \frac{1}{4} - x_2 + x_2^2 + 1 = -x_2^2 + \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - x_2, \\ 2x_2^2 - x_2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - x_2, \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 1, \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}, \\ x_2 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставив в уравнение (1) $x_1 = -\frac{1}{2}$ или в уравнение (2) $x_2 = -\frac{1}{2}$, получим уравнение касательной $y = -2x + 2$. При подстановке в уравнение (1) $x_1 =$ $-\frac{1}{2}$ или в уравнение (2) $x_2 = 1$ получим уравнение другой касательной $y = x + \frac{5}{4}$.

Ответ: $y = -2x + 2$, $y = x + \frac{5}{4}$.

Вариант 26.2

Ответы:

Задача 1. $1; -\frac{2}{7}$.

Задача 2. $a \in (-1; 1]$, $x = \frac{3a-1}{a+1}$.

Задача 3. $(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$; $(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$.

Задача 4. $\arcsin\frac{7}{8} + 2\pi n < x < \pi - \arcsin\frac{7}{8} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $y = 8x + 4$.

Вариант 26.3

Ответы:

Задача 1. Решений нет.

Задача 2. $a \in (-1; 1]$, $x = \frac{a}{2(a+1)}$.

Задача 3. $(1; 2)$; $(2; 1)$; $(0; -3)$; $(-3; 0)$; $(-2; 1)$; $(1; -2)$.

Задача 4. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $y = 0$.

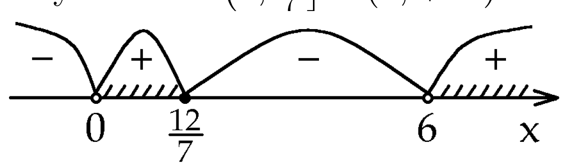
Вариант 27.1

Задача 1. Так как правая часть неравенства отрицательна при любом x, а левая часть неравенства неотрицательна при любом x из ОДЗ, то исходное неравенство верно для любого x из ОДЗ.

Находим ОДЗ, это и будет решением задачи.

$$\frac{2}{x} - \frac{5}{6-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{12-7x}{x(6-x)} \geqslant 0.$$

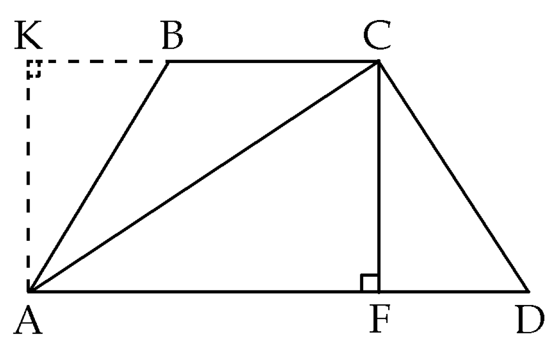
Методом интервалов получим $x \in \left(0; \frac{12}{7}\right] \cup (6; +\infty)$.



Ответ: $\left(0; \frac{12}{7}\right] \cup (6; +\infty)$.

Задача 2. Дано:
$ABCD$ — трапеция,
$AD \parallel BC$, $AB = CD$,
$AC = 25$ см, $CF \perp AD$,
$CF = 15$ см.

Найти: S_{ABCD}.



Решение. Из прямоугольного треугольника AFC по теореме Пифагора находим
$$AF = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20.$$
Проводим $AK \perp BC$. Получим $\triangle AKB = \triangle CFD$ (по катету ($AK = CF$) и гипотенузе ($AB = CD$)).
$$S_{ABCD} = S_{AKCF} = AF \cdot CF = 20 \cdot 15 = 300.$$

Ответ: 300 см^2.

Задача 3. ОДЗ уравнения задаётся системой
$$\begin{cases} x^2 + 4x + 5 > 0, \\ 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + 1 > 0, \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ — любое число}, \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}.$$

Преобразуем основание логарифма
$$\sqrt{2\sqrt{3} - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3} - \sqrt{11}} \cdot \sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{11}}}{\sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{11}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{11})^2}}{\sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{11}}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{11}}} = (2\sqrt{3} + \sqrt{11})^{-\frac{1}{2}}.$$

Исходное уравнение на ОДЗ примет вид
$$\log_{(\sqrt{11}+2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}(x^2 + 4x + 5) = \log_{(\sqrt{11}+2\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}}(2x + 5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_{(\sqrt{11}+2\sqrt{3})}(x^2 + 4x + 5) = -2\log_{(\sqrt{11}+2\sqrt{3})}(2x + 5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{(\sqrt{11}+2\sqrt{3})}(x^2 + 4x + 5) = \log_{(\sqrt{11}+2\sqrt{3})}\frac{1}{2x+5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = \frac{1}{2x+5} \Leftrightarrow 2x^3 + 13x^2 + 30x + 24 = 0.$$

Среди делителей свободного члена 24: ± 1, ± 2, ± 4, ± 6, ± 12, ± 24 подбором находим корень -2. Делим кубический многочлен столбиком на $x + 2$:
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 13x^2 + 30x + 24 & x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3 + 4x^2} \phantom{{}+30x+24} & 2x^2 + 9x + 12 \\ 9x^2 + 30x \phantom{{}+24} & \\ \underline{9x^2 + 18x} \phantom{{}+24} & \\ 12x + 24 & \\ \underline{12x + 24} & \\ 0 & \end{array}$$

Получаем разложение на множители

$$2x^3+13x^2+30x+24=(x+2)(2x^2+9x+12).$$

Квадратный трёхчлен $2x^2+9x+12$ корней не имеет, так как дискриминант уравнения $2x^2+9x+12=0$ отрицателен ($D=81-96<0$).

Таким образом, кубическое уравнение имеет один корень $x=-2$, который принадлежит ОДЗ.

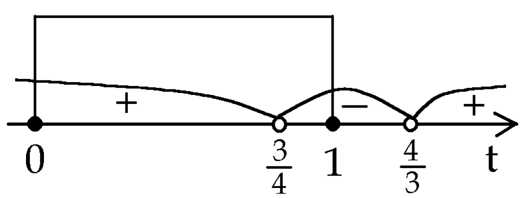
Ответ: -2.

Задача 4. Сделаем замену переменной $\sin^2 x=t$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Получим неравенство

$$12t^2-25t+12>0.$$

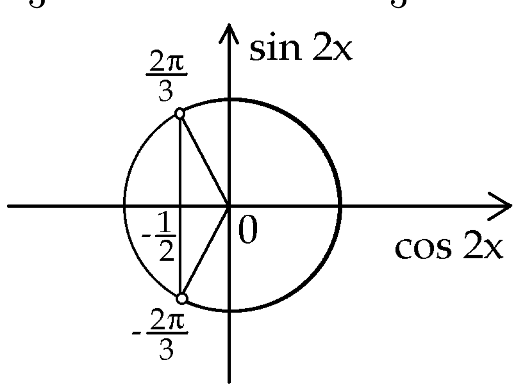
Корнями квадратного уравнения $12t^2-25t+12=0$ являются числа $t= =\frac{25+7}{24}=\frac{4}{3}$ и $t=\frac{25-7}{24}=\frac{3}{4}$. Методом интервалов решим систему

$$\begin{cases} 12\left(t-\frac{4}{3}\right)\left(t-\frac{3}{4}\right)>0, \\ 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<\frac{3}{4}, \\ t>\frac{4}{3}, \end{array}\right. \\ 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leqslant t<\frac{3}{4}.$$



Возвратимся к исходной переменной:

$$\sin^2 x<\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1-\cos 2x}{2}<\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos 2x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$



Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 5.

$$\frac{\sqrt{x+2}-a}{x+4}=x \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}-a=x(x+4), \\ x+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}-a=(x+2)^2-4, \\ x\neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow (x+2)^2-\sqrt{x+2}=4-a.$$

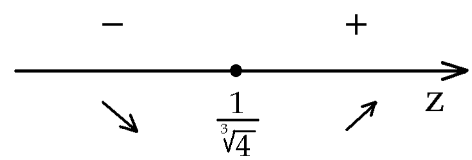
Обозначим $\sqrt{x+2}=z$, $z\geqslant 0$, $4-a=b$. Уравнение примет вид $z^4-z=b$.

Рассмотри функцию $y(z)=z^4-z$. Найдём её экстремумы.

$$y'=4z^3-1 \Rightarrow 4z^3-1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

знак $y'(z)$

поведение $y(z)$



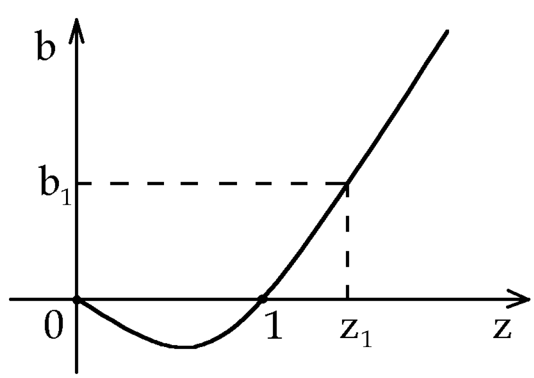
Функция $y(z)$ имеет один экстремум — это минимум.

$$y(z_{\min})=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^4-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Таким образом, при $b=y(z_{\min})=-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ уравнение $z^4-z=b$ имеет единственный корень $z=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\geqslant 0$. В исходных переменных получаем

$$a=4-b=4+\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}, \qquad x=z^2-2=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}-2=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-2.$$

График функции $y=z^4-z$ при $z\geqslant 0$ имеет вид:



Следовательно, уравнение $z^4-z=b$ (где $z\geqslant 0$) имеет единственное решение при $b>0$, то есть при $4-a>0$, откуда $a<4$.

Ответ: при $a<4$ и $a=4+\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ уравнение имеет единственный корень; при $a=4+\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ $\quad x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-2$.

Вариант 27.2

Ответы:

Задача 1. $\left(0;\frac{6}{5}\right] \cup (4;+\infty)$.

Задача 2. Углы равны 90°.

Задача 3. -1.

Задача 4. $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. При $a = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ уравнение имеет ровно два решения; отрицательный корень $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Вариант 27.3

Ответы:

Задача 1. $\left(0;\frac{10}{11}\right] \cup (2;+\infty)$.

Задача 2. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2.

Задача 3. 1.

Задача 4. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) \cup \left(\arccos\frac{1}{3}+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. При $a > -9$ и $a = -9-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ уравнение имеет один корень. При $a = -9-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ этот корень $x = 3+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

Вариант 28.1

Задача 1. ОДЗ системы задаётся неравенствами

$$\begin{cases} x-2y>0, \\ 3x+2y>0. \end{cases}$$

При $x \in$ОДЗ равносильны следующие преобразования:

$$\begin{cases} 8\left(\sqrt{2}\right)^{x-y} = 0{,}5^{\,y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^3\cdot 2^{\frac{x-y}{2}} = 2^{3-y}, \\ \log_3\big((x-2y)(3x+2y)\big)=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3+\frac{x-y}{2}} = 2^{3-y}, \\ \log_3\big((x-2y)(3x+2y)\big)=\log_3 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+\frac{x-y}{2} = 3-y, \\ (x-2y)(3x+2y)=27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y, \\ -3y(-y)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y, \\ y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y, \\ \left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=-3, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=-3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение $(-3;3)$ не принадлежит ОДЗ.

Ответ: $(3;-3)$.

Задача 2. ОДЗ неравенства $\sqrt{-\cos x} > \sqrt{-\sin x}$ задаётся системой

$$\begin{cases} -\cos x \geqslant 0, \\ -\sin x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leqslant 0, \\ \sin x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], \ n \in \mathbb{Z}.$$

Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то возведём неравенство в квадрат, получим

$$-\cos x > -\sin x.$$

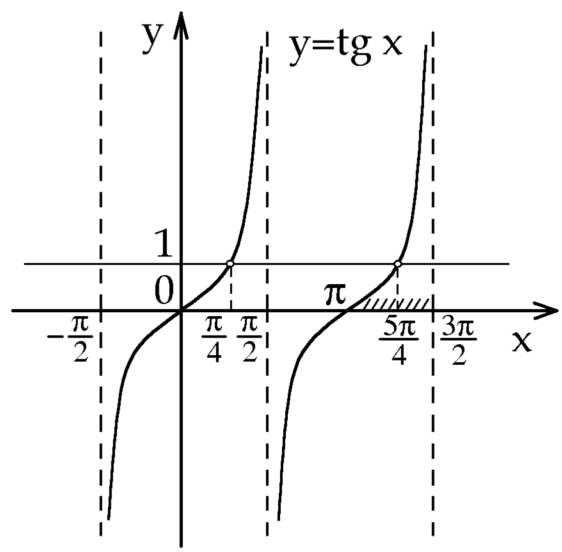
Разделим обе части неравенства на $-\cos x > 0$ (условие $\cos x = 0$ не даёт решений исходного неравенства), получим

$$\operatorname{tg} x < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ окончательно получаем

$$x \in \left[\pi + 2\pi m; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m\right), \ m \in \mathbb{Z}.$$

На рисунке штриховкой показано ОДЗ.



Ответ: $\left[\pi + 2\pi m; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$.

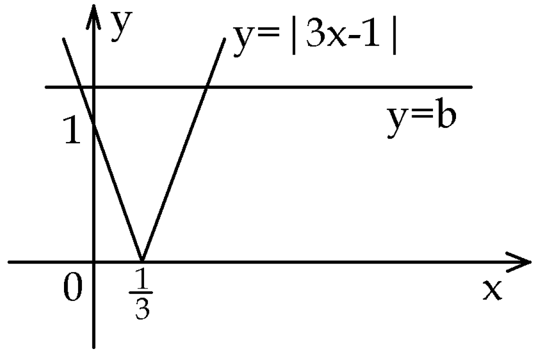
Задача 3. При $a = 0$ получаем

$$\big||3x-1| - 4\big| = 0 \Leftrightarrow |3x-1| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 4, \\ 3x - 1 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{3}, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

При $a \neq 0$ исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} |3x-1| - 4 = a, \\ |3x-1| - 4 = -a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |3x-1| = a + 4, & (1) \\ |3x-1| = -a + 4. & (2) \end{array}\right.$$

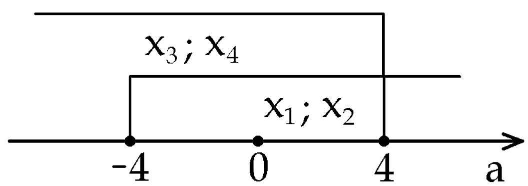
Обозначим $a + 4 = b$ и решим уравнение (1) графически: ищем точки пересечения графиков функций $y = |3x - 1|$ и $y = b$. При $b < 0$, то есть при



$a < -4$, графики не пересекаются; При $b = 0$, то есть при $a = -4$, есть одна точка пересечения с абсциссой $x = \frac{1}{3}$; При $b > 0$, то есть при $a > -4$, графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых находим из уравнения $3x - 1 = \pm(a + 4)$, откуда $x = \frac{a+5}{3}$, $x = \frac{-a-3}{3}$.

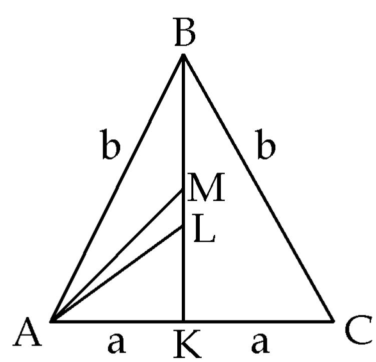
Уравнение (2) решаем аналогично уравнению (1). Получаем: при $a > 4$ решений нет; при $a = 4$ есть одно решение $x = \frac{1}{3}$; при $a < 4$ ($a \neq 0$) есть два решения $x = \frac{-a+5}{3}$ и $\frac{a-3}{3}$.

Объединяя решения уравнений (1) и (2) получаем, что исходное уравнение имеет 4 решения при $a \in (-4; 4)$ ($a \neq 0$); 3 решения при $a = \pm 4$; и 2 решения при $a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.



Ответ: при $a \in (-\infty; -4)$ $x = \frac{-a+5}{3}$, $x = \frac{a-3}{3}$; при $a \in (-4; 0) \cup (0; 4)$ $x = \frac{a+5}{3}$, $x = \frac{-a-3}{2}$, $x = \frac{-a+5}{3}$, $x = \frac{a-3}{3}$; при $a \in (4; +\infty)$ $x = \frac{a+5}{3}$, $x = \frac{-a-3}{2}$; при $a = 0$ $x = \frac{5}{3}$, $x = -1$; при $a = \pm 4$ $x = 3$, $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{7}{3}$.

Задача 4. Дано:
$\triangle ABC$, $AB = BC = b$, $AC = 2a$,
M — точка пересечения медиан,
L — точка пересечения биссектрис.



Найти: ML.

Решение. Проведём $BK \perp AC$. BK — медиана и биссектриса треугольника ABC. Пусть $BK = 3x$, тогда $BM = \frac{2}{3}BK = 2x$. Из треугольника BAK по свойству биссектрисы AL имеем:

$$\frac{BL}{LK} = \frac{b}{a} \Rightarrow BL = LK \cdot \frac{b}{a}.$$

Так как $BL + LK = 3x$, то

$$LK \cdot \frac{b}{a} + LK = 3x \Rightarrow LK = \frac{3ax}{a+b} \quad \text{и} \quad BL = \frac{3bx}{a+b}.$$

Находим длину отрезка ML:

$$ML = |BL - BM| = \left|\frac{3bx}{a+b} - 2x\right| = x \cdot \frac{|b-2a|}{a+b}.$$

Из треугольника AKB по теореме Пифагора имеем

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} \Rightarrow 3x = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Следовательно,

$$ML = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{3} \cdot \frac{|b-2a|}{a+b}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{b^2-a^2}\cdot|b-2a|}{3(a+b)}$.

Задача 5.

$$3\log_6\left((x-1)^2+1\right) = x^2 - 2x - 28 \Leftrightarrow 3\log_6\left((x-1)^2+1\right) = (x-1)^2 - 29.$$

Так как $(x-1)^2 + 1 > 0$ для любого x, то ОДЗ уравнения есть $\mathbb{R}$.

Обозначим $(x-1)^2 = t$, $t \geqslant 0$. Тогда уравнение примет вид

$$3\log_6(t+1) = t - 29.$$

Так как $\log_6(t+1) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$, то $t \geqslant 29$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t - 3\log_6(t+1)$. Её производная $f'(t) = 1 - \frac{3}{(t+1)\ln 6} > 0$ при $t \geqslant 29$, следовательно, $f(t)$ монотонно возрастает на интервале $[29; +\infty)$ и графики функций $y = f(t)$ и $y = 29$ имеют единственную точку пересечения, то есть уравнение $3\log_6(t+1) = t - 29$ имеет единственное решение. Подбором находим $t = 35$, откуда $x = 1 \pm \sqrt{35}$.

Ответ: $1 \pm \sqrt{35}$.

Вариант 28.2

Ответы:

Задача 1. $(7; 9)$; $(9; 7)$.

Задача 2. $\left[\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. При $a \in (-\infty; -3)$ $x = \frac{-a+2}{2}$, $x = \frac{a-4}{2}$; при $a = -3$ $x = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{7}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$; при $a \in (-3; 0)$ $x = \frac{-a+2}{2}$, $x = \frac{a-4}{2}$, $x = \frac{a+2}{2}$, $x = \frac{-a-4}{2}$; при $a = 0$ $x = -2$, $x = 1$; при $a \in (0; +\infty)$ решений нет.

Задача 4. $\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{4}$ или $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{4\sqrt{6}-9}$.

Задача 5. 10.

Вариант 28.3

Ответы:

Задача 1. $(18; 2)$; $(2; 18)$.

Задача 2. $\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. При $a \in (-\infty; 0)$ решений нет; при $a = 0$ $x = 8$, $x = -2$; при $a \in (0; 25)$ $x = 8 \pm \sqrt{a}$, $x = -2 \pm \sqrt{a}$; при $a = 25$ $x = 13$, $x = 3$, $x = -7$; при $a \in (25; +\infty)$ $x = 8 + \sqrt{a}$, $x = -2 - \sqrt{a}$.

Задача 4. $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ или $\frac{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$.

Задача 5. 1; -1.

Вариант 29.1

Задача 1. Сложим и вычтем уравнения исходной системы.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt[3]{x} = 2, \\ 2\sqrt[4]{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1, \\ \sqrt[4]{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 16. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 16)$.

Задача 2.

$$2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(x-2)^2 > \log_8(x-3) + \log_8 8^{\frac{2}{3}}, \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(x-2)^2 > \log_8 4 + \log_8(x-3), \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(x-2)^2 > \log_8(4(x-3)), \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 > 4(x-3), \text{ так как основание } 8 > 0, \\ x - 2 > 0, \\ 4(x-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 4x - 12, \\ x > 2, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 16 > 0, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 > 0, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; 4) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Задача 3. 255 кг хлеба содержат 45% воды, следовательно, 100% − − 45% = 55% сухого вещества. Вычислим 55% от 255 кг:

$$\frac{255\,\text{кг} \cdot 55\%}{100\%} = 140,25\ \text{кг}.$$

В сухарях 15% воды, следовательно, 85% сухого вещества, что составляет 140,25 кг.

Обозначим через x искомое количество сухарей и составим пропорцию:

$$\begin{array}{lcl} 140,25\ \text{кг} & — & 85\% \\ x\ \text{кг} & — & 100\% \end{array}$$

Решим пропорцию:

$$\frac{140,25\,\text{кг}}{x\,\text{кг}} = \frac{85\%}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{140,25 \cdot 100}{85}\ \text{кг} = 165\ \text{кг}.$$

Ответ: 165 кг.

Задача 4.

$(x-3)^4 + (x-2)^4 - (2x-5)^4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^4 + (x-2)^4 - (2(x-2,5))^4 = 0.$

Сделаем замену переменных $t = x - 2,5$, уравнение примет вид

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{1}{2}\right)^4 - 16t^4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) + \left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right)\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) - 16t^4 = 0.$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$-14t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 112t^4 - 24t^2 - 1 = 0.$$

Полученное биквадратное уравнение решаем заменой $y = t^2 \geqslant 0$:

$$112y^2 - 24y - 1 = 0.$$

Дискриминант $D = 256$, $y_1 = -\frac{1}{28}$ — не подходит, $y_2 = \frac{1}{4}$. Следовательно, $t^2 = \frac{1}{4}$, откуда $t = \pm\frac{1}{2}$. Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} x - 2,5 = \frac{1}{2}, \\ x - 2,5 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: 2; 3.

Задача 5.

$$\cos 2x + 7\sin x \cos x + \sin(2x + \varphi) = a.$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя формулы
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{и} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
получим
$$\cos 2x + \frac{7}{2}\sin 2x + \sin 2x\cos\varphi + \cos 2x\sin\varphi = a.$$
Сгруппируем слагаемые:
$$(1+\sin\varphi)\cos 2x + \left(\frac{7}{2} + \cos\varphi\right)\sin 2x = a.$$
Разделим обе части уравнения на
$$A = \sqrt{(1+\sin\varphi)^2 + \left(\frac{7}{2}+\cos\varphi\right)^2}$$
и введём вспомогательный угол ψ такой, что
$$\frac{1+\sin\varphi}{A} = \sin\psi, \qquad \frac{\frac{7}{2}+\cos\varphi}{A} = \cos\psi$$
(такой угол ψ существует, так как $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$).

Уравнение примет вид
$$\sin\psi\cos 2x + \cos\psi\sin 2x = \frac{a}{A} \Leftrightarrow \sin(2x+\psi) = \frac{a}{A}.$$
Данное уравнение не имеет решения для всех φ, если $\left|\frac{a}{A}\right| > 1$. Сделаем преобразования:
$$A = \sqrt{1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \frac{49}{4} + 7\cos\varphi + \cos^2\varphi} =$$
$$= \sqrt{\frac{57}{4} + 2\sin\varphi + 7\cos\varphi} =$$
$$= \sqrt{\frac{57}{4} + \sqrt{4+49}\left(\frac{2}{\sqrt{53}}\sin\varphi + \frac{7}{\sqrt{53}}\cos\varphi\right)} = \sqrt{\frac{57}{4} + \sqrt{53}\sin(\varphi+\gamma)},$$
где вспомогательный угол γ такой, что $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{53}}$, $\sin\gamma = \frac{7}{\sqrt{53}}$.

Решим неравенство $\left|\frac{a}{A}\right| > 1$ для всех φ.
$$|a| > |A| \Leftrightarrow |a| > \sqrt{\frac{57}{4} + \sqrt{53}\sin(\varphi+\gamma)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |a| > \max_{\varphi}\sqrt{\frac{57}{4} + \sqrt{53}\sin(\varphi+\gamma)} = \sqrt{\frac{57}{4} + \sqrt{53}},$$
так как $\sin(\varphi+\gamma) \leqslant 1$ для всех φ.

Таким образом, исходное уравнение не имеет решения при

$$|a| > \sqrt{\frac{57}{4}+\sqrt{53}} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{57}{4}+\sqrt{53}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{57}{4}+\sqrt{53}}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{57}{4}+\sqrt{53}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{57}{4}+\sqrt{53}}; +\infty\right)$.

Вариант 29.2

Ответы:

Задача 1. $(9;16)$.

Задача 2. $(0;1)$.

Задача 3. $39,6$ кг.

Задача 4. 1; 4. `Указание.` Сделать замену $t = x - \frac{5}{2}$.

Задача 5. $\left[-\sqrt{\frac{33}{4}-\sqrt{29}}; \sqrt{\frac{33}{4}-\sqrt{29}}\right]$.

Вариант 29.3

Ответы:

Задача 1. $(1;0)$.

Задача 2. $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Задача 3. 2%.

Задача 4. $-2 \pm \sqrt{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. `Указание.` Разделить уравнение на $x^2 \neq 0$ и сделать замену $x + \frac{1}{x} = t$.

Задача 5. $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{33}{4}+\sqrt{29}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{33}{4}+\sqrt{29}}; +\infty\right)$.

Вариант 30.1

Задача 1. Функция $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 12x + 7$ определена при любом x. Найдём производную $f'(x) = -12x^2 + 12x - 12$. Определим знак $f'(x)$:

$$f'(x) = -12(x^2 - x + 1) = -12\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = -12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 9 < 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Так как $f'(x) < 0$ на $\mathbb{R}$, то функция $f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$.

Ответ: $f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$.

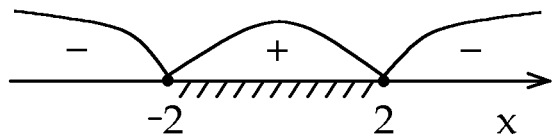
Задача 2. Корень чётной степени $\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant 0$ для любого x из ОДЗ, следовательно, $\sqrt{4-x^2} \geqslant 0$ для любого x из ОДЗ и неравенство

$$\sqrt{4-x^2} > -1$$

верно для любого x из ОДЗ.

Найдём ОДЗ:

$$4 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2].$$



Ответ: $[-2; 2]$.

Задача 3.

$$\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg y = 2\lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 81, \\ \lg(x+y)^2 = \lg 9 + \lg y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2y} = 3^4, \\ \lg(x+y)^2 = \lg 9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4, \\ (x+y)^2 = 9y, \\ 9y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y, \\ (4-y)^2 = 9y, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y, \\ 16 - 8y + y^2 = 9y, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y, \\ y^2 - 17y + 16 = 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = 16, \end{array} \right. \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -28, \\ y = 16. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(2; 1)$; $(-28; 16)$.

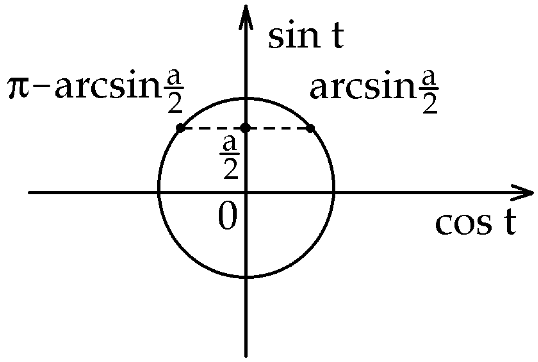
Задача 4.

$$2\sin(x+3) = a \Leftrightarrow \sin(x+3) = \frac{a}{2}.$$

Обозначим $x + 3 = t$, получим тригонометрическое уравнение $\sin t = \frac{a}{2}$, которое при $\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$, то есть при $|a| \leqslant 2$ имеет решения

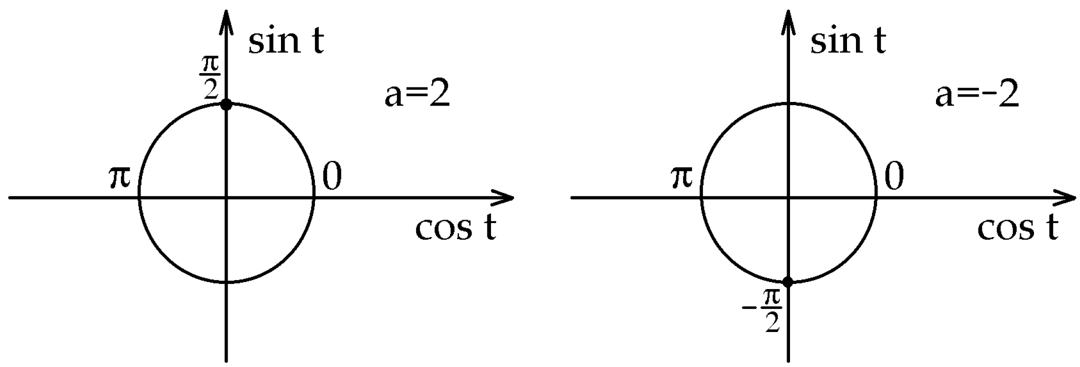
$$t = (-1)^n \arcsin\frac{a}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность $t_n = (-1)^n \arcsin\frac{a}{2} + \pi n$ образует арифметическую прогрессию, если точки на тригонометрическом круге, соответствующие



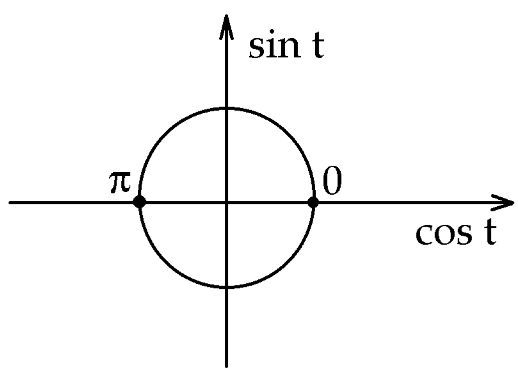
углам $\arcsin\frac{a}{2}$ и $\pi-\arcsin\frac{a}{2}$ либо совпадают, либо отстоят друг от друга на одинаковый угол.

Совпадение будет при $\frac{a}{2}=\pm 1 \Leftrightarrow a=\pm 2$.



В этих случаях разность арифметической прогрессии $d=2\pi$.

Если точек на окружности две, то $a=0$ и $d=\pi$.



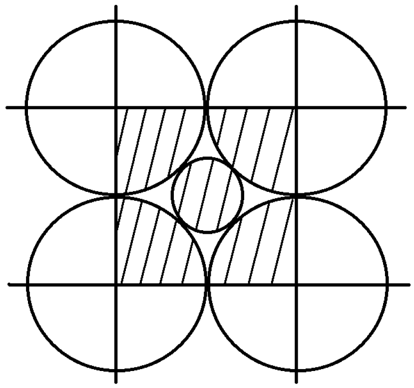
Последовательность решений исходного уравнения

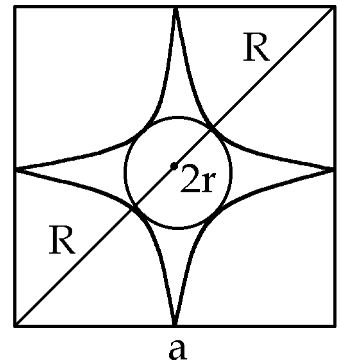
$$x_n=-3+(-1)^n\arcsin\frac{a}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

будет арифметической прогрессией при тех же значениях $a=\pm 2$, $a=0$. Разность прогрессии d не изменится.

Ответ: при $=\pm 2$ $d=2\pi$; при $a=0$ $d=\pi$.

Задача 5. Плоскость можно рассматривать как объединение равных квадратов, вершины которых являются центрами больших окружностей, поэтому процент площади непокрытой части плоскости равен проценту площади непокрытой части квадрата.





Пусть a — сторона квадрата, R — радиус большой окружности, r — радиус маленькой окружности.

Диагональ квадрата равна $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2} = 2R + 2r$, откуда $2r = a\sqrt{2} - 2R$. Учитывая ещё, что $R = \frac{a}{2}$, получаем $r = a\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

Площадь квадрата $S_1 = a^2$, площадь четверти большого круга $S_2 = \frac{\pi R^2}{4}$, площадь маленького круга $S_3 = \pi r^2$. Тогда площадь непокрытой кругами части квадрата есть

$$S = S_1 - 4S_2 - S_3 = a^2 - \pi R^2 - \pi r^2 =$$
$$= a^2 - \pi\frac{a^2}{4} - \pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = a^2\left(1 - \pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right).$$

Процент незаполненной части равен

$$\frac{S}{a^2}\cdot 100\% = \left(1 - \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{2}\right)\cdot 100\%.$$

Ответ: $\left(1 - \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{2}\right)\cdot 100\%$.

Вариант 30.2

Ответы:

Задача 1. $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Задача 2. $[-3; 3]$.

Задача 3. $(25; 36)$.

Задача 4. При $a = \pm 1$ $d = \pi$; при $a = 0$ $d = \frac{\pi}{2}$.

Задача 5. $\left(1 - \frac{\pi(17-8\sqrt{3})}{6\sqrt{3}}\right)\cdot 100\%$.

Вариант 30.3

Ответы:

Задача 1. $f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$.

Задача 2. $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Задача 3. $(4,5; 0,5)$.

Задача 4. При $a = \pm 3$ $d = \frac{2\pi}{3}$; при $a = 0$ $d = \frac{\pi}{3}$.

Задача 5. $\left(2\sqrt{2} - 2 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 100\%$.

Вариант 31.1

Задача 1.

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_{\sqrt{2}} 4 = 7 \Leftrightarrow \log_{4^2} + \log_4 x + 4 = 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_4 x + \log_4 x = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_4 x = 3 \Leftrightarrow \log_4 x = 2 \Leftrightarrow x = 16.$$

Ответ: 16.

Задача 2. Возведём в квадрат оба уравнения:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 9, \\ x + 2y + 5 = (y - x)^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $y = 7 - 2x$ и подставим во второе:

$$x + 2(7 - 2x) + 5 = (7 - 3x)^2 \Leftrightarrow -3x + 19 = 49 - 42x + 9x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 - 39x + 30 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 13x + 10 = 0.$$

Дискриминант $D = 49$, корни $x = \frac{13+7}{6} = \frac{10}{3}$, $x = \frac{13-7}{6} = 1$. Так как $x = \frac{10}{3}$ не является целым числом, то получаем одну систему

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 7 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 5. \end{cases}$$

Полученное решение $(1; 5)$ является целым.

При возведении в квадрат могли появиться посторонние корни, поэтому делаем проверку, которая является частью решения:

$$\begin{cases} \sqrt{2 + 5 + 2} = 3, \\ \sqrt{1 + 10 + 5} = 5 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9} = 3, \\ \sqrt{16} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3, \\ 4 = 4, \end{cases}$$

следовательно, пара $(1; 5)$ является ответом.

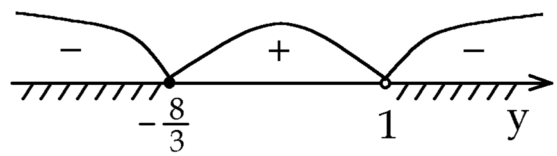
Ответ: $(1; 5)$.

Задача 3. Применив формулу
$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$
получим уравнение
$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 2.$$
Сделаем замену $t = \operatorname{tg} x$, уравнение примет вид
$$\frac{2t}{t^2+1} + t = 2 \Leftrightarrow \frac{2t+t+t^3-2-2t^2}{1+t^2} = 0 \Leftrightarrow t^3-2t^2+3t-2=0.$$
Корень $t=1$ кубического уравнения $t^3-2t^2+3t-2=0$ находим подбором среди делителей свободного члена -2. Затем раскладываем многочлен t^3- $-2t^2+3t-2$ на множители, для этого делим его столбиком на $t-1$:
$$\begin{array}{r|l} t^3-2t^2+3t-2 & t-1 \\ \cline{2-2} \underline{t^3-\ t^2} \qquad\qquad & t^2-t+2 \\ \underline{-\ t^2+3t} \\ \underline{-\ t^2+\ t} \\ 2t-2 \\ \underline{2t-2} \\ 0 \end{array}$$
Получаем
$$t^3-2t^2+3t-2 = (t-1)(t^2-t+2).$$
Кубическое уравнение примет вид
$$(t-1)(t^2-t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \Leftrightarrow t=1, \\ t^2-t+2=0 \text{ — решений нет, так как } D<0. \end{array}\right.$$
Возвращаемся к исходной переменной:
$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Задача 4. Сделаем равносильные преобразования
$$|3x-7| - \frac{6y+5}{3-3y} \geqslant 1 \Leftrightarrow 1+\frac{6y+5}{3-3y} \leqslant |3x-7| \Leftrightarrow \frac{3y+8}{3-3y} \leqslant |3x-7|.$$
Дробь $\frac{3y+8}{3-3y}$ должна быть меньше или равна $|3x-7|$ для любого $x\in\mathbb{R}$, следовательно,
$$\frac{3y+8}{3-3y} \leqslant \min_{x\in\mathbb{R}} |3x-7| = 0 \ \left(\text{он достигается в точке } x=\frac{7}{3}\right).$$

Получаем неравенство $\frac{3y+8}{3-3y} \leqslant 0$, которое решаем методом интервалов: находим нули числителя и знаменателя, отмечаем их на числовой оси, в каждом из полученных интервалов определяем знак дроби $\frac{3y+8}{3-3y}$.



Выписываем ответ в соответствии со знаком неравенства:

$$y \in \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right] \cup (1; +\infty).$$

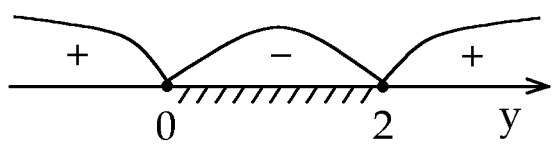
Ответ: $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

Задача 5. Построим область на плоскости xOy, задаваемую системой неравенств

$$\begin{cases} 2|x+2| \arcsin(y-1)^2 \leqslant \pi(x+2), & (1) \\ 2|y-1| - x \geqslant 1. & (2) \end{cases}$$

Решаем неравенство (1). ОДЗ неравенства задаётся условием

$$-1 \leqslant (y-1)^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y \leqslant 0 \Leftrightarrow y(y-2) \leqslant 0 \Leftrightarrow y \in [0; 2].$$



Рассмотрим три случая.

1. Если $x = -2$, то неравенство (1) примет вид $0 \leqslant 0$, что является верным. В плоскости xOy получаем отрезок прямой $x = -2$ при $y \in [0; 2]$.

2. Если $x+2 > 0$, то есть $x > -2$, то $|x+2| = x+2$. Разделим неравенство на $2(x+2) > 0$, получаем

$$\arcsin(y-1)^2 \leqslant \frac{\pi}{2},$$

что верно для любого y из ОДЗ, так как множеством значений функции $\arcsin t$ является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На плоскости xOy получаем полосу $x > -2$, $y \in [0; 2]$.

3. Если $x + 2 < 0$, то есть $x < -2$, то $|x + 2| = -(x + 2)$. Разделим неравенство на $-2(x+2) > 0$, получаем неравенство

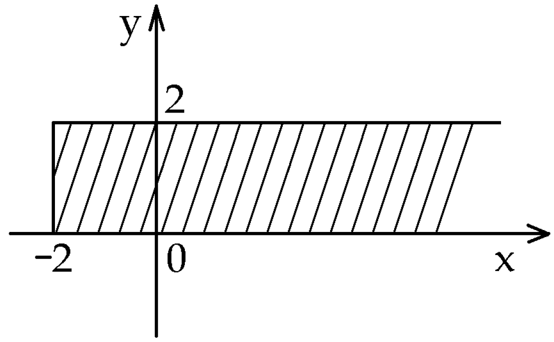
$$\arcsin(y-1)^2 \leqslant -\frac{\pi}{2},$$

которое равносильно уравнению

$$\arcsin(y-1)^2 = -\frac{\pi}{2},$$

откуда $(y-1)^2=-1$. Полученное уравнение не имеет решений.

Область на плоскости xOy, заданная неравенством (1), изображена на рисунке.



Неравенство (2) преобразуем к виду

$$2|y-1| \geqslant x+1$$

и рассмотри два случая.

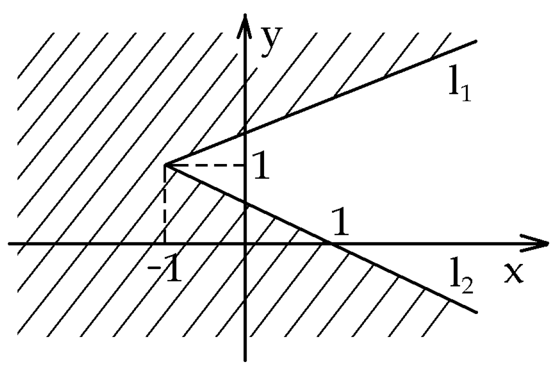
1. Если $y \geqslant 1$, то $|y-1| = y-1$, получаем

$$2y-2 \geqslant x+1 \Leftrightarrow y \geqslant \frac{x}{2}+\frac{3}{2}.$$

2. Если $y<1$, то $|y-1| = -(y-1) = -y+1$, получаем

$$-2y+2 \geqslant x+1 \Leftrightarrow y \leqslant \frac{1}{2}-\frac{x}{2}.$$

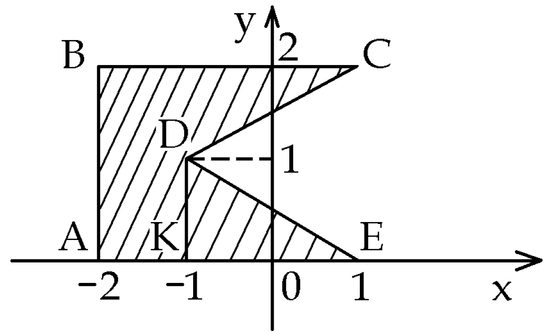
Область на плоскости xOy, заданная неравенством (2), изображена на рисунке. Прямая l_1 задана уравнением $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$, прямая l_2 — уравнением $y=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$.



Решением исходной системы является фигура $ABCDEF$, которая является пересечением множеств, изображённых на рисунках.

Периметр $P_{ABCDE} = AB+BC+CD+DE+EA$. Находим $AB=2$, $BC=AE=3$. Из прямоугольного треугольника DKE по теореме Пифагора находим $DE=\sqrt{DK^2+KE^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. По построению $CD=DE$. Получаем $P_{ABCDE}=2+2\cdot 3+2\cdot\sqrt{5}=8+2\sqrt{5}$.

Ответ: $8+2\sqrt{5}$.



Вариант 31.2

Ответы:

Задача 1. 5.

Задача 2. $(0;1)$.

Задача 3. $4\pi n$; $\pi + 4\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. $\left[\frac{8}{7}; \frac{3}{2}\right)$.

Задача 5. $14 + 2\sqrt{10}$.

Вариант 31.3

Ответы:

Задача 1. 8.

Задача 2. $(1;5)$.

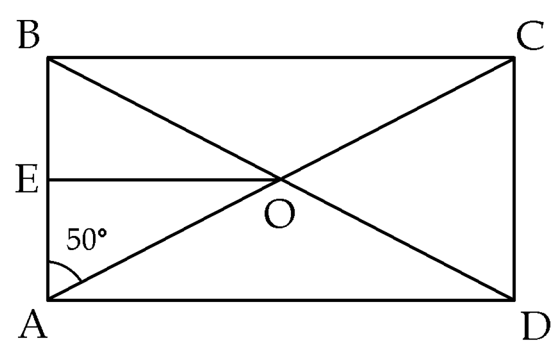
Задача 3. $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. $\left[\frac{1}{13}; \frac{1}{4}\right)$.

Задача 5. $9 + 2\sqrt{4,25}$.

Вариант 32.1

Задача 1. Дано:
$ABCD$ — прямоугольник,
O — точка пересечения AC и BD,
E — середина AB,
$\angle BAC = 50^\circ$.



Найти: $\angle EOD$.

Решение. Так как $OE \perp AB$, то $\angle OEA = 90^\circ$, тогда $\angle OAD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. По свойству диагоналей прямоугольника $AO = OD$, следовательно, треугольник AOD равнобедренный, следовательно, $\angle ADO = \angle OAD = 40^\circ$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то

$$\angle AOD = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ.$$

Аналогично из треугольника AEO получаем

$$\angle EOA = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

Окончательно получаем

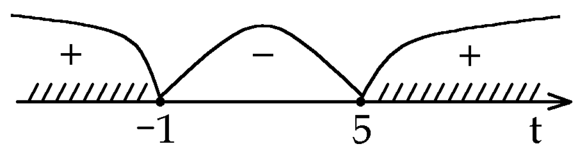
$$\angle EOD = \angle EOA + \angle AOD = 40^\circ + 100^\circ = 140^\circ.$$

Ответ: 140°.

Задача 2. Сделаем замену переменной $t = x^2 + 3x + 1$, получим неравенство

$$t(t-1) \geqslant 5 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 \geqslant 0,$$

которое решаем методом интервалов. Корни $t = -1$ и $t = 5$ квадратного уравнения $t^2-4t-5 = 0$ отмечаем на числовой оси и в каждом из полученных интервалов определяем знак трёхчлена t^2-4t-5. В соответствии со знаком



неравенства ($\leqslant$) получаем совокупность $\left[\begin{array}{l} t \leqslant -1, \\ t \geqslant 5. \end{array}\right.$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x+1 \leqslant -1, \\ x^2+3x+1 \geqslant 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x+2 \leqslant 0, \\ x^2+3x-4 \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)(x+2) \leqslant 0, \\ (x-1)(x+4) \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Аналогично предыдущему, решая каждое неравенство совокупности, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-2;-1], \\ x \in (-\infty;-4] \cup [1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4] \cup [-2;-1] \cup [1;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-4] \cup [-2;-1] \cup [1;+\infty)$.

Задача 3.

$$\cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{3x+2x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-2x+\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{5x}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{4}-\frac{\pi}{4} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Сделаем отбор решений, то есть из всех найденных решений выберем те, которые принадлежат интервалу $(75°; 150°)$. Для удобства запишем ответ в градусной мере:

$$\left[\begin{array}{l} x = 18° + 72°n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Придавая n и k различные значения, получим, что только при $n = 1$

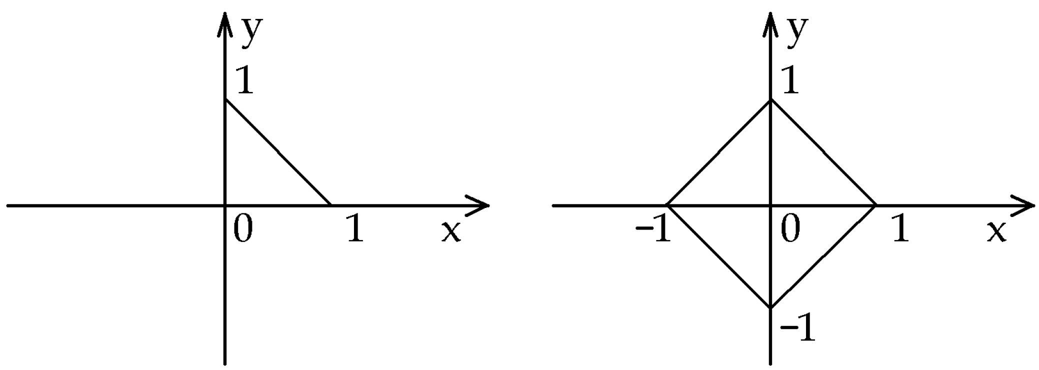
$$x = 18° + 72° = 90° \in (75°; 150°).$$

При всех остальных $n \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{Z}$ полученное $x \notin (75°; 150°)$.

Ответ: $90°$.

Задача 4. Граница области задаётся уравнением

$$(1 - |x| - |y|)(|x + y| + |x - y| - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| + |y| = 1, \\ |x + y| + |x - y| = 1. \end{array}\right.$$

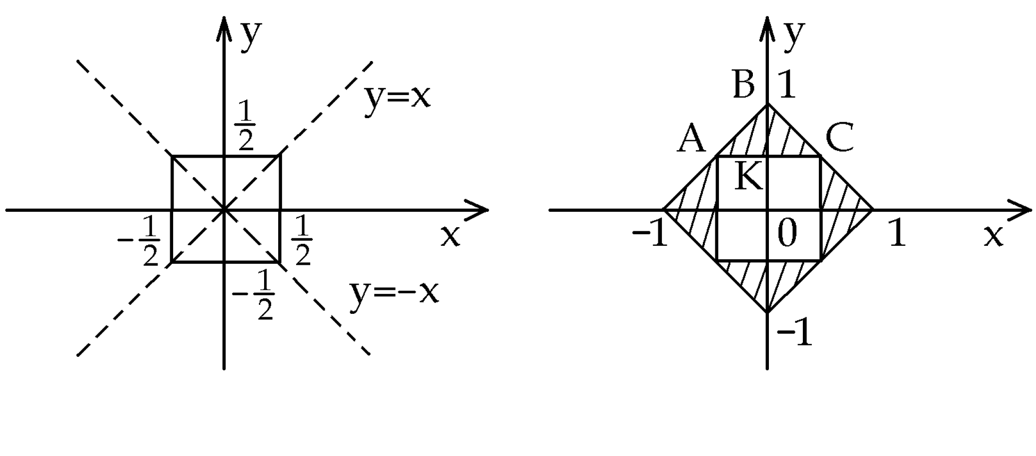


Линия $|x| + |y| = 1$ симметрична относительно осей Ox и Oy. При $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ получается отрезок прямой $x + y = 1$, далее строим по симметрии и получаем квадрат.

Для построения линии $|x + y| + |x - y| = 1$ рассмотрим 4 случая:

$$1)\left\{\begin{array}{l} x + y \geqslant 0, \\ x - y \geqslant 0, \\ x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad 2)\left\{\begin{array}{l} x + y \geqslant 0, \\ x - y < 0, \\ y = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad 3)\left\{\begin{array}{l} x + y < 0, \\ x - y \geqslant 0, \\ y = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad 4)\left\{\begin{array}{l} x + y < 0, \\ x - y < 0, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

В результате получим квадрат (см. левый рисунок).



Искомая область показана штриховкой (см. правый рисунок). Площадь области

$$S = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 5. Обозначим V — объём котлована, p — производительность каждого землекопа, m — число членов первой бригады, n — число членов второй бригады. Тогда $\frac{V}{mp}$ — время работы первой бригады, $\frac{V}{np}$ — время работы второй бригады, $\frac{V}{(m+5)p}$ — время работы первой бригады, если её увеличить на 5 человек. По условию

$$\begin{cases} \frac{V}{np} - \frac{V}{mp} = \frac{1}{2}, \\ \frac{V}{mp} - \frac{V}{(m+5)p} = 2. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое, при этом общий множитель $\frac{V}{p} \neq 0$ сократится, получим

$$\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+5}\right) : \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{m+5-m}{m(m+5)} : \frac{m-n}{mn} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{m(m+5)} \cdot \frac{mn}{m-n} = 4 \Leftrightarrow 5n = 4(m+5)(m-n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5n = 4m^2 - 4mn + 20m - 20n \Leftrightarrow n(4m+25) = 4m^2 + 20m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{4m^2+20m}{4m+25} = m - \frac{5m}{4m+25} = m - 1 - \frac{m-25}{4m+25}.$$

Так как m и n — натуральные числа, то число $\frac{m-25}{4m+25}$ должно быть целым, но числитель меньше знаменателя, следовательно, $m - 25 = 0$, откуда $m = 25$ и $n = 25 - 1 = 24$.

Ответ: В первой бригаде 25 человек, во второй бригаде 24 человека.

Вариант 32.2

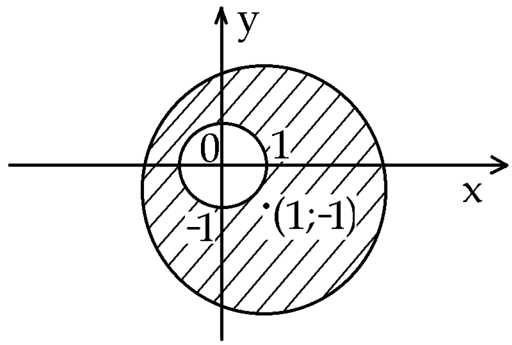
Ответы:

Задача 1. $15,5^\circ$; $74,5^\circ$; 90°.

Задача 2. $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$.

Задача 3. 54°.

Задача 4. 8π. `Указание.` Меньшая окружность имеет центр $(0;0)$ и $r = 1$; большая окружность — центр $(1;-1)$ и $R = 3$.



Задача 5. 24 детали. **Указание.** Пусть m — число деталей, которые делает мастер за час, N — число деталей в заказе. Нужно решить в целых числах уравнение

$$\frac{N}{m} - \frac{N}{2(m-2)} = 1.$$

Получается $m = 8$, $N = 24$.

Вариант 32.3

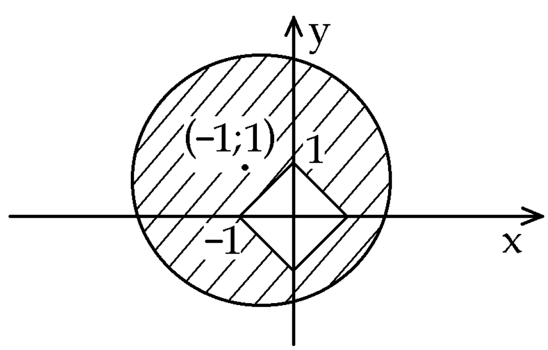
Ответы:

Задача 1. 6.

Задача 2. $(-\infty; -2-2\sqrt{2}] \cup [-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}] \cup [-2+2\sqrt{2}; +\infty)$.

Задача 3. 15°.

Задача 4. $9\pi - 2$. **Указание.** Центр окружности — точка $(-1; 1)$, радиус $R = 3$; фигура внутри — это квадрат.



Задача 5. 2; 2; 2. **Указание.** Пусть k, l, m — число самолётов первого, второго и третьего типов соответственно. Нужно решить в целых числах систему

$$\begin{cases} k + l + m < 9, \\ 230k + 110l + 40m = 760, \\ 27k + 12l + 5m = 88. \end{cases}$$

Получается $k = l = m = 2$.

7.7. Экзаменационные билеты 2003 г.

Вариант 33.1

Задача 1. Умножим второе уравнение системы на -2, затем сложим первое уравнение со вторым, получим

$$\begin{cases} 2x + 11y = -2, \\ -2x + 6y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y = 0, \\ x - 3y = -1, \end{cases}$$

откуда $y = 0$, $x = -1$.

Ответ: $(-1; 0)$.

Задача 2. Обозначим $\cos 7x = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Уравнение сведётся к системе

$$\begin{cases} \sqrt{1 + 4t^2} = 3t + 1, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4t^2 = (3t+1)^2, \\ 3t + 1 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t^2 + 6t = 0, \\ t \geqslant -\frac{1}{3}, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -\frac{6}{5}, \end{array} \right. \\ -\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0.$$

Возвращаясь к переменной x, получим уравнение

$$\cos 7x = 0 \Leftrightarrow 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7} n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7} n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Представим 1 как $\log_{x-2}(x-2)$, тогда

$$\log_{x-2}(x+2) < 1 \Leftrightarrow \log_{x-2}(x+2) < \log_{x-2}(x-2).$$

Рассмотрим два случая: $x - 2 > 1$ и $0 < x - 2 < 1$.

При $x - 2 > 1$ неравенство сводится к следующей системе

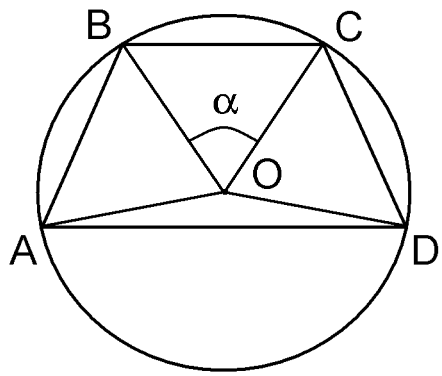
$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ x + 2 < x - 2, \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{решений нет, так как из вто-} \\ \text{рого неравенства следует, что} \\ 2 < -2, \text{ что неверно.} \end{array}$$

При $0 < x - 2 < 1$ решаемое неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ x + 2 > x - 2, \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Ответ: $(2; 3)$.

Задача 4. Если трапеция вписана в круг, то она равнобедренная. Пусть O — центр круга. По условию $AB = BC = CD$ и $\overset{\frown}{BC} = \alpha \Rightarrow \angle BDC = \alpha$.



$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD$ по трём сторонам. Площадь каждого треугольника равна $\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$.

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \alpha \Rightarrow \angle AOD = 2\pi - 3\alpha$. Площадь треугольника AOD равна $\frac{1}{2}R^2 \sin(2\pi - 3\alpha) = -\frac{1}{2}R^2 \sin 3\alpha$.

Площадь трапеции $ABCD$ сложим из площадей всех четырёх треугольников.

$$S_{\text{трапеции}} = 3 \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha - \frac{1}{2}R^2 \sin 3\alpha = \frac{R^2}{2}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha).$$

Ответ: $\frac{R^2}{2}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$.

Задача 5. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, получим систему

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ ax^3 + y^3 = a. \end{cases}$$

При $a = 0$ получим $y = 0$, x — любое, решений бесконечно много, поэтому далее считаем $a \neq 0$.

Систему решаем исключением y:

$$\begin{cases} y = a - ax, \\ ax^3 + a^3(1-x)^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a(x^3 - 1) + a^3(1-x)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a(x-1)\big(x^2 + x + 1 - a^2(x^2 - 2x + 1)\big) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$a(x-1)\big(x^2 + x + 1 - a^2(x^2 - 2x + 1)\big) = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Это уравнение при всех $a \neq 0$ имеет корень $x = 1$, а система имеет решение

$$(x = 1;\ y = 0). \tag{1}$$

Чтобы система имела не более двух решений, уравнение

$$x^2 + x + 1 - a^2(x^2 - 2x + 1) = 0$$

должно иметь 1 корень или ни одного корня или 2 корня, но один из них равен 1.

Перепишем последнее уравнение в виде

$$x^2(1-a^2)+x(1+2a^2)+(1-a^2)=0. \qquad (2)$$

Рассмотрим 4 случая.

1. Пусть $1-a^2=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$. В этом случае уравнение (2) примет вид $3x=0 \Rightarrow x=0$, а система, кроме (1), будет иметь второе решение $(x=0;\ y=a)$.

2. Пусть дискриминант уравнения (2) равен нулю:

$$D=\left(1+2a^2\right)^2-4\left(1-a^2\right)^2=0 \Leftrightarrow 12a^2-3=0 \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{2}.$$

В этом случае уравнение (2) имеет 1 корень:

$$\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1,$$

а система, кроме (1), будет иметь второе решение $(x=-1;\ y=2a)$.

3. Пусть дискриминант уравнения (2) отрицателен:

$$D<0 \Leftrightarrow 12a^2-3<0 \Leftrightarrow a^2<\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}.$$

В этом случае уравнение (2) не имеет корней, а система имеет только одно решение (1).

4. Если предположить, что уравнение (2) имеет корень $x=1$, то, подставляя в уравнение (2) вместо x единицу, получим

$$1-a^2+1+2a^2+1-a^2=0 \quad \text{или} \quad 3=0,$$

что неверно. Значит, $x=1$ не будет корнем уравнения (2) ни при каком значении a.

Ответ: система имеет не более двух решений при $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$, $0<a\leqslant\frac{1}{2}$, $a=\pm 1$.

Вариант 33.2

Ответы:

Задача 1. $(0;3)$.

Задача 2. $\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. $(0;1)$.

Задача 4. $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

Задача 5. $\frac{1}{2}\leqslant a<1$, $1<a\leqslant\frac{3}{2}$, $a=0$, $a=2$.

Вариант 33.3

Ответы:

Задача 1. $(-1;2)$.

Задача 2. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. Решений нет.

Задача 4. $\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 5. $-\frac{1}{4}\leqslant a<0,\ 0<a\leqslant\frac{1}{4},\ a=\pm\frac{1}{2}$.

Вариант 34.1

Задача 1.

$$\log_2(5-x)=3\Leftrightarrow 5-x=2^3\Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: -3.

Задача 2.

$$\sqrt{5-x}-1<x\Leftrightarrow\sqrt{5-x}<x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\5-x<(x+1)^2,\\5-x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\x^2+3x-4>0,\\x\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\\left[\begin{array}{l}x<-4,\\x>1,\end{array}\right.\\x\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\leqslant 5.$$

Ответ: $(1;5]$.

Задача 3. ОДЗ уравнения $x>0$.

$$\sin x-2\sqrt{\sin^2 x}\,(\log_4 x-\log_4 2)=0\Leftrightarrow\sin x-2\left|\sin^2 x\right|(\log_4 x-\log_4 2)=0.$$

Рассмотри 3 случая.

1. Пусть $\sin x=0\Rightarrow x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Учитывая ОДЗ, получим $x=\pi n$, $n\in\mathbb{N}$ (натуральные числа).

2. Пусть $\sin x>0$. Раскроем модуль:

$$\begin{cases}\sin x>0,\\\sin x-2\sin x\left(\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0,\\\sin x\,(1-\log_2 x-\log_2 2)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0,\\1-\log_2 x-\log_2 2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0,\\\log_2 x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0,\\x=4.\end{cases}$$

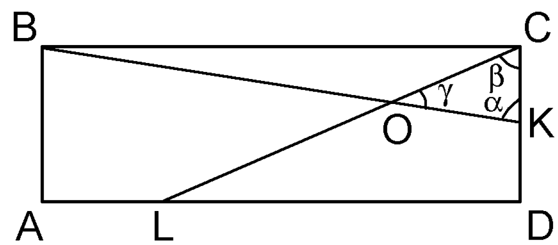
Решений нет, так как $\sin 4<0$.

3. Пусть $\sin x<0$. Раскроем модуль:

$$\begin{cases}\sin x<0,\\\sin x\,(1+(\log_2 x-\log_2 2))=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0,\\\log_2 x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0,\\x=1.\end{cases}$$

Решений нет, так как $\sin 1 > 0$.

Ответ: πn, $n \in \mathbb{N}$.



Задача 4. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 4x$, $CK = \frac{x}{2}$, $LD = 3x$. Углы треугольника COK обозначим α, β, γ. Требуется найти угол γ.

Из $\triangle BCK$ находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{CK} = \frac{4x}{x/2} = 8$.

Из $\triangle CLD$ находим $\operatorname{tg}\beta = \frac{LD}{CD} = \frac{3x}{x} = 3$.

Угол $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$, откуда

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\frac{8+3}{1-24} = \frac{11}{23},$$

следовательно, $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{11}{23}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{11}{23}$.

Задача 5. Воспользуемся формулой $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$:

$$4(1-\cos^2 t) - 4y(1-\cos^2 t) + 9y = 6\cos t - 8y\cos t + 7.$$

Обозначим $\cos t = x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, получим

$$4 - 4x^2 - 4y(1-x^2) + 9y = 6x - 8yx + 7 \Leftrightarrow y(4x^2+8x+5) = 4x^2+6x+3.$$

Дискриминант трёхчлена $4x^2+8x+5$ равен $-16 < 0$, значит трёхчлен не обращается в 0 ни при каком значении x, поэтому делим на него:

$$y = \frac{4x^2+6x+3}{4x^2+8x+5} = \frac{(4x^2+8x+5)-2x-2}{4x^2+8x+5} = 1 - \frac{2x+2}{4x^2+8x+5}.$$

Найдём наименьшее значение y на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

$$y' = \left(1 - \frac{2x+2}{4x^2+8x+5}\right)' = 1' - 2\left(\frac{x+1}{4x^2+8x+5}\right)' =$$

$$= -2\cdot\frac{4x^2+8x+5-(x+1)(8x+8)}{(4x^2+8x+5)^2} =$$

$$= -2\cdot\frac{-4x^2-8x-3}{(4x^2+8x+5)^2} = 2\cdot\frac{4x^2+8x+3}{(4x^2+8x+5)^2}.$$

Производная $y' = 0$ при $4x^2+8x+3 = 0$, откуда $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$. В отрезок $[-1; 1]$ входит только $x = -\frac{1}{2}$. Вычисляем:

$$y(-1) = 1, \quad y(1) = 1 - \frac{4}{17} = \frac{13}{17}, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Значит наименьшее значение y равно $\frac{1}{2}$ при $x = -\frac{1}{2}$. Учитывая, что $x = \cos t$, решаем уравнение $\cos t = \frac{1}{2}$, откуда $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left(t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; y = \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 34.2

Ответы:

Задача 1. -33.

Задача 2. $(-3; 6]$.

Задача 3. 1; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Задача 4. $\pi - \operatorname{arctg}\frac{6}{7}$.

Задача 5. $\left(t = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n; y = \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 34.3

Ответы:

Задача 1. -30.

Задача 2. $(3; 7]$.

Задача 3. 2; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Задача 4. $\operatorname{arctg}\frac{3}{7}$.

Задача 5. $\left(t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n; y = \frac{4}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 35.1

Задача 1.

$$9^{3x-1} \leqslant 3^{-x} \Leftrightarrow 3^{6x-2} \leqslant 3^{-x} \Leftrightarrow 6x - 2 \leqslant -x, \text{ так как основание } 3 > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{2}{7}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{7}\right]$.

Задача 2. Сумма n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле
$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$
Подставим в неё числа из условия задачи:
$$55\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}(n-1)}{2}n.$$
Получили уравнение для определения n. Сократим на $\sqrt{3}$:
$$55 = \frac{(n+1)n}{2} \Leftrightarrow n^2 + n = 110 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 21}{2}.$$

Так как число членов прогрессии не может быть отрицательным, то $n = 10$. Находим

$$a_n = a_{10} = a_1 + 9d = \sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

Ответ: $a_n = 10\sqrt{3}$; $n = 10$.

Задача 3. Так как $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то уравнение примет вид

$$x^2 - 7 = 3\left|x - \frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}\right| \Leftrightarrow x^2 - 7 = 3|x - 1|.$$

Рассмотрим 2 случая: $x - 1 \geqslant 0$ и $x - 1 < 0$.

1. Если $x - 1 \geqslant 0$, то $|x - 1| = x - 1$, и уравнение сведётся к системе

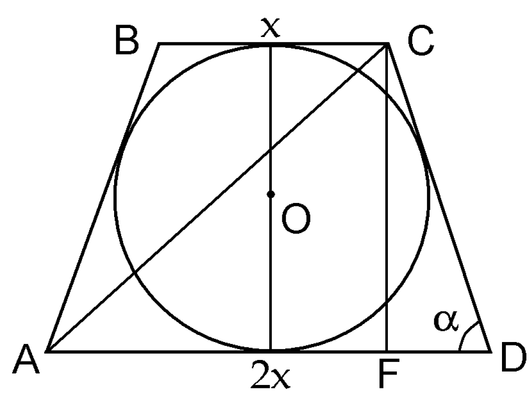
$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 7 = 3(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

2. Если $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1)$, и уравнение сведётся к системе

$$\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x^2 - 7 = -3(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$$

Ответ: -5; 4.

Задача 4. Обозначим радиус вписанной окружности r, радиус описанной окружности R, верхнее основание трапеции x, нижнее основание $2x$. Так как около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобедренная. Так как в неё можно вписать окружность, то



$$BC + AD = AB + CD = 2CD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2x = 2CD \Rightarrow CD = \frac{3}{2}x.$$

Высота трапеции равна $2r = CF$, $FD = \frac{x}{2}$, тогда из $\triangle CFD$ находим

$$CF = \sqrt{CD^2 - FD^2} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{2}\,x \Rightarrow 2r = \sqrt{2}\,x \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}\,x}{2}.$$

Из $\triangle CFD$ находим синус $\angle D = \alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{FD}{CD} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{2}x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Рассмотрим $\triangle ACD$. В нём $CD = \frac{3}{2}x$, $AD = 2x$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Найдём AC по теореме косинусов:

$$AC^2 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x\cdot 2x\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow AC^2 == \frac{17}{4}x^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{17}}{2}x.$$

По теореме синусов находим радиус R окружности, описанной около $\triangle ACD$, она же описана около трапеции:

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{\frac{17}{2}x\cdot 3}{2\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{17}x}{8\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3\sqrt{17}x\cdot 2}{8\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x} = \frac{3\sqrt{17}}{8}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{17}}{8}$.

Задача 5. Обозначим $\sin b = a$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Система примет вид:

$$\begin{cases} 4ax - 2y = 4a + 3, \\ 2x + (2a+3)y = 2a. \end{cases}$$

Линейная система уравнений может иметь или одно решение, или ни одного решения, или бесконечно много решений. Рассмотри условие, при котором система не имеет решений:

$$\frac{4a}{2} = \frac{-2}{2a+3} \neq \frac{4a+3}{2a}.$$

Запишем эти два уравнения в виде системы и найдём a:

$$\begin{cases} a = \frac{-1}{2a+3}, \\ 2a \neq \frac{4a+3}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 3a + 1 = 0, \\ 4a^2 - 4a - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ a \neq -\frac{1}{2}, \\ a \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

При $a = -1$ система не имеет решений. При всех остальных значениях a (в нашем случае при $-1 < a \leqslant 1$) система имеет хотя бы одно решение.

Учитывая, что $a = \sin b$, решим уравнение

$$\sin b \neq -1 \Leftrightarrow b \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: система имеет хотя бы одно решение, если $b \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 35.2

Ответы:

Задача 1. $\left(-\frac{9}{11}; +\infty\right)$.

Задача 2. $n = 7$; $a_1 = 0$ или $n = 6$ и $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 3. 3; -5.

Задача 4. $\frac{b\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

Задача 5. $b \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 35.3

Ответы:

Задача 1. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Задача 2. $a_1 = \frac{3}{4}$; $a_n = \frac{19}{4}$.

Задача 3. -6; 3.

Задача 4. $\sqrt{b^2+ab}$.

Задача 5. $b \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7.8. Экзаменационные билеты 2004 г.

Вариант 36.1

Задача 1.

$$\frac{3x}{4} - \frac{12}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-48}{4x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-48=0, \\ 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

Ответ: ± 4.

Задача 2.

$$\sin 6x - \sqrt{2}\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x - \sqrt{2}\cos 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x(2\sin 3x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0, \\ \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ 3x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$; $(-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Обозначим длины сторон параллелограмма a_1 и b_1, угол между ними α. Тогда площадь параллелограмма будет $S_1 = a_1 b_1 \sin\alpha$.

После изменения, длины сторон стали a_2 и b_2:

$$a_2 = a_1 - 0{,}35a_1 = 0{,}65a_1, \qquad b_2 = b_1 - 0{,}8b_1 = 0{,}2b_1.$$

Площадь изменённого параллелограмма

$$S_2 = 0{,}65a_1 \cdot 0{,}2b_1 \cdot \sin\alpha = 0{,}13a_1b_1\sin\alpha = 0{,}13S_1.$$

Площадь уменьшилась на

$$S_1 - S_2 = S_1 - 0{,}13S_1 = 0{,}87S_1,$$

что составляет 87% от площади первоначального параллелограмма.

Ответ: на 87%.

Задача 4. Введём новое неизвестное $t = \sqrt{x-2}$, $t \geqslant 0$, тогда $x - 2 = t^2$, откуда $x = t^2 + 2$. Неравенство примет вид

$$t^2 + 2 - 15 < 6|3-t| \Leftrightarrow t^2 - 13 - 6|3-t| < 0.$$

Рассмотрим 2 случая: $3 - t \geqslant 0$ и $3 - t < 0$.

1.

$$\begin{cases} 3 - t \geqslant 0, \\ t^2 - 13 - 6(3-t) < 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ t^2 + 6t - 31 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ -3 - \sqrt{10} < t < -3 + \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant 3.$$

2.

$$\begin{cases} 3 - t < 0, \\ t^2 - 13 + 6(3-t) < 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 3, \\ t^2 - 6t + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 3, \\ 1 < t < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < t < 5.$$

Объединяя найденные t в первом и втором случаях, получаем $0 \leqslant t < 5$. Возвращаемся к переменной x:

$$0 \leqslant \sqrt{x-2} < 5 \Leftrightarrow 0 \leqslant x - 2 < 25 \Leftrightarrow 2 \leqslant x < 27 \Leftrightarrow x \in [2; 27).$$

Ответ: $[2; 27)$.

Задача 5.

$$f(x) = \log_{7-6a-a^2}\left(2\cos 5x - \sqrt{12}\sin 5x - a - 1\right).$$

Логарифмическая функция определена при условиях:

$$\begin{cases} 7 - 6a - a^2 > 0, \\ 7 - 6a - a^2 \neq 1, \\ 2\cos 5x - 2\sqrt{3}\sin 5x - a - 1 > 0 \ \big| : 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 6a - 7 < 0, \\ a^2 + 6a - 6 \neq 0, \\ \frac{1}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x > \frac{a+1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 < a < 1, \\ a \neq -3 \pm \sqrt{15}, \\ \sin\frac{\pi}{6}\cos 5x - \cos\frac{\pi}{6}\sin 5x > \frac{a+1}{4}. \end{cases}$$

Последнее неравенство системы можно переписать в виде

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right) > \frac{a+1}{4}.$$

По условию задачи это неравенство должно выполняться при всех значениях x. Это будет выполнено при $\frac{a+1}{4} < -1$, откуда $a < -5$. Система неравенств примет вид

$$\begin{cases} -7 < a < 1, \\ a \neq -3 \pm \sqrt{15}, \\ a < -5 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-7; -3-\sqrt{15}) \cup (-3-\sqrt{15}; -5).$$

Ответ: $a \in (-7; -3-\sqrt{15}) \cup (-3-\sqrt{15}; -5)$.

Вариант 36.2

Ответы:

Задача 1. ± 5.

Задача 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$; $-\frac{\pi}{8} + \pi k$; $-\frac{3\pi}{8} + \pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. На 84%.

Задача 4. $(-16; 9]$.

Задача 5. $\left(-2; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; 2\right)$.

Вариант 36.3

Ответы:

Задача 1. ± 3.

Задача 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$; $-\frac{\pi}{12} + \pi k$; $-\frac{5\pi}{12} + \pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. На 72%.

Задача 4. $[-3; 22)$.

Задача 5. $\left(-6; \frac{-5-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}; -4\right)$.

Вариант 37.1

Задача 1.

$$\begin{cases} 17 - 4x < 0, \\ 10x - 67 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4{,}25, \\ x < 6{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4{,}25; 6{,}7).$$

На этом интервале целые числа $x = 5$ и $x = 6$.

Ответ: 5; 6.

Задача 2. Сделаем замену переменной $t = \sqrt{2^x - 3}$, $t \geqslant 0$. Выразим отсюда 2^x через t и подставим в исходное уравнение. Имеем, $2^x = t^2 + 3$,

$$\sqrt{2^x - 3} = 5 - 2^x \Leftrightarrow t = 5 - (t^2 + 3) \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0.$$

Данное уравнение имеет два корня $t = 1$ и $t = -2$, из которых неотрицателен корень $t = 1$. Возвращаемся к переменной x:

$$t = \sqrt{2^x - 3} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{2^x - 3} \Leftrightarrow 1 = 2^x - 3 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 3. $a_4 + a_{12} = 48$. Используя формулу для n-го члена арифметической прогрессии, перепишем это уравнение в виде

$$a_1 + 3d + a_1 + 11d = 48 \Leftrightarrow 2a_1 + 14d = 48.$$

Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии равна

$$S_{15} = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = \frac{48}{2} \cdot 15 = 360.$$

Ответ: 360.

Задача 4. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 9x + 18 = 0, \\ \left\{\begin{array}{l} x^2 + 9x + 18 \leqslant 0, \\ \cos 2x - \sin 2x = -\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = -3, \\ \left\{\begin{array}{l} -6 \leqslant x \leqslant -3, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = -3, \\ \left\{\begin{array}{l} -6 \leqslant x \leqslant -3, \\ \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = -3, \\ \left\{\begin{array}{l} -6 \leqslant x \leqslant -3, \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = -3, \\ \left\{\begin{array}{l} -6 \leqslant x \leqslant -3, \\ x = \frac{3\pi}{8} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Из ответов $x = \frac{3\pi}{8} + \pi n$, придавая n целые значения, надо выбрать такие x, которые попадают в промежуток $-6 \leqslant x \leqslant -3$. Это происходит только при $n = -2$, следовательно, $x = \frac{3\pi}{8} - \pi \cdot 2 = -\frac{13\pi}{8}$.

Ответ: -6; -3; $-\frac{13\pi}{8}$.

Задача 5. При $a=1$ система примет вид

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x, \\ x^2+(3-x)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x, \\ 2x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Найдём выражение для $2xy$, не решая систему:

$$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=|2a-5|^2-(7a^2-2a+4)=$$
$$=-3a^2-18a+21=-3(a^2+6a-7) \Rightarrow xy=-\frac{3}{2}(a^2+6a-7).$$

График функции $z=-\frac{3}{2}(a^2+6a-7)$ — парабола, её ветви направлены вниз, наибольшее значение z достигается при $a=-\frac{6}{2}=-3$.

Проверим, имеет ли система решение при $a=-3$:

$$\begin{cases} x+y=11, \\ x^2+y^2=73 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=11-x, \\ x^2+(11-x)^2=73 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=11-x, \\ x^2-11x+24=0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения $D=121-96=25>0$. Следовательно, система имеет решение при $a=-3$, а произведение xy при $a=-3$ достигает наибольшего значения.

Ответ: решениями системы при $a=1$ являются пары $(0;3)$, $(3;0)$; произведение xy принимает наибольшее значение при $a=-3$.

Вариант 37.2

Ответы:

Задача 1. -1; 0; 1; 2.

Задача 2. 1.

Задача 3. 9.

Задача 4. 3; -1; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$.

Задача 5. Решениями системы при $a=-1$ являются пары $(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$; произведение xy принимает наибольшее значение при $a=\frac{3}{4}$.

Вариант 37.3

Ответы:

Задача 1. 11; 12; 13.

Задача 2. 1.

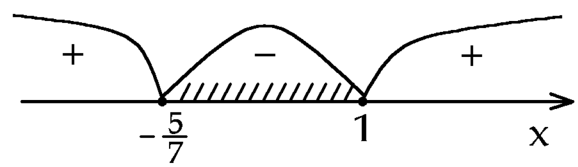
Задача 3. 405.

Задача 4. $-3 \pm \sqrt{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$.

Задача 5. Решениями системы при $a = 0$ являются пары $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; произведение xy принимает наименьшее значение при $a = -\frac{3}{13}$.

Вариант 38.1

Задача 1. Решаем неравенство методом интервалов. Найдём корни квадратного уравнения $7x^2 - 2x - 5 = 0$: $x = 1$, $x = -\frac{5}{7}$. Отмечаем найденные корни на числовой оси, определяем знаки квадратного трёхчлена и получаем $x \in \left[-\frac{5}{7}; 1\right]$.



Ответ: $\left[-\frac{5}{7}; 1\right]$.

Задача 2. Пользуясь периодичностью синуса и формулой приведения, получим

$$\sqrt{3}\sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3} - 2\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: πn; $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Найдём ограничения на x (ОДЗ):

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

На ОДЗ исходное уравнение равносильно следующему

$$\log_2\left((x-2)(x+1)\right) = 2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

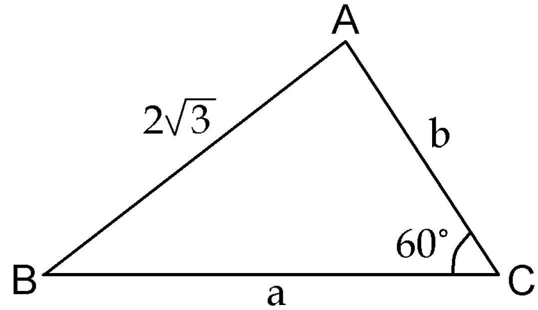
Учитывая ОДЗ, получаем ответ $x = 3$.

Ответ: 3.

Задача 4. По условию задачи $a = b + 2$. Для вычисления стороны AB воспользуемся теоремой косинусов:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab.$$



Для нахождения a и b получаем систему

$$\begin{cases} a = b+2, \\ (2\sqrt{3})^2 = a^2+b^2-ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+2, \\ b^2+2b-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+2, \\ \left[\begin{array}{l} b=2, \\ b=-4. \end{array} \right. \end{cases}$$

Так как b — длина стороны, то $b=2$, откуда $a=4$.

Площадь треугольника ABC находим по формуле

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = 2\sqrt{3}.$$

Радиус описанной окружности найдём по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = 2.$$

Ответ: $S = 2\sqrt{3}$ см^2; $R = 2$ см.

Задача 5. При $a = -\sqrt{6}$ уравнение примет вид

$$\arcsin|16^x+25^x-6\cdot 20^x| = 0 \Leftrightarrow 16^x+25^x-6\cdot 20^x = 0.$$

Разделим все члены уравнения на $25^x \neq 0$:

$$\left(\frac{16}{25}\right)^x + 1 - 6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x = 0.$$

Введём новое неизвестное $t = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, $t>0$. Уравнение примет вид

$$t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3+\sqrt{8}, \\ t = 3-\sqrt{8}. \end{array} \right.$$

Оба корня получились положительными. Возвращаемся к переменной x, имеем

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x = 3+\sqrt{8} \Rightarrow x = \log_{4/5}(3+\sqrt{8}),$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^x = 3-\sqrt{8} \Rightarrow x = \log_{4/5}(3-\sqrt{8}).$$

Теперь рассмотрим уравнение для произвольного значения a. Действуя аналогично, получаем

$$\left(\frac{16}{25}\right)^x + 1 + a\sqrt{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x = 0.$$

Делаем замену $\left(\frac{4}{5}\right)^x = t > 0$:

$$t^2 + a\sqrt{6}t + 1 = 0.$$

Если это уравнение имеет корни t_1 и t_2, то по теореме Виета $t_1t_2 = 1$, $t_1 + t_2 = -a\sqrt{6}$. Из первого соотношения следует, что оба корня одного знака. Чтобы это был знак плюс из второго равенства следует, что $a < 0$. Итак, квадратное уравнение имеет положительные корни, если

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a^2 - 4 \geqslant 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \geqslant \frac{2}{3}, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leqslant -\sqrt{\frac{2}{3}},, \\ a \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}, \end{array} \right. \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right].$$

Следовательно, наибольшее значение a равно $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: при $a = -\sqrt{6}$ $\quad x = \log_{4/5}(3+\sqrt{8})$ и $x = \log_{4/5}(3-\sqrt{8})$; наибольшее значение a, при котором уравнение имеет хотя бы один корень, равно $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Вариант 38.2

Ответы:

Задача 1. $\left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

Задача 2. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. $\frac{1}{2}$.

Задача 4. $S = 294$ см^2; $R = 17{,}5$ см.

Задача 5. При $a = -\sqrt{3}$ $\quad x = \log_{2/5}\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; наибольшее значение a, при котором уравнение имеет хотя бы один корень, равно $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Вариант 38.3

Ответы:

Задача 1. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

Задача 2. πn; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. 0.

Задача 4. $S = 240$ см^2; проекции катетов на гипотенузу равны 4 см и 36 см.

Задача 5. При $a = -\sqrt{7}$ $\quad x = \log_{5/2}\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$; наибольшее значение a, при котором уравнение имеет хотя бы один корень, равно $-\frac{2}{\sqrt{7}}$.

7.9. Экзаменационные билеты 2005 г.

Вариант 39.1

Задача 1.

$$\sqrt[5]{3^{10}\cdot(-2)^5}=\sqrt[5]{3^{10}}\cdot\sqrt[5]{(-2)^5}=3^2\cdot(-2)=-18.$$

Ответ: а).

Задача 2.

$$2x^2-3x=0\Leftrightarrow x(2x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\frac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Сумма корней равна $\frac{3}{2}$.

Ответ: г).

Задача 3.

$$16^{2-x}=4\Leftrightarrow 16^{2-x}=16^{1/2}\Leftrightarrow 2-x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\in(0;2).$$

Ответ: в).

Задача 4. Воспользуемся формулой

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha=2$, находим:

$$1+2^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\sqrt{\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{1}{5}}\Leftrightarrow|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Задача 5. Приведём выражения, стоящие под знаками логарифмов, к общему знаменателю, получим:

$$\log_2 \frac{2x-6}{2x+7} - 12 = 3\log_2 \frac{2x+7}{x-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_2\left(2\cdot\frac{x-3}{2x+7}\right) - 12 = 3\log_2\left(\frac{x-3}{2x+7}\right)^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_2 2 + 2\log_2 \frac{x-3}{2x+7} - 12 = -3\log_2 \frac{x-3}{2x+7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\log_2 \frac{x-3}{2x+7} = 10 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x-3}{2x+7} = 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2x+7} = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 4(2x+7), \\ 2x+7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -31, \\ 2x+7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{31}{7}.$$

Ответ: $-\frac{31}{7}$.

Задача 6. Обозначим через x, y, z цены билетов в театр, кинотеатр и цирк соответственно. В этих обозначениях требуется найти значение выражения $2x+z$. Имеем систему:

$$\begin{cases} 2x+3y+z = 1000, \\ 4x+y+2z = 1500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y+2z = 2000, \\ 4x+y+2z = 1500 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 500, \\ 4x+y+2z = 1500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 100, \\ 4x+2z = 1400 \end{cases} \Rightarrow 2x+z = 700.$$

Ответ: 700 рублей.

Задача 7. Из второго уравнения системы находим:

$$\begin{cases} x+1-y = (1-y)^2, \\ 1-y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 - y, \\ y \leqslant 1. \end{cases}$$

Подставляем x, выраженный через y, в первое уравнение исходной системы, получим

$$|y^2-2| = 3 - y^2 - y.$$

Решение этого уравнения распадается на 2 случая: $y^2-2 \geqslant 0$ и $y^2-2<0$.

1. $y^2-2 \geqslant 0$.

$$y^2-2 = 3-y^2+y \Leftrightarrow 2y^2-y-5=0.$$

Дискриминант D последнего уравнения равен $D = 1-4\cdot 2\cdot(-5) = 41$, откуда $y = \frac{1\pm\sqrt{41}}{4}$. Корень $y = \frac{1+\sqrt{41}}{4}$ не удовлетворяет условию $y \leqslant 1$ и, следовательно, отбрасывается.

Из уравнения $2y^2 - y - 5 = 0$ выражаем y^2 через y: $y^2 = \frac{y+5}{2}$. Так как по условию случая 1 выполнено неравенство $y^2 - 2 \geqslant 0$, то

$$y^2 - 2 = \frac{y+5}{2} - 2 = \frac{y+1}{2} \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Корень $y = \frac{1-\sqrt{41}}{4} < -\frac{1}{2}$ и, значит, тоже отбрасывается.

Итак, случай 1 решений не даёт.

2. $y^2 - 2 < 0$.

$$-y^2 + 2 = 3 - y^2 + y \Leftrightarrow y = -1.$$

Найденный корень $y = -1$ условиям $y^2 - 2 < 0$ и $y \leqslant 1$ удовлетворяет. Из равенства $x = y^2 - y$ вычисляем $x = 2$.

Ответ: $(2; -1)$.

Задача 8. По условию задачи функция y представляется в виде

$$y = (ax^2 + bx + c)^2 \Rightarrow y = a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2$$

для некоторых коэффициентов a, b, c. Найдём их. Так как этот многочлен от x должен совпадать с многочленом из условия задачи, то у них должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной x:

$$a^2 = 1,\ 2ab = 0,\ 2ac + b^2 = -2^{\sin\beta},\ 2bc = \sqrt{3} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{3},\ c^2 = 2^{\sin\beta} - 1,$$

откуда $a = \pm 1$, $b = 0$. Многочлен $ax^2 + bx + c$ возводится в квадрат, следовательно можно считать, что $a = +1$. Имеем,

$$2c = -2^{\sin\beta},\ 0 = \sqrt{3} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{3},\ c^2 = 2^{\sin\beta} - 1.$$

Из первого и третьего уравнений находим:

$$2^{\sin\beta} = c^2 + 1 = -2c \Rightarrow c = -1 \Rightarrow 2^{\sin\beta} = 2 \Rightarrow \sin\beta = 1.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{3} = \sqrt{3}, \\ \sin\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} + 3\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + 6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 39.2

Ответы:

Задача 1. г).

Задача 2. в).

Задача 3. г).

Задача 4. $2\sqrt{2}$.

Задача 5. -2.

Задача 6. 260 рублей.

Задача 7. $(2; -4)$.

Задача 8. $\frac{3\pi}{4} + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 39.3

Ответы:

Задача 1. б).

Задача 2. б).

Задача 3. в).

Задача 4. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 5. 4.

Задача 6. 220 рублей.

Задача 7. $(1; -4)$.

Задача 8. $10\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 40.1

Задача 1.

$$\frac{\sqrt[3]{125}}{25} - \frac{2}{5/3} = \frac{5}{25} - \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{1}{5} - \frac{6}{5} = \frac{1-6}{5} = \frac{-5}{5} = -1.$$

Ответ: б).

Задача 2.

$$25^{x-1} = 5^{3x-4} \Leftrightarrow (5^2)^{x-1} = 5^{3x-4} \Leftrightarrow 5^{2x-2} = 5^{3x-4} \Leftrightarrow 2x-2 = 3x-4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: в).

Задача 3. Функция $\log_5(x^2+1)$ не является положительной при $x = 0$; функция 3^{x^2-5} положительная при любом x; функция $\log_2|x| + 1$ при $x = 0$ не определена и, следовательно, не является положительной при любом x; функция $5^{x^2} - 1$ не является положительной при $x = 0$.

Ответ: б).

Задача 4.

$$\log_5(x^2+2x)=\log_5 x+\log_5 4 \Leftrightarrow \log_5(x^2+2x)=\log_5(4x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=4x, \\ 4x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Задача 5.

$$\sin x\cos x+\sin\frac{\pi}{6}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Перебирая целые n находим, что в отрезок $\left[-\frac{5\pi}{4};0\right]$ попадают два значения: $-\frac{5\pi}{4}$ (при $n=-1$) и $-\frac{\pi}{4}$ (при $n=0$).

Ответ: $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

Задача 6. Обозначим через v скорость, с которой был пройден обратный путь. Тогда время, за которое был пройден этот путь, равняется $\frac{12}{v}$ часам, а путь от деревни до железной дороги был пройден со скоростью $v-1$ км/ч за время, равное $\frac{12}{v-1}$ часам. Так как путь от деревни до железной дороги занял на 1 час больше, чем обратный путь, то получаем уравнение:

$$\frac{12}{v-1}=\frac{12}{v}+1 \Leftrightarrow \begin{cases} v^2-v-12=0, \\ v\neq 1, \\ v\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=4, \\ v=-3 \end{array}\right. \Rightarrow v=4.$$

Ответ: 4 км/ч.

Задача 7. Раскроем модуль, для этого рассмотрим 2 случая.
1. $\sqrt{x+5}-\sqrt{2}>0$. Уравнение будет равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x+5}-\sqrt{2}>0, \\ a=-x(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5>2, \\ a=-x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ a=-x^2-2x. \end{cases}$$

2. $\sqrt{x+5}-\sqrt{2}<0$. Уравнение будет равносильно системе

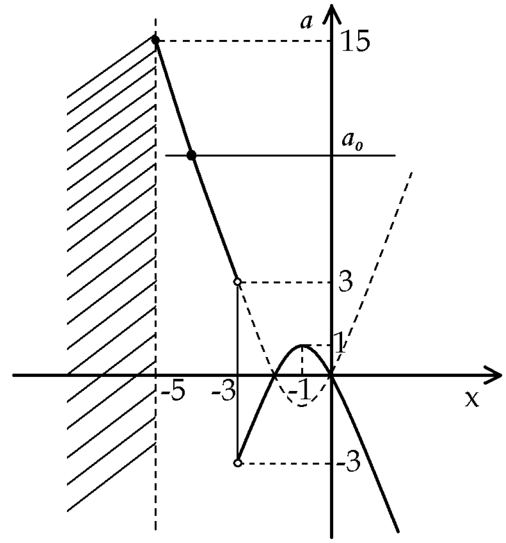
$$\begin{cases} \sqrt{x+5}-\sqrt{2}<0, \\ a=x(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x+5<2, \\ a=x^2+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\leqslant x<-3, \\ a=x^2+2x. \end{cases}$$

Объединим полученные две системы и запишем a в виде функции от x:

$$a=\begin{cases} x^2+2x \text{ при } x\in[-5;-3), \\ -x^2-2x \text{ при } x\in(-3;+\infty). \end{cases}$$

Построим график функции $a(x)$.

По условию задачи требуется, чтобы уравнение имело ровно одно решение, значит при конкретном значении $a = a_0$ должен существовать ровно один x, поэтому график построенной функции должен иметь ровно одно пересечение с горизонтальной прямой $a = a_0$.



Этому условию удовлетворяют $a \in (-\infty; -3] \cup (3; 15]$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (3; 15]$.

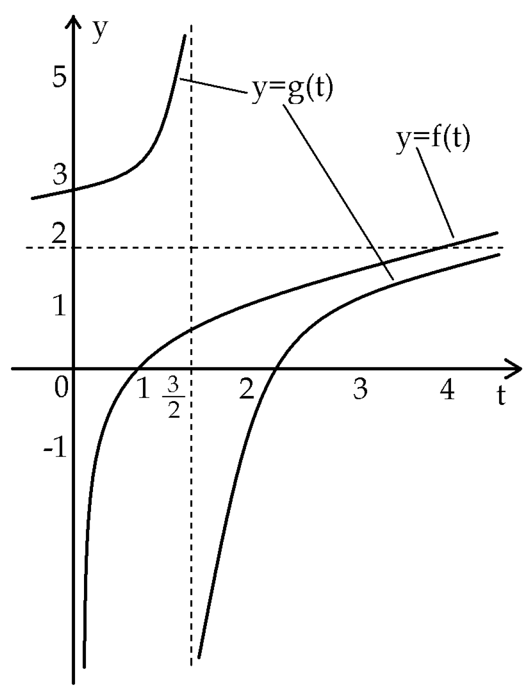
Задача 8. Сделаем замену $t = 4 - x$, тогда $x = 4 - t$, и неравенство примет вид

$$\frac{\log_2 t + 1}{4 - 2t} > \frac{3}{3 - 2t}.$$

Сразу отметим, что значения $t \in (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup \{2\}$ решениями не являются, так как не удовлетворяют области допустимых значений неравенства. Преобразуем неравенство:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 t + 1 > \frac{3(4-2t)}{3-2t}, \\ 4 - 2t > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 t + 1 < \frac{3(4-2t)}{3-2t}, \\ 4 - 2t < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 t + 1 > 3 \cdot \frac{3-2t+1}{3-2t}, \\ 4 > 2t, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 t + 1 < 3 \cdot \frac{3-2t+1}{3-2t}, \\ 4 < 2t \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 t > 2 + \frac{3}{3-2t}, \\ t < 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 t < 2 + \frac{3}{3-2t}, \\ t > 2. \end{cases} \end{array}\right.$$



Рассмотрим две функции:

$$f(t) = \log_2 t \quad \text{и} \quad g(t) = 2 + \frac{3}{3 - 2t}.$$

Тогда совокупность неравенств перепишется в виде:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(t) > g(t), \\ t < 2, \end{cases} \\ \begin{cases} f(t) < g(t), \\ t > 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Начертим графики функций $y = f(t)$ и $y = g(t)$. Обе функции являются возрастающими на области определения.

Множество возможных t (с учётом области допустимых значений) разобьём на 5 промежутков.

1. $t \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. В этом случае $f(t) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(2) = 1$, $g(t) > g(0) = 3$, откуда $f(t) < g(t)$, а в силу полученной совокупности требуется, чтобы на рассматриваемом промежутке выполнялось неравенство $f(t) > g(t)$. Значит в данном случае решений нет.

2. $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Имеем, $f(t) > f(1) = 0$, $g(t) < g(2) = -1$. Следовательно, все $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ неравенству $f(t) < g(t)$ удовлетворяют.

3. $t \in (2; 3)$. Тогда $f(t) > f(2) = 1$, $g(t) < g(3) = 1$, значит на интервале $(2; 3)$ выполнено неравенство $f(t) > g(t)$, а требуется выполнение неравенства $f(t) < g(t)$ (в силу полученной совокупности), поэтому решений нет.

4. $t \in (3; 4)$. Оцениваем функции: $f(t) > f(3) = \log_2 3$, $g(t) < g(4) = \frac{7}{5}$. Сравним полученные числа:

$$\log_2 3 \vee \frac{7}{5} \Leftrightarrow 3 \vee 2^{7/5} \Leftrightarrow 3^5 \vee 2^7 \Leftrightarrow 243 > 128 \Rightarrow \log_2 3 > \frac{7}{5},$$

следовательно, $f(t) > g(t)$ и на рассматриваемом интервале решений нет.

5. $t \in [4; +\infty)$. В данном случае $f(t) > 2$, $g(t) < 2$, поэтому $f(t) > g(t)$ и решений нет.

Итак, получили, что неравенству удовлетворяют $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Возвращаемся к переменной x и находим:

$$\frac{3}{2} < t < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < 4 - x < 2 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < -2 \Leftrightarrow 2 < x < \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Вариант 40.2

Ответы:

Задача 1. в).

Задача 2. г).

Задача 3. в).

Задача 4. 5.

Задача 5. 0; $\frac{\pi}{3}$.

Задача 6. 3 детали в час.

Задача 7. $(-5; 4)$.

Задача 8. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

Вариант 40.3

Ответы:

Задача 1. б).

Задача 2. а).

Задача 3. а).

Задача 4. 3.

Задача 5. 0; $\frac{\pi}{2}$.

Задача 6. 15 дней.

Задача 7. $(-\infty; -35) \cup [-3; -1)$.

Задача 8. $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

Вариант 41.1

Задача 1.

$$1 - \log_3 49 \cdot \log_7 3 = 1 - \log_3 7^2 \cdot \log_7 3 = 1 - 2\log_3 7 \cdot \frac{1}{\log_3 7} = 1 - 2 = -1.$$

Ответ: б).

Задача 2. Последовательной подстановкой вариантов ответа находим, что из предложенных чисел корнем уравнения является $x = 2$.

Ответ: б).

Задача 3. Областью определения данной функции является множество всех x, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 1 \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty; -1] \cup \cup [1; +\infty)$.

Ответ: б).

Задача 4. Знаменатель геометрической прогрессии равен $6 : 3 = 2$. Выпишем первые 6 членов геометрической прогрессии: 3, 6, 12, 24, 48, 96 и найдём их сумму:

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189.$$

Ответ: 189.

Задача 5.

$$49^{2\sqrt{3-x}+1} < 7^{2\sqrt{3-x}+6} \Leftrightarrow 49^{2\sqrt{3-x}+1} < 49^{\sqrt{3-x}+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3-x} + 1 < \sqrt{3-x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x < 4, \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 3].$$

Ответ: $(-1; 3]$.

Задача 6. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения

$$4x^2 - 3x - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0.$$

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{4}$, а по условию задачи $x_1^2 \cdot x_2^2 = 3$, откуда

$$x_1^2 \cdot x_2^2 = \frac{a^2}{16} = 3 \Rightarrow a^2 = 16 \cdot 3 \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{3}.$$

Необходимо, чтобы при найденном значении a корни x_1, x_2 существовали. Значит дискриминант D исходного уравнения должен быть неотрицателен: $D = 9 + 16a \geqslant 0$. Этому условию удовлетворяет только $a = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 7. Заметим, что $\cos y \neq 0$, иначе из второго уравнения системы получится $\sin y = 2$, что невозможно. Из второго уравнения выразим $x \cos y$ и подставим полученное выражение в первое уравнение, предварительно умножив его на $\cos y$:

$$\begin{cases} x \cos y + 2 \sin y \cdot x \cos y = 4 \cos^2 y, \\ x \cos y = 2 - \sin y, \end{cases}$$

откуда

$$2 - \sin y + 2 \sin y \cdot (2 - \sin y) = 4 \cos^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sin y + 4 \sin y - 2 \sin^2 y = 4 - 4 \sin^2 y \Leftrightarrow 2 \sin^2 y + 3 \sin y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin y = 2 > 1 \text{ — нет решений,} \\ \sin y = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} y = \pm \sqrt{3}.$$

Из двух найденных возможных значений $\operatorname{ctg} y$ минимальное равно $-\sqrt{3}$. Остаётся отметить, что в этом случае решение $(x; y)$ исходной системы существует.

Ответ: $-\sqrt{3}$.

Задача 8. Учитывая, что $\log_2(16x - 48) = 4 + \log_2(x - 3)$ перепишем второе неравенство в виде

$$2 \log_2^2(x - 3) + 8 \log_2(x - 3) + 1 > 4 \log_7(x^2 - 9) - 2 \log_7^2(x^2 - 9).$$

Обозначим: $a = \log_7(x^2 - 9)$, $b = \log_2(x - 3)$. В этих обозначениях надо доказать, что из неравенства $a + b > 2$ следует неравенство $2b^2 + 8b + 1 > > 4a - 2a^2$. Преобразуем последнее неравенство:

$$2(a^2 - 2a + 1) + 2(b^2 + 4b + 4) - 9 > 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 2)^2 > \frac{9}{2}.$$

Сделаем замену: $p = a-1$, $q = b+2$. Тогда неравенство $a+b > 2$ записывается в виде $p+q > 3$ и задача сводится к следующей: доказать, что из неравенства $p + q > 3$ следует неравенство $p^2 + q^2 > \frac{9}{2}$.

Из условия $p + q > 3$ и из очевидного неравенства $(p - q)^2 \geqslant 0$ следует система

$$\begin{cases} (p+q)^2 > 9, \\ (p-q)^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + 2pq + q^2 > 9, \\ p^2 - 2pq + q^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Сложим эти неравенства и получим неравенство $2p^2 + 2q^2 > 9$, откуда и следует, что $p^2 + q^2 > \frac{9}{2}$. Учитывая ещё, что у неравенств из условия задачи одинаковая область допустимых значений, делаем вывод, что требуемое доказано.

Доказательство завершено.

Вариант 41.2

Ответы:

Задача 1. в).

Задача 2. в).

Задача 3. а).

Задача 4. -28.

Задача 5. $(-12; 4]$.

Задача 6. $-3\sqrt{6}$.

Задача 7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 8.

Вариант 41.3

Ответы:

Задача 1. б).

Задача 2. в).

Задача 3. а).

Задача 4. $13\frac{4}{9}$.

Задача 5. $(-7; 2]$.

Задача 6. $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Задача 7. $-\sqrt{3}$.

Задача 8.

7.10. Экзаменационные билеты 2006 г.

Вариант 42.1

Задача 1. Число 10 делится на 1, 2, 5 и 10, следовательно, имеет 4 делителя.

Ответ: в).

Задача 2. По определению геометрической прогрессии первый член и знаменатель не равны нулю. Следовательно, второй член геометрической прогрессии не может равняться нулю.

Ответ: б).

Задача 3. Оценим числа $\sqrt{8}$ и $\log_3 5$:

$$2{,}5 = \sqrt{6{,}25} < \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3,$$

$$1 = \log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 25^{1/2} < \log_3 27^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 3^3 = \frac{1}{2}\cdot 3 = 1{,}5.$$

Получили два неравенства:

$$\begin{cases} 2{,}5 < \sqrt{8} < 3, \\ 1 < \log_3 5 < 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5 < \sqrt{8} < 3, \\ -1 > -\log_3 5 > -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5 < \sqrt{8} < 3, \\ -1{,}5 < -\log_3 5 < -1. \end{cases}$$

Складываем неравенства последней системы:

$$2{,}5 - 1{,}5 < \sqrt{8} - \log_3 5 < 3 - 1 \Rightarrow \sqrt{8} - \log_3 5 \in (1; 2).$$

Ответ: б).

Задача 4.

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: -1; 0; 3.

Задача 5. Воспользуемся формулой произведения синусов, будем иметь:

$$2\sin 3x \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \cos(3x - 2x) - \cos(3x + 2x) = \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x - \cos 5x = \cos x \Leftrightarrow -\cos 5x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Применим теорему косинусов к треугольнику ABC:

$$BC^2 = AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow (\sqrt{19})^2 = 5^2+AC^2-2\cdot5\cdot AC\cdot\cos 60^\circ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 19 = 25 + AC^2 - 2\cdot 5\cdot AC\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow AC^2 - 5\cdot AC + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AC = 2, \\ AC = 3. \end{array}\right.$$

Обозначим через CM медиану треугольника ABC, проведённую к стороне AB и воспользуемся формулой для вычисления длины медианы через стороны треугольника:

$$CM^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{AC^2}{2} + \frac{19}{2} - \frac{25}{4} = \frac{AC^2}{2} + \frac{13}{4}.$$

Если $AC = 2$, то $CM^2 = \frac{4}{2} + \frac{13}{4} = \frac{21}{4} < 6 \Rightarrow CM < \sqrt{6}$ — подходит.
Если $AC = 3$, то $CM^2 = \frac{9}{2} + \frac{13}{4} = \frac{31}{4} > 6 \Rightarrow CM > \sqrt{6}$ — не подходит.
Итак, $AC = 2$. Находим площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\cdot\sin 60^\circ = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Задача 7. Преобразуем отдельно правую часть неравенства:

$$\log_{10x-3} 5 + \frac{1}{\log_2(10x-3)} = \log_{10x-3} 5 + \log_{10x-3} 2 =$$
$$= \log_{10x-3} 10 = \frac{1}{\log_{10}(10x-3)},$$

тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{1}{\log_{10}(24x^2-12x+1)} \leqslant \frac{1}{\log_{10}(10x-3)}.$$

Перенесём дроби в одну часть и приведём их к общему знаменателю, получим:

$$\frac{\log_{10}\frac{24x^2-12x+1}{10x-3}}{\log_{10}(10x-3)\cdot\log_{10}(24x^2-12x+1)} \geqslant 0.$$

Для решения неравенства обозначим его левую часть через $f(x)$ и воспользуемся методом интервалов, для чего найдём нули числителя, нули знаменателя, а также область допустимых значений неравенства.

Чтобы числитель или знаменатель обращались в ноль, выражения, стоящие под знаками логарифмов, должны равняться нулю, получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{24x^2-12x+1}{10x-3}=1, \\ 10x-3=1, \\ 24x^2-12x+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{24x^2-22x+4}{10x-3}=0, \\ 10x=3, \\ 24x^2-12x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3},\ x=\frac{1}{4}, \\ x=\frac{3}{10}, \\ x=0,\ x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Область допустимых значений неравенства находим из системы:

$$\left\{\begin{array}{l} 24x^2-12x+1>0, \\ 10x-3>0, \\ 24x^2-12x+1\neq 1, \\ 10x-3\neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

С учётом нулей числителя и знаменателя для метода интервалов получаем множество $x\in\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}};+\infty\right)$ с отмеченными точками $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$, причём точки $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{2}$ — выколотые, а точка $\frac{2}{3}$ — заштрихованная.

Для определения знака функции $f(x)$ на каждом из получившихся интервалов определим знаки каждого логарифма, входящего в функцию $f(x)$. Решение оформим в виде таблицы.

функция	$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$
$\log_{10}\frac{24x^2-12x+1}{10x-3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\log_{10}(10x-3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\log_{10}(24x^2-12x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Так как решается неравенство $f(x)\geqslant 0$, то выбираем знак $+$ в строке $f(x)$; учитываем, что $x=\frac{2}{3}$ тоже удовлетворяет неравенству, и получаем: $x\in\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Задача 8. Правая часть неравенства больше или равна квадратному корню, поэтому должна быть неотрицательна:

$$4\log_2(2y)-4\log_2(2y^2-7y+8)\geqslant 0\Leftrightarrow\log_2(2y)\geqslant\log_2(2y^2-7y+8)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2y\geqslant 2y^2-7y+8, \\ 2y^2-7y+8>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2y^2-9y+8\leqslant 0, \\ 2y^2-7y+8>0. \end{array}\right.$$

Решая отдельно первое неравенство находим, что $y \in \left(\frac{9-\sqrt{17}}{4}; \frac{9+\sqrt{17}}{4}\right)$. В этом интервале содержится лишь два целых y: $y = 2$, $y = 3$. Оба найденные значения удовлетворяют неравенству $2y^2 - 7y + 8 > 0$.

Обозначим:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9; \quad g(y) = 4\log_2(2y) - 4\log_2(2y^2 - 7y + 8).$$

Найдём область допустимых значений левой части исходного неравенства:

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 9(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-3; -1] \cup [3; +\infty) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -3;\ -2;\ -1;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots \text{ так как } x \text{ — целое.}$$

1. Рассмотрим случай $y = 2$. Так как $g(2) = 4$, то исходное неравенство примет вид:

$$\sqrt{f(x)} \leqslant g(2) \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 16.$$

Имеем,

$$f(-3) = f(-1) = f(3) = 0 \leqslant 16, \quad f(-2) = 5 \leqslant 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -3,\ x = -1,\ x = 3,\ x = -2 \text{ — подходят.}$$

Далее, $f(4) = 35 > 16$. Так как $f(x) = (x-3)(x+3)x+1)$, то при $x > 4$ значение функции $f(x)$ будет больше $f(4) > 16$. Следовательно, другие целые x неравенству $\sqrt{f(x)} \leqslant g(2)$ не удовлетворяют.

Итак, случай 1 даёт четыре корня: $(-3; 2)$; $(-2; 2)$; $(-1; 2)$; $(3; 2)$.

2. Теперь рассмотрим случай $y = 3$. Покажем, что $g(3) < 5$:

$$g(3) = 4\log_2 6 - 4\log_2 5 = 4\log_2 \frac{6}{5} < 4\log_2 2 < 4 < 5.$$

Так как $f(-3) = f(-1) = f(3) = 0 < g(3)$, то значения $x = -3$, $x = -1$, $x = 3$ подходят. Учитывая оценки на значения функции $f(x)$, найденные в случае 1, получаем, что других x, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{f(x)} \leqslant g(3)$, нет.

Итак, в случае 2 найдены три корня: $(-3; 3)$; $(-1; 3)$; $(3; 3)$.

Ответ: $(-3; 2)$; $(-2; 2)$; $(-1; 2)$; $(3; 2)$; $(-3; 3)$; $(-1; 3)$; $(3; 3)$.

Вариант 42.2

Ответы:

Задача 1. г).

Задача 2. б).

Задача 3. г).

Задача 4. -3; 0; 2.

Задача 5. $\frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. 1.

Задача 7. $\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{14}{5}\right) \cup \left(3; \frac{10}{3}\right]$.

Задача 8. $(-3;1)$; $(-2;1)$; $(2;1)$; $(3;1)$; $(4;1)$; $(-2;2)$; $(2;2)$; $(4;2)$.

Вариант 42.3

Ответы:

Задача 1. б).

Задача 2. б).

Задача 3. б).

Задача 4. -4; 0; 1.

Задача 5. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. $3\sqrt{3}$.

Задача 7. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \left(1; \frac{6}{5}\right)$.

Задача 8. $(-5;3)$; $(-4;3)$; $(1;3)$; $(2;3)$; $(3;3)$; $(4;3)$; $(-4;4)$; $(1;4)$; $(4;4)$.

Вариант 43.1

Ответы:

Задача 1. г).

Задача 2. б).

Задача 3. г).

Задача 4. -3.

Задача 5. -2; $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. $\left[\frac{5}{12}; +\infty\right)$.

Задача 7. $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

Задача 8. 32.

Вариант 43.2

Ответы:

Задача 1. а).

Задача 2. в).

Задача 3. г).

Задача 4. -2.

Задача 5. -5; $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. $\left(-\infty; -\frac{13}{8}\right]$.

Задача 7. 28.

Задача 8. 50.

Вариант 43.3

Ответы:

Задача 1. в).

Задача 2. г).

Задача 3. в).

Задача 4. -3.

Задача 5. $-3;\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. $\left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Задача 7. $42\sqrt{3}$.

Задача 8. 8.

Вариант 44.1

Ответы:

Задача 1. г).

Задача 2. б).

Задача 3. в).

Задача 4. $(-1)^n \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $\frac{4}{3}$.

Задача 6. $(-\sqrt{6}; \sqrt{6}) \setminus \left\{\pm\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$.

Задача 7. $5\sqrt{3}$. $(BC = \sqrt{21};\ \angle A = 60^\circ)$.

Задача 8. $\sqrt{2}$.

Вариант 44.2

Ответы:

Задача 1. г).

Задача 2. в).

Задача 3. а).

Задача 4. $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $-\frac{5}{2}$.

Задача 6. $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \setminus \left\{\pm\sqrt{\frac{5}{7}}\right\}$.

Задача 7. $\sqrt{\frac{28}{3}}$. ($BC = \sqrt{28}$; $\angle A = 60^\circ$).

Задача 8. $-\sqrt{2}$.

Вариант 44.3

Ответы:

Задача 1. б).

Задача 2. б).

Задача 3. г).

Задача 4. $\pm\frac{5\pi}{42} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. 2.

Задача 6. $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \setminus \left\{\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}$.

Задача 7. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. ($AC = 3$; $BC = \sqrt{19}$; $\angle A = 60^\circ$).

Задача 8. $\sqrt{2}$.

Вариант 45.1

Ответы:

Задача 1. а).

Задача 2. в).

Задача 3. б).

Задача 4. $-\frac{7}{6}$.

Задача 5. -1; 4.

Задача 6. $(-\infty; -4) \cup (-4; -1) \cup \{2\}$.

Задача 7. при $a < \log_4 25 \quad x \in (-6; -1-\sqrt{25-4^a}) \cup (-1+\sqrt{25-4^a}; 4)$; при $a = \log_4 25 \quad x \in (-6; -1) \cup (-1; 4)$; при $a > \log_4 25 \quad x \in (-6; 4)$.

Задача 8. $x = 2$; $y = 6\pi k$; $z = \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 45.2

Ответы:

Задача 1. в).

Задача 2. а).

Задача 3. а).

Задача 4. $-\frac{27}{35}$.

Задача 5. $\{1\} \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)$.

Задача 6. $-\frac{4}{3}$; 2.

Задача 7. при $a < \log_9 25$ $x \in (-2; 3-\sqrt{25-9^a}) \cup (3+\sqrt{25-9^a}; 8)$; при $a = \log_9 25$ $x \in (-2; 3) \cup (3; 8)$; при $a > \log_9 25$ $x \in (-2; 8)$.

Задача 8. $x = 3$; $y = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k$; $z = \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 45.3

Ответы:

Задача 1. в).

Задача 2. в).

Задача 3. г).

Задача 4. $-\frac{3}{10}$.

Задача 5. 2; 5.

Задача 6. $(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup \{7\}$.

Задача 7. при $a < \log_9 25$ $x \in (-5; -2-\sqrt{25-9^a}) \cup (-2+\sqrt{25-9^a}; 1)$; при $a = \log_9 25$ $x \in (-5; -2) \cup (-2; 1)$; при $a > \log_9 25$ $x \in (-5; 1)$.

Задача 8. $x = -1$; $y = \pi k$, $z = \frac{5\pi}{2} + 10\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

7.11. Экзаменационные билеты 2007 г.

Вариант 46.1

Ответы:

Задача 1. -2.

Задача 2. $\frac{2}{3b}$.

Задача 3. ± 2.

Задача 4. $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{10}{7}; +\infty\right)$.

Задача 5. `Указание.` Решить неравенство относительно $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{x} \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. Затем найти x, учитывая, что $\sqrt{x} \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$.

Задача 6. $d \in \left[-\frac{5}{3}; \frac{1}{9}\right]$.

Вариант 46.2

Ответы:

Задача 1. -3.

Задача 2. $\frac{3}{2a}$.

Задача 3. ± 1.

Задача 4. $\left(0; \frac{6}{11}\right]$.

Задача 5. `Указание.` Решить неравенство относительно $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \sqrt{x} \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}$. Затем найти x, учитывая, что $\sqrt{x} \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$.

Задача 6. $d \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{5}{2}\right]$.

Вариант 46.3

Ответы:

Задача 1. -9.

Задача 2. $\frac{5}{2a}$.

Задача 3. ± 3.

Задача 4. $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

Задача 5. `Указание.` Решить неравенство относительно $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \sqrt{x} \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}$. Затем найти x, учитывая, что $\sqrt{x} \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$.

Задача 6. $d \in \left[-\frac{5}{6}; \frac{1}{18}\right]$.

Вариант 47.1

Ответы:

Задача 1. 2.

Задача 2. 4.

Задача 3. $(-5; 3{,}5]$.

Задача 4. $(0; 1]$.

Задача 5. $\left[2; 2\frac{1}{4}\right]$.

Задача 6. $k = \frac{1}{27};\ x = 3;\ x = -6$.

Вариант 47.2

Ответы:

Задача 1. 1.

Задача 2. -2.

Задача 3. $[2; 4{,}5)$.

Задача 4. $[2; 4)$.

Задача 5. $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

Задача 6. $k = \frac{1}{4};\ x = 2;\ x = -4$.

Вариант 47.3

Ответы:

Задача 1. 1.

Задача 2. -1.

Задача 3. $\left(-3; \frac{1}{2}\right]$.

Задача 4. $[1; 9)$.

Задача 5. $\left[9\frac{2}{3}; 11\right]$.

Задача 6. $k = \frac{1}{25}$; $x = 5$; $x = -10$.

Вариант 48.1

Ответы:

Задача 1. $(5; 2)$.

Задача 2. $(-\infty; -2) \cup (10; +\infty)$.

Задача 3. πn; $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. $(-\infty; 2)$.

Задача 5. $\pi - \operatorname{arctg}\frac{6}{7}$.

Задача 6. $a = -\frac{9}{4}$; $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{3}{4}$; $z = \frac{9}{4}$.

Вариант 48.2

Ответы:

Задача 1. $(3; -5)$.

Задача 2. $(1; 15)$.

Задача 3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Задача 5. $\operatorname{arctg}\frac{11}{23}$.

Задача 6. $a = -\frac{1}{6}$; $x = \frac{1}{6}$; $y = \frac{1}{6}$; $z = \frac{1}{6}$.

Вариант 48.3

Ответы:

Задача 1. $(1; 5)$.

Задача 2. $(-5; 7)$.

Задача 3. πn; $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. $(-\infty; 5)$.

Задача 5. $\frac{3\pi}{4}$.

Задача 6. $a = -\frac{2}{5}$; $x = \frac{1}{5}$; $y = \frac{1}{5}$; $z = \frac{2}{5}$.

Вариант 49.1

Ответы:

Задача 1. $(4;-1)$.

Задача 2. $\pm\frac{15}{2}+18n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. $[-2;2]\cup\{3\}$.

Задача 4. 2.

Задача 5. 1.

Задача 6. $\left(\frac{1}{7};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{5};1\right)$.

Вариант 49.2

Ответы:

Задача 1. $\left(-3;\frac{17}{5}\right)$.

Задача 2. $(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}+3n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. $[-1;1]\cup\{-2\}$.

Задача 4. 2.

Задача 5. 1.

Задача 6. $\left(\frac{1}{10};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{4}{7};1\right)$.

Вариант 49.3

Ответы:

Задача 1. $\left(-\frac{3}{2};2\right)$.

Задача 2. $\pm 10+30n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. $[-3;3]\cup\{-4\}$.

Задача 4. $\frac{1}{2}$.

Задача 5. -1.

Задача 6. $\left(\frac{2}{15};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{7}{10};1\right)$.

Вариант 50.1

Ответы:

Задача 1. $\left(4;\frac{1}{2}\right)$.

Задача 2. $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Задача 3. 69.

Задача 4. $(0;4)$.

Задача 5. $[-1+\sqrt{2};1)$.

Задача 6. $\frac{144}{25}$; 52.

Вариант 50.2

Ответы:

Задача 1. $\left(3; \frac{1}{2}\right)$.

Задача 2. $\left(-9; \frac{4}{5}\right]$.

Задача 3. -1.

Задача 4. $(-1; 4)$.

Задача 5. $[7; 19)$.

Задача 6. $\frac{144}{25}$; 52.

Вариант 50.3

Ответы:

Задача 1. $(25; -1)$.

Задача 2. $\left(-7; \frac{4}{3}\right]$.

Задача 3. $\frac{13}{27}$.

Задача 4. $(-8; 4)$.

Задача 5. $[1{,}25; 1{,}5)$.

Задача 6. $\frac{25}{144}$; 73.

7.12. Собеседование для поступающих по договору

1. $-3 \pm \sqrt{5}$. **2.** 0; $\frac{1}{2}$. **3.** $(-\infty; 1) \cup \{2\}$. **4.** 4. **5.** $[3; +\infty)$. **6.** $5\sqrt{2} - 7$. **7.** $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. **8.** $[-1 - 2\sqrt{2}; -3) \cup (1; 3]$. **9.** -3; -1. **10.** -20. **11.** 5. **12.** -4; -2. **13.** $(-\infty; -4]$. **14.** $(-3; 6]$. **15.** $\frac{11}{2}$. **16.** 1. **17.** $(-\infty; 1)$. **18.** $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **19.** $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$. **20.** 27. **21.** $\left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$. **22.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right]$. **23.** $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. **24.** $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. **25.** $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **26.** $60^\circ + (-1)^n \cdot 30^\circ + 180^\circ \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$. **27.** $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **28.** $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **29.** $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **30.** $\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

7.13. Олимпиада 2002 г.

Вариант I

Ответы:

Задача 1. $6; 7; 8$.

Задача 2. $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{18} + 2\pi k$; $\frac{13\pi}{18} + 2\pi \ell$, $n, k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. 77. Указание. Каждое число должно делиться на 13.

Задача 5. Можно. Указание. $13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197 > 2002$.

Вариант II

Ответы:

Задача 1. $-2; -1; 0; 1; \ldots; 10; 11$.

Задача 2. $(-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. 204. Указание. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$.

Задача 5. Найдётся. Указание. Существует точка, например, с координатами $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right)$, расстояния от которой до любых точек с целочисленными координатами различны.

7.14. Олимпиада 2003 г.

Вариант I

Ответы:

Задача 1. $\operatorname{tg} 0{,}01^\circ$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Задача 2. 3. Указание. Найдите ОДЗ и выберите из неё целые значения.

Задача 3. Указание. Оцените стационарные точки функции.

Задача 4. $a \in (4; 8)$.

Задача 5. $\angle A = 90^\circ$; $\angle B = 60^\circ$; $\angle C = 30^\circ$. Указание. Воспользуйтесь теоремой синусов, теоремой косинусов и переберите случаи с помощью неравенства треугольника.

Вариант II

Ответы:

Задача 1. $\sin 0{,}02^\circ$. **Указание.** Воспользуйтесь формулой $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Задача 2. 2. **Указание.** Найдите ОДЗ и выберите из неё целые значения.

Задача 3. **Указание.** Оцените стационарные точки функции.

Задача 4. $a = 8$.

Задача 5. $\angle A = 30^\circ$; $\angle B = 90^\circ$; $\angle C = 60^\circ$. **Указание.** Воспользуйтесь теоремой синусов, теоремой косинусов и переберите случаи с помощью неравенства треугольника.

7.15. Олимпиада 2004 г.

Вариант I

Ответы:

Задача 1. Можно. Например, $-20; 7; 7; 7; -20; 7; 7; 7; -20; \ldots$

Задача 2. $-\sqrt[4]{2} < x < -1$, $x \neq \frac{-1-\sqrt{1+16n}}{16}$, $n = 15$; 16; 17; 18; 19; 20 и $1 < x < \sqrt[4]{2}$, $x \neq \frac{-1+\sqrt{1+16n}}{16}$, $n = 19$; 20; 21; 22; 23; 24; 25.

Задача 3. $\frac{10\sin 38^\circ}{1-\cos 38^\circ} = 10\operatorname{ctg} 19^\circ$.

Задача 4. **Указание.** Рассмотрите случаи, влияющие на раскрытие минимума и максимума.

Задача 5. $a = -1$; $b = \frac{3}{2}$. **Указание.** Оцените левую и правую части неравенства.

Вариант II

Ответы:

Задача 1. Можно. Например, $23; -6; -6; -6; -6; 23; -6; -6; -6; -6; \ldots$

Задача 2. $-\sqrt[4]{2} < x < -1$, $x \neq \frac{1-\sqrt{1+13n}}{13}$, $n = 16$; 17; 18; 19; 20 и $1 < x < \sqrt[4]{2}$, $x \neq \frac{1+\sqrt{1+13n}}{13}$, $n = 12$; 13; 14; 15; 16.

Задача 3. $\frac{12\sin 54^\circ}{1-\cos 54^\circ} = 12\operatorname{ctg} 27^\circ$.

Задача 4. **Указание.** Рассмотрите случаи, влияющие на раскрытие минимума и максимума.

Задача 5. $a = 5$; $b = 1$. **Указание.** Оцените левую и правую части неравенства.

7.16. Олимпиада 2005 г.

Вариант I

Ответы:

Задача 1. $(1;1;1;1;1)$; $(-1;-1;-1;-1;-1)$.

Задача 2. $\frac{6-2a}{a+3}$.

Задача 3. Указание. Докажите, что для площади S треугольника выполняется неравенство $S \leqslant \frac{1}{2}a^2$, где a — боковая сторона рассматриваемого равнобедренного треугольника.

Задача 4. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}-2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $n, k = 0; 1; 2\ldots$

Задача 5. $a \in \{-2\} \cup (2; +\infty)$. Указание. После деления на d получившееся уравнение относительно d не должно иметь корней.

Вариант II

Ответы:

Задача 1. $\left(\frac{1}{4}; 4; \frac{1}{4}; 4\right)$.

Задача 2. $\frac{12-6a}{4-a}$.

Задача 3. Указание. Докажите, что для площади S параллелограмма выполняется неравенство $S \leqslant \frac{1}{2}d^2$, где d — бóльшая диагональ рассматриваемого параллелограмма.

Задача 4. $(2\pi n; 2\pi k)$; $(\pi - 2\pi n; \pi - 2\pi k)$, $n, k = 1; 2; 3\ldots$

Задача 5. $a \in (-\infty; -3) \cup \{3\}$. Указание. После деления на d получившееся уравнение относительно d не должно иметь корней.

7.17. Олимпиада 2006 г.

Вариант I

Задача 1.

$$(\sin x)^{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \left\{\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Найдём область допустимых значений функции:

$$\begin{cases} x^2 - 7 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 4) \cup (4; 5).$$

В задаче требуется найти все x, которые не входят в область допустимых значений, откуда получаем: $x \in [-\sqrt{7}; \sqrt{7}] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$.

Задача 3.

$$x^3 + (1 + \sqrt{5})x^2 - 5 = x^3 + \sqrt{5}x^2 + x^2 - 5 =$$
$$= x^2(x + \sqrt{5}) + (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = (x + \sqrt{5})(x^2 + x - \sqrt{5}).$$

Ответ: $(x + \sqrt{5})(x^2 + x - \sqrt{5})$.

Задача 4. Обозначим через O_1, O_2 центры окружностей, содержащих точки M и N соответственно. Точки O_1, A и O_2 лежат на одной прямой, следовательно $\angle O_1AM + \angle MAN + \angle NAO_2 = 180°$.

Треугольники MAO_1 и NAO_2 равнобедренные ($O_1M = O_1A$, $O_2N = O_2A$ как радиусы), поэтому

$$\angle MO_1A = 180° - 2 \cdot \angle O_1AM, \quad \angle NO_2A = 180° - 2 \cdot \angle NAO_2.$$

Остаётся заметить, что $\angle MO_1A + \angle NO_2A = 180°$ ($O_1M \parallel O_2N$, так как отрезки O_1M и O_2N перпендикулярны одной касательной как радиусы, а O_1O_2 секущая), откуда получаем:

$$\angle MO_1A + \angle NO_2A = 180° - 2 \cdot \angle O_1AM + 180° - 2 \cdot \angle NAO_2 = 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle O_1AM + \angle NAO_2 = 90° \Rightarrow \angle MAN = 90°,$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. Число $2006 = 11 \cdot 182 + 4$, поэтому остаток от деления числа 2006 на 11 равен 4, значит у чисел 2006^{6002} и 4^{6002} остатки при делении на 11 одинаковые. Далее, $4^{6002} = 16^{3001}$, а $16 = 11 + 5$, поэтому, аналогично получаем, что у чисел 16^{3001} и 5^{3001} остатки при делении на 11 одинаковые. Затем, $5^{3001} = 5 \cdot 25^{1500}$ и, так как $25 = 11 \cdot 2 + 3$, то поиск остатка от деления на 11 числа 5^{3001} сводим к поиску остатка от деления на 11 числа $5 \cdot 3^{1500}$. Продолжаем упрощение: $5 \cdot 3^{1500} = 5 \cdot 81^{375}$, $81 = 11 \cdot 7 + 4$, следовательно переходим к числу $5 \cdot 4^{375} = 5 \cdot 1024^{75}$. Наконец, учитывая, что $1024 = 11 \cdot 93 + 1$, получаем число $5 \cdot 1^{75} = 5$, значит искомый остаток равен 5.

Ответ: 5.

Вариант II

Ответы:

Задача 1. πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. $(-\infty; -2] \cup \{3\} \cup [\sqrt{10}; +\infty)$.

Задача 3. $(x - \sqrt{7})(x^2 - x - \sqrt{7})$.

Задача 4. `Указание.` Обозначим D — точка пересечения луча SP и большей окружности. Докажите, что треугольник ADB равнобедренный, для этого покажите, что O_2D — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Задача 5. 3.

7.18. Олимпиада 2007 г.

Вариант I

Задача 1. $\{1; 1; 1\}$, $\{0; 1; 2\}$, $\{-1; 2; 2\}$.
`Указание.` Раскрыть модуль $x + y - z = \pm 1$.

Задача 2. -4.
`Указание.` $a_1 = q$, $b_1 = d$, $a_5(b_2 - b_4) = 0$, $a_1 > 0$, $d > 0$, $S_6^b - S_4^a -?$

$$a_1 + 4d = 0 \text{ или } b_1 q - b_1 q^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -4d \text{ или } q = 1 \text{ или } q = -1.$$

Подходит лишь $q = 1$, откуда $b_n = b_1 = d$, $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)d$.

$$S_6^b - S_4^a = (d + d + d + d + d + d) - (1 + 1 + d + 1 + 2d + 1 + 3d) = -4.$$

Задача 3. 100. `Указание.` $((((20 : 2 + 30) : 2) + 40) : 2 + 50) : 2 + 60 = 100$.

Задача 4. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
`Указание.` $t = \sin x$. $\quad 2007^t + 7002^t \leqslant 9009^t$. $\quad \left(\frac{2007}{9009}\right)^t + \left(\frac{7002}{9009}\right)^t \leqslant 1$.

Слева убывающая функция, при $t = 1$ — равенство. Следовательно, $t \geqslant 1$, значит $\sin x \geqslant 1$, откуда $\sin x = 1$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $\frac{\sqrt{4 + 2\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ}}{\cos 40^\circ}$.
`Указание.` Отразить треугольник на плоскости последовательно относительно каждой из сторон (боковой - основания - боковой). Искомый периметр будет равен отрезку, соединяющему точку пересечения биссектрис исходного и четвёртого треугольников. Находится по теореме косинусов.

Вариант II

Задача 1. $\{1; 1; 0\}$, $\{0; 0; 2\}$.
`Указание.` Раскрыть модуль $x + y - z = \pm 2$.

Задача 2. 5.
`Указание.` $d = b_1$, $q = a_1$, $a_4(b_3 - b_5) = 0$, $b_1 > 0$, $q > 0$, $S_5^a - S_{10}^b -?$

$$a_1 + 3d = 0 \text{ или } b_1q^2 - b_1q^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -3d \text{ или } q = 1 \text{ или } q = -1.$$

Подходит лишь $q = 1$, откуда $b_n = b_1 = d$, $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)d$.
$S_5^a - S_{10}^b = (1+1+d+1+2d+1+3d+1+4d) - (d+d+d+d+d+d+d+d+d+d) = 5.$

Задача 3. 120. `Указание.` $(((((20\cdot 2)-10)\cdot 2-20)\cdot 2-30)\cdot 20-40)\cdot 20 = 120.$

Задача 4. $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
`Указание.` $t = \cos x$. $2007^t + 4995^t \leqslant 7002^t$. $\left(\frac{2007}{7002}\right)^t + \left(\frac{4995}{7002}\right)^t \leqslant 1$.

Слева убывающая функция, при $t = 1$ — равенство. Следовательно, $t \geqslant 1$, значит $\cos x \geqslant 1$, откуда $\cos x = 1$ и $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. $\frac{2\sqrt{4+2\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ}}{\cos 40^\circ}$.
`Указание.` Отразить треугольник на плоскости последовательно относительно каждой из сторон (боковой - основания - боковой). Искомый периметр будет равен отрезку, соединяющему точку пересечения биссектрис исходного и четвёртого треугольников. Находится по теореме косинусов.

7.19. Олимпиада 2008 г.

Вариант I

Ответы:

Задача 1.

Задача 2. $-$.

Задача 3. 4.

Задача 4. $-\frac{1}{2}; -\frac{17}{6}$.

Задача 5. $\sqrt{2} + 1$.

Задача 6. $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Вариант II

Ответы:

Задача 1.

Задача 2. $+$.

Задача 3. 4.

Задача 4. $\frac{11}{4}; \frac{3}{4}$.

Задача 5. $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Задача 6. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

8. Советы абитуриенту

Во время письменного экзамена по математике поступающий получает вариант задания, содержащий некоторое число задач (в последние годы их было восемь, но не обязательно так будет в дальнейшем). Подробное письменное изложение решений этих задач необходимо составить в отводимое время.

На письменном экзамене проверяется, умеет ли поступающий решать задачи, требующие хорошего знания основных вопросов школьного курса, прочного владения техникой алгебраических и тригонометрических преобразований, умения последовательно и логически правильно строить доказательства. Следует подчеркнуть, что ни в одной из экзаменационных задач не требуется никаких знаний сверх „Программы вступительных экзаменов по математике“. Эти задачи решаются последовательным применением изучаемых в школе правил и приёмов, использованием известных из школьного курса определений и теорем. Это, конечно, не означает, что экзаменационные задачи решаются без труда — они предполагают активное знание материала, умение самостоятельно искать подход к решению и логически рассуждать. Иначе говоря, справиться с такими задачами может лишь тот, кто твёрдо усвоил школьный курс, получил достаточные навыки чёткого и уверенного решения школьных задач. Целью экзамена является проверка глубины и прочности знаний поступающих, а не выяснение их сообразительности и смекалки. Лицам, поступающим на специальности с повышенными требованиями по математике, предлагаются, естественно, более трудные задачи, в том числе и такие, в которых нужно проявить определённую самостоятельность мысли. Но и в этих задачах речь идёт не о какой-то особой изобретательности, а о необходимости исследовать поставленный вопрос хорошо известными средствами.

У поступающих часто возникают затруднения с оформлением письменных работ. Нужно стараться решения задач в экзаменационной работе писать чётко, подробно и аккуратно. В алгебраических и тригонометрических примерах следует объяснять выкладки (что из чего получается и каким образом), провести проверку решений (если это необходимо), указать все ограничения (возникающие как из условия, так и в ходе преобразований). В геометрических задачах чертежи надо выполнять аккуратно (можно чернилами и от руки); все обозначения на чертеже должны быть объяснены, а обозначения в тексте решения должны с ними совпадать. Если в процессе рассуждении применяется какая-либо теорема или формула, то она должна быть названа.

Поступающие часто допускают в решении арифметические ошибки, путают знаки и т. п. Поэтому полезно тщательно контролировать себя, внимательно проверять выкладки. При наличии арифметических ошибок задача не может считаться решённой безукоризненно. Многие поступающие выполняют письменную работу небрежно, пишут беспорядочно и настолько непонятно, что зачастую потом сами не могут расшифровать свои записи. Всё это приводит к путанице, опискам, ошибкам и, в конечном итоге, — к более низкой оценке. Рекомендуется и на черновиках писать достаточно чётко, не разбрасывая решение по разным листам, ибо в противном случае при переписке на чистовик легко допустить ошибку или перепутать обозначения.

Не следует приносить на экзамен книги, справочники, таблицы, и т. п., поскольку использовать эти материалы для выполнения письменной работы не разрешено.

При выполнении экзаменационной работы полезно учесть несколько психологических советов.

Целесообразно сначала решать ту задачу, которая кажется более простой, довести её решение до конца, переписать его начисто, а уже после этого приниматься за решение следующей задачи. Не нужно решать одну и ту же задачу несколько часов подряд, если она не получается, — в результате может не хватить времени на остальные задачи. Лучше отложить эту задачу и заняться другими, а потом, сделав их, вернуться к ней снова. Это позволит более рационально использовать предоставляемое для экзамена время. Многие экзаменационные задачи допускают несколько разных решений. Поступающий может дать любое правильное решение. Иногда встречаются экзаменационные задачи со сложными и длинными формулировками условий. Такого рода задач не нужно бояться — обычно их решение не так уж сложно, как кажется на первый взгляд. Необходимо только спокойно разобраться в условии и правильно понять его.

Не следует отчаиваться, если письменную работу удалось выполнить не особенно хорошо. Лучше, не теряя времени, приниматься за подготовку к другим вступительным экзаменам. Не нужно думать, что студентами становятся только те, кто решил все предложенные на письменном экзамене задачи, — зачисление производится в порядке конкурса по результатам *всех* приёмных экзаменов.

Желаем успеха!

9. Справочная информация

Кафедра высшей математики проводит подготовку абитуриентов к вступительному экзамену по математике. Организуются восьми, семи, пяти и трёхмесячные подготовительные курсы, занятия начинаются в октябре, ноябре, январе и марте соответственно. Занятия на подготовительных курсах проводятся по математике, физике и русскому языку по одному разу в неделю. Длительность одного занятия по математике и по физике составляет 4 академических часа, по русскому языку — 2 часа. Занятия проводятся в группах по 16 человек.

Дополнительную информацию можно узнать у старшего методиста курсов подготовки абитуриентов Мироновой Светланы Иннокентьевны по телефону: 459-07-29. Время работы — с понедельника по пятницу, с 10^{00} до 16^{00}. Адрес: Кронштадтский бульвар, дом 20, новый учебный корпус, комната 310-Г (подготовительные курсы). Проезд: метро Водный стадион, выход из первого вагона (из центра), далее три остановки на автобусе номер 65, 72 или 123.

В феврале в МГТУ ГА проводится окружной этап московской региональной олимпиады по математике для школьников 11 класса. Результаты олимпиады могут быть учтены при поступлении в МГТУ ГА. Более подробную информацию см. на сайте http://www.mstuca.ru/olimpiada/index.shtml.

В середине июля проводится вступительный экзамен по математике в МГТУ ГА. Все вопросы, связанные с поступлением в МГТУ ГА, можно узнать в приёмной комиссии по телефону: 458-75-47, в летнее время по телефону: 459-07-40.

Более полные сведения о вступительном экзамене по математике в МГТУ ГА содержатся в электронном „Пособии по математике для поступающих на дневное отделение московского государственного технического университета гражданской авиации“. В пособии приведены образцы вариантов заданий по математике, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГТУ ГА на дневное отделение с 1997 г. К части заданий приведены решения, к остальным заданиям даны указания и ответы. В пособии, также, приведена программа вступительного экзамена по математике, даны варианты заданий олимпиад и примерные задания собеседований для медалистов и для поступающих по договору. Пособие находится на сайте кафедры высшей математики, регулярно обновляется и дополняется и доступно для свободного копирования (размер $\approx 1,1$ Mb, формат pdf, просмотр в программе Adobe Acrobat).

Адрес кафедры высшей математики: улица Пулковская, дом 7/10, 5-й учебный корпус, этаж 2, комнаты 5-213 и 5-210. Телефон: 459-04-74. Электронный адрес: vm.mstuca.ru. Электронная почта: kafedravm@inbox.ru. Проезд: метро Водный стадион, выход из первого вагона (из центра), далее налево по Кронштадтскому бульвару (5 минут), затем налево по Авангардной улице (5 минут). Четырёхэтажное белое здание с левой стороны (на пересечении улиц Авангардная и Пулковская), вход с торца. Или одна остановка на автобусе номер 70.

Добро пожаловать в наш вуз!