ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики
В.А. Ухова, Е.А. Жукова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению практических заданий

для студентов I курса
специальности 25.05.03
очной формы обучения

Москва-2017

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. О.Г. Илларионова

Ухова В.А., Жукова Е.А.

Высшая математика. Пособие по выполнению практических заданий. - М.: МГТУ ГА, 2017. - 48 с.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Высшая математика» по учебному плану для студентов I курса специальности 25.05.03 очной формы обучения.

Пособие содержит варианты контрольных домашних заданий по темам: «Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Производная и её приложения», «Интеграл неопределённый и определённый», «Дифференциальные уравнения».

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 09.03.2017 г. и методического совета 03.04.2017 г.

Издаётся в авторской редакции.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская д.6.

П Е Р В Ы Й С Е М Е С Т Р

В первом семестре студент должен выполнить одно контрольное домашнее задание по темам «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Пределы, производная и её приложения».

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

Задания 7-10. Найти пределы функции.

Задания 11-15. Найти производную функции.

Задание 16. Найти y'', если $y = f(x)$.

Задание 17. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

Задание 18. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **функции** $z = f(x, y)$.

Вариант 1

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом:
$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ -2x + 4y - 8z = -2, \\ 5x - 3y + 7z = 6. \end{cases}$$

2) Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 1$. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

3) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1, 2, 3)$, $B(5, 1, 4)$ и $C(3, 2, 2)$.

4) При каком λ векторы $\overline{a} = (0, 1, \lambda)$, $\overline{b} = (1, 0, \lambda)$ и $\overline{c} = (1, 1, 2)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3, 2)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(2, 1)$ и $C(-5, -1)$.

6) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\overline{n} = (-1, 0, 2)$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2 - 1)x^4}{x + 1 - 6x^6}$; 8) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}} \dfrac{15x^2 - 2x - 1}{5x^2 - 4x - 1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 6x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x + 2}{2x + 1}\right)^x$; 11) $y = 2\sqrt{x} + \ln x$; 12) $y = \dfrac{3x^3 + 15x - 1}{x^2 - 1}$;

13) $y = e^x \cdot \arcsin x$; 14) $y = 3^{-x^4}$; 15) $y = \sqrt[5]{2 + x - x^2}$; 16) $y = \sin^2 x$;

17) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; 18) $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

Вариант 2

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{b} + 3\overline{c})$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 60^0$.

4) При каком λ векторы $\overline{a} = (\lambda, 3, 2)$, $\overline{b} = (2, -3, -4)$ и $\overline{c} = (-3, 12, 6)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(-1, 0)$ и $C(2, 3)$.

6) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(0, -2, 3)$ и $B(3, -2, 1)$.

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+4x-5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^{10}+5}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 3x}{\ln(1+x^2)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$; 11) $y = \dfrac{2x^2-1}{3x^3}$; 12) $y = \ln(x+\sqrt{x})$;

13) $y = \cos^2 28x$; 14) $y = e^{2x}\sqrt{1-x}$; 15) $y = \arccos\frac{1}{x}$; 16) $y = (2x+1)^{15}$;

17) $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$; 18) $z = x\arcsin(xy)$.

Вариант 3

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x + 2y + 4z = -4, \\ 5x + y + 2z = 7, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 10$. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

3) При каком α векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 5\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

4) При каком λ векторы $\overline{a} = (1, 3, \lambda)$, $\overline{b} = (4, 5, -1)$ и $\overline{c} = (2, -1, 5)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -2)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(-5, 4)$ и $C(0, 2)$.

6) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A(4, 5, 13) и B(-6, 0, 1).

7) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^3-3x^2-10x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+5}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 5x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$; 11) $y=x-\ln\sqrt{x}$; 12) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$;

13) $y=2^{\sin x}$; 14) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{x^3+12x}$; 15) $y=\cos 3x\cdot\sqrt[7]{x}$; 16) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;

17) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$; 18) $z=x^2\sin\dfrac{x}{y}$.

Вариант 4

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+y+2z=-1,\\ 4x+y+4z=-2,\\ 3x+4z=-5.\end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, $|\overline{c}|=8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})=(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})=60^0$.
Найти $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$.

3) Вычислить $\left|[\overline{a}\overline{b}]\right|$, если $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=15$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=30^0$.

4) При каком λ векторы $\overline{a}=(3\lambda, 1, 4)$, $\overline{b}=(3, 2\lambda, -6)$ и $\overline{c}=(3, 1, -2)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(1, 2)$ и $C(-1, -5)$.

6) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2, 1, -1)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}=(1, -2, 3)$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1+2x}{x+2x^3-10x^5}$; 9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-9}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-4x}$; 11) $y=3x^2\cdot\operatorname{tg}x$; 12) $y=\ln(7x-5)$;

13) $y=3^{\operatorname{ctg}x}$; 14) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2+x^4}$; 15) $y=\dfrac{4}{x^3}+\sqrt[5]{x^4}$; 16) $y=\sin\sqrt{x}$;

17) $y=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$; 18) $z=\dfrac{x}{x^2+2y^2}$.

Вариант 5

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $|\overline{c}| = 2$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(3\overline{a} + \overline{c})$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a} = (3, -2, -2)$ и $\overline{b} = (1, -2, -1)$.

4) При каком λ векторы $\overline{a} = (0, 1, \lambda)$, $\overline{b} = (1, 3, 4\lambda)$ и $\overline{c} = (1, 1, 2\lambda)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -2)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(0, 7)$ и $C(7, 0)$.

6) Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 0, 2)$ параллельно прямой:
$x = 2 + 2t, \quad y = 3 + 3t, \quad z = 7 - 4t.$

7) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 1}{x^3 + 2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{\cos 4x \cdot \sin 2x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 11) $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1 - 3x}}$; 12) $y = \operatorname{arctg} e^x$;

13) $y = 5x \cdot \ln(2x - 1)$; 14) $y = \cos^2 24x$; 15) $y = 2^{\sin 2x}$; 16) $y = \sqrt{x}(x - 1)$;

17) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$; 18) $z = \sqrt[3]{3xy + y^2}$.

Вариант 6

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + y - z = 2, \\ 5x + 3y - 2z = 5. \end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a} = (-4, 2, 4)$ и $\overline{b} = (6, 2, -3)$.

3) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$ и $C(4, 5, -2)$.

4) При каком λ векторы $\overline{a} = (\lambda, 2, -3)$, $\overline{b} = (1, -1, 4)$ и $\overline{c} = (1, -2, 3)$ будут компланарны ?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 6)$ и перпендикулярной к прямой, соединяющей точки $B(-1, 4)$ и $C(-2, 3)$.

6) Точка $P(0, -1, -2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2-x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{10}-11x+2}{(1+x)^{10}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{\operatorname{tg} 5x\cdot\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$; 11) $y=\dfrac{1+x^8}{12x^{11}}$; 12) $y=2\sqrt{e^x}$; 13) $y=(x+x^3)\cdot\operatorname{tg} x$;

14) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$; 15) $y=3\operatorname{arctg} 2x$; 16) $y=\log_2(2x-1)$; 17) $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$;

18) $z=e^{xy}(2x+y^2)$.

Вариант 7

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+y-z=-2,\\ 4x-3y+z=1,\\ 2x+y-z=1.\end{cases}$

2) Вычислить $(\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}-2\overline{c})$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$, $|\overline{c}|=4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})=(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})=90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\overline{a}-2\overline{b}$ и $2\overline{a}+3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=30^0$.

4) Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 3)$ и перпендикулярной к прямой, соединяющей точки $B(2, -1)$ и $C(-8, 2)$.

6) Точка $P(-2, 1, -2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из точки A(1,0,2) на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

7) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-6x+7x^3}{3-x^3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+1}$; 11) $y=\operatorname{ctg} 3^x$; 12) $y=\dfrac{x^2-6}{\sqrt{x}}$;

13) $y=e^{\sin x}$; 14) $y=3\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{x}$; 15) $y=\arcsin x\cdot\sqrt[7]{x}$; 16) $y=x\ln x$;

17) $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$; 18) $z=x\ln(3x^2+2y^2)$.

Вариант 8

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+3y+4z=7,\\ 2x+5y+2z=3,\\ 3x+2y-z=2.\end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (8, 6, 0) и $\overline{b}$ = (1, 0, 0).

3) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}$ и $3\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 5, $|\overline{b}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 45⁰.

4) Лежат ли точки A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1) и D(2, 1, 3) в одной плоскости?

5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-7, 1) перпендикулярно прямой, соединяющей точки B(0, -2) и C(7, 1).

6) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки A(2, 3, -1) и B(-1, 2, 3).

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4x^2+1}{5x^5+x-3x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ \cdot\ \sin\frac{x}{3}}{\cos x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{5}{x^2-2x}}$; 11) $y=\ln(3x-5)$; 12) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{1-x}}$; 13) $y=\sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{tg}\, 3x$;

14) $y=\arccos(-x^2)$; 15) $y=7x-\dfrac{2^x}{4}+5$; 16) $y=x^2e^x$; 17) $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$;

18) $z=(x^2-y^2)\cdot\cos(xy)$.

Вариант 9

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом:
$$\begin{cases} x+2y+z=1,\\ 2x+7y+9z=0,\\ x+3y+4z=1.\end{cases}$$

2) Дано $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c})$ = 60⁰. Найти $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\cdot(2\overline{a}-\overline{b})$.

3) Вычислить $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|$ = 12, $|\overline{b}|$ = 10, $|[\overline{a},\overline{b}]|$ = 72 и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – острый.

4) Лежат ли точки A(0, -1, 2), B(-2, 4, 1), C(5, 3, 7) и D(4, 0, 3) в одной плоскости?

5) Найти точку A, симметричную точке B(-2, 1) относительно прямой $3x+2y-1=0$.

6) Через точки A(0, -1, -2) и B(2, 1, 0) проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+4x}{1+15x-x^3}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{x}{2-x}}$; 11) $y=\frac{x^2+9}{6x^3}$; 12) $y=3\sqrt{x}\cdot\ln(1-x)$; 13) $y=\arcsin^2 3x$;

14) $y=e^{\operatorname{arctg} x}$; 15) $y=2^x-17\operatorname{tg}x+x^8$; 16) $y=(5-2x)^6$; 17) $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$;

18) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Вариант 10

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+2y+4z=-4, \\ 5x+y+2z=7, \\ 3x-y+z=3. \end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (4, 2, 4) и $\overline{b}$ = (3, 4, 0).

3) Найти $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|$ = 5, $|\overline{b}|$ = 6, $|[\overline{a},\overline{b}]|$ = 15 и угол $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ – острый.

4) Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(1, -2, -2), C(0, -2, -1) и D(2, -3, -2) в одной плоскости?

5) Найти точку A, симметричную точке B(1, 2) относительно прямой $3x+5y-4=0$.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(1, 2, 0) параллельно векторам $\overline{a}$ = (1, -1, 0) и $\overline{b}$ = (0, 4, -2).

7) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-7x+1}{4-2x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2\cdot\sin 3x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}$; 11) $y=\frac{4+3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}$; 12) $y=\operatorname{tg}x\cdot\ln(18-x)$; 13) $y=2^{-x^7}$;

14) $y=3-\frac{1}{x^4}+x^4$; 15) $y=\arccos\frac{1}{x^3}$; 16) $y=\cos^2 3x$; 17) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$;

18) $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$.

Вариант 11

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} 3x-5y+3z=-1, \\ x-2y+2z=1, \\ -4x+6y-3z=3. \end{cases}$

2) Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (2 α, α, 2) и $\overline{b}$ = (2, -3, -1) будут взаимно перпендикулярны.

3) Является ли четырехугольник с вершинами в точках A(2, -1, 3),

B(1, 2, -1), C(-4, 7, 5) и D(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

4) Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(-2, 1, -2), C(-1, 0, -2) и D(3, 2, 1) в одной плоскости?

5) Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины А, если координаты вершин известны: A(-2, 3), B(5, 7) и C(-3, -2).

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1, 2, -1) и B(0, 3, 2) параллельно вектору $\overline{a}$ = (3, 4, 7).

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-10x^7+2}{x^3-x-3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$; 11) $y=\dfrac{\cos 7x}{\operatorname{tg} x}$; 12) $y=\arccos\sqrt{x}$; 13) $y=2^{\operatorname{arctg} x}$;

14) $y=\ln(x+7x^6)$; 15) $y=\sqrt[5]{x^6}\cdot(x-2)$; 16) $y=\dfrac{1}{3^x}$; 17) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

18) $z=\ln(8x^2+3y)$.

Вариант 12

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом:

$$\begin{cases} x+9y-4z=9,\\ 2x+5y-3z=4,\\ 4x-3y+2z=9.\end{cases}$$

2) Вычислить $(2\overline{a}-5\overline{b})^2$, если $|\overline{a}|$ = 11, $|\overline{b}|$ = 2 и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ = 90^0.

3) Вычислить синус угла между векторами $\overline{a}$ = (2, 3, -1) и $\overline{b}$(1, 2, 3).

4) Лежат ли точки A(1, 1, 1), B(2, 0, 1), C(3, 1, -1) и D(4, -2, -2) в одной плоскости?

5) Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если координаты вершин известны: A(-1, 1), B(6, 5) и *C(-2, -4).*

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-4, 3, 2) и B(2, 1, -1) параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x}{(x^2-x+2)^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg} x}$; 11) $y=\sin^2 3x$; 12) $y=\ln\arccos x$; 13) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$;

14) $y=e^{\sqrt{x}}$; 15) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$; 16) $y=\operatorname{ctg} x$; 17) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$; 18) $z=\operatorname{arctg}(xy^2)$.

Вариант 13

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

2) Вычислить $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, $|\overline{c}|=8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})=(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})=60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=3\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{q}=2\overline{a}-3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=60^0$.

4) При каком значении х точки $M(x, 0, 0)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Определить острый угол между медианой и высотой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если $A(-3, 5)$, $B(4, 9)$ и $C(-4, 0)$.

6) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x-z-4=0$ и $x+y-2z+1=0$.

7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-6x^3-1}{2x^3-x+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; 11) $y=\dfrac{x^2-2}{24x^3}$; 12) $y=\cos^2 18x$; 13) $y=\dfrac{3+x}{2}\cdot\operatorname{tg}x$;

14) $y=5^{\sin x}$; 15) $y=\arcsin\sqrt{x}$; 16) $y=\ln(x^2-1)$; 17) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;

18) $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$.

Вариант 14

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+y-2z=-6, \\ 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$

2) Определить, при каком α векторы $\overline{a}=(1, 3\alpha, 2)$ и $\overline{b}=(2, 3\alpha, -3)$ будут взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}=(0, 1, 2)$ и $\overline{b}(2, 0, 1)$, образует тупой угол с осью OX и $|\overline{c}|=\sqrt{7}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$ и $C(1, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин: $A(5, 6)$, $B(-2, 2)$ и $C(-3, -3)$.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1, 0, 2) и B(3, 2, 5) параллельно оси OZ.

7) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{5x^3-x+3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\operatorname{tg}2x}{5x\cdot\sin 6x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{8x+1}$; 11) $y=\frac{x^6+8x^3+1}{x^2+3}$; 12) $y=5x\cdot\operatorname{tg}3x$; 13) $y=\cos\ln x$;

14) $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$; 15) $y=\frac{1}{e^x}$; 16) $y=\arccos 2x$; 17) $y=\frac{x^2+6x+3}{x+4}$;

18) $z=\ln(5x^2+4y^2)$.

Вариант 15

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x-2y+3z=6,\\ 2x+3y-4z=20,\\ 3x-2y-5z=6.\end{cases}$

2) Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=3$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=45^0$.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=(1,\alpha,1)$ и $\overline{b}=(2,1,0)$, равна $\sqrt{6}$.

4) При каком значении x точки $M(x,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(2,1,0)$ и $C(1,0,2)$ лежат в одной плоскости?

5) В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин треугольника: $A(6,4)$, $B(-1,0)$ и $C(-2,-5)$.

6) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x+4y-7z+8=0$ и $5x+2y-5z-2=0$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2-2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{\ln(1+\sin 3x)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x+3}{x-2}}$; 11) $y=\ln(1+e^x)$; 12) $y=\arccos\sqrt{x}$; 13) $y=5x^4\cdot\sin x^3$;

14) $y=5^{1-x}$; 15) $y=\frac{3x+2}{\operatorname{tg}x}$; 16) $y=\frac{1}{x^8}$; 17) $y=\frac{-8x}{x^2+4}$; 18) $z=y\ln(x^2-y^2)$.

Вариант 16

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} 2x-8y+5z=5,\\ 2x+5y-3z=4,\\ 5x+6y-2z=18.\end{cases}$

2) Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = $(2\alpha, 4\alpha, 1)$ и $\overline{b}(2, 4, 2)$ будут взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (1, -2, 3) и $\overline{b}(2, 1, 1)$, образует острый угол с осью OZ и $|\overline{c}|$ = 2.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(2, 1, 1)$, $B(2, 2, 0)$ и $C(2, 0, 2)$ будут лежать в одной плоскости?

5) В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин треугольника: $A(4, 8)$, $B(-3, 4)$ и $C(-4, 1)$.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5, 3, 1)$ и $B(1, 1, 2)$ параллельно оси OZ.

7) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-100x^{10}}{3x^{10}+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{tg}5x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^x$; 11) $y=\frac{x^6+8x^3+12}{\sqrt{8-x}}$; 12) $y=\ln^2(x-6x^2)$;

13) $y=\sqrt[4]{x^3}\cdot\arcsin x$; 14) $y=2^{-x}$; 15) $y=\operatorname{arcctg}4x$; 16) $y=\sin^2 2x$;

17) $y=\frac{1}{x^2-1}$; 18) $z=\arccos\frac{x}{\sqrt{y}}$.

Вариант 17

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом:
$$\begin{cases} x+2y+z=4,\\ x-12y+4z=-7,\\ 3x-5y+3z=1.\end{cases}$$

2) Найти угол между единичными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если векторы $\overline{p}=2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-3\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (3, 0, 1) и $\overline{b}$ = $(\alpha, 2, 2)$, равна $\sqrt{76}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, A(2, 2, 2), B(3, 0, 3) и $C(0, 4, 2)$ будут лежать в одной плоскости?

5) В треугольнике ABC известны координаты вершин: $A(-5, -2)$, $B(-4, 3)$ и $C(3, 7)$. Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку $A(2, -1, 6)$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}\cdot x}{2x^3-12x+5}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x-x^2)}{\operatorname{arctg}x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1+x}{x}}$; 11) $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{7x+5}$; 12) $y=\operatorname{arctg}(3x+x^2)$;

13) $y = \ln(1-4x)$; 14) $y = \sqrt[5]{x^7}\sin 6x$; 15) $y = (x^8-1)^4$; 16) $y = e^{-x}$;
17) $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$; 18) $z = \frac{4x}{x^3 - y^3}$.

Вариант 18

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 2x-4y+z=-4, \\ 4x-3y+z=1. \end{cases}$

2) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (-2, -2, 1), образует острый угол с осью $OУ$ и $|\overline{c}|$ = 27.
3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он образует острый угол с осью ОX, перпендикулярен векторам $\overline{a}$ = (0, 0, 1) и $\overline{b}$ = (8, -15, 3) и $|\overline{c}|$ = 51.
4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 0)$ и $C(2, 0, 3)$ лежат в одной плоскости ?
5) В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-4, -4), B(-3,1), и C(4, 5). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.
6) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось $OУ$ и точку A(-1, 3, -3).

7) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+3}{x-x^2+5x^3}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{tg}^2\,(2x-1)}{(2x-1)^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-x-6}$;11) $y = 5^{\mathrm{arctg}\,x}$;12) $y = e^{-x^3}$;13) $y = \frac{\cos 2x}{\mathrm{ctg}\,x}$;14) $y = \sin^2\frac{x}{3}$;

15) $y = x\cdot\sqrt{x^2-1}$; 16) $y = x^2(15+x)$; 17) $y = \frac{3x-2}{x^3}$; 18) $z = 12\cos^2\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)$.

Вариант 19

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} 2x+y+z=3, \\ 2x+2y+z=0, \\ 3x+3y+z=-2. \end{cases}$

2) Доказать, что векторы $\overline{a} = 3\overline{i}+4\overline{j}+7\overline{k}$ и $\overline{b} = 2\overline{i}-5\overline{j}+2\overline{k}$ взаимно перпендикулярны.
3) В треугольнике с вершинами A(2, -1, 6), B(3, 0, 5) и C(5, 2, 6) найти длину высоты AM.
4) Можно ли векторы $\overline{a}$ = (1, 0, 2), $\overline{b}$ = (-1, 1, 0) и $\overline{c}$ = (1, -1, 2) взять за базисные в трехмерном пространстве?
5) В треугольник ABC известны координаты вершин: A(-6, 0), B(-5, 5) и C(2, 9). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол

между этой высотой и стороной BC.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку $A(1, 4, 3)$.

7) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+2x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x+3}{2x^3+3x+4}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3^x-1}$; 11) $y=\dfrac{3x-7}{2x^4-1}$; 12) $y=(1-x+5x^2)^{20}$; 13) $y=5x^3\cdot\operatorname{tg}x$;

14) $y=\sin 8x$; 15) $y=\arccos(\sqrt{x}+1)$; 16) $y=xe^x$; 17) $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$;

18) $z=(2x+y)\,e^{xy^2}$.

Вариант 20

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом:
$$\begin{cases} x-5y-z=-14,\\ x-2y+3z=6,\\ 2x+3y-4z=20.\end{cases}$$

2) Найти вектор $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (2, 1, -1) и $(\overline{c}\overline{a})$ = 3.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (2, -1, 2) и $\overline{b}$ = (1, α, -1), равна $3\sqrt{2}$.

4) Можно ли векторы $\overline{a}$(-1, 1, 0), $\overline{b}$(1, -1, 1) и $\overline{c}$(0, 2, 1) взять за базисные в трехмерном пространстве?

5) В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-3, 5), B(4, 9) и C(-4, 0). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку A(-1, 0, -3).

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{2x^2-3x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x}{1-x-x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{x-3}{x}}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$;

11) $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{1-x^4}}$; 12) $y=e^{-3x}$; 13) $y=(2x^3-1)\cdot x^4$; 14) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

15) $y=\ln\operatorname{ctg}x$; 16) $y=\arcsin x$; 17) $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$; 18) $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

Вариант 21

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом:
$$\begin{cases} 2x+y-z=3,\\ 2x-3y=-1,\\ x+y-z=5.\end{cases}$$

2) Найти длину вектора $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ = $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})$ = 90^0 и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})$ = 60^0.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он составляет тупой угол с осью OY, перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (4, -2, -3) и $\overline{b}$ = (0, 1, 3) и $|\overline{c}|$ = 26.

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1) и D(4, 1, 3).

5) В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(2, -5), B(1, -3), C(4, 1). Найти угол BAC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1, 4, 1), B(2, 3, -1) и C(0, -1, 0).

7) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{15x^2-2x-1}{3x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{11}-x^5+x}{100x^3+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x\cdot\sin 5x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^2}{x^2}\right)^{3x^2}$; 11) $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{x^3-1}}$; 12) $y=\arccos\sqrt{x}$; 13) $y=3x^2\cdot\ln x$;

14) $y=2^{-x}+\dfrac{1}{x}$; 15) $y=\operatorname{tg}^3 8x$; 16) $y=\log_2(3x)$; 17) $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$;

18) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y}$.

Вариант 22

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом:
$$\begin{cases}4x+2y-3z=-1,\\ x+y-z=1,\\ 8x+3y-6z=2.\end{cases}$$

2) Найти длину вектора $\overline{p}=\overline{b}-\overline{a}+\overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = $(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})$ = 90⁰, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})$ = 60⁰.

3) При каких α и β вектор $\overline{c}=\alpha\overline{i}+3\overline{j}+\beta\overline{k}$, будет коллинеарен вектору $[\overline{a},\overline{b}]$, если $\overline{a}$ = (3, -1, 1) и $\overline{b}$ = (1, 2, 0)?

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A(1, 2, 3), B(6, 0, 0), C(1, 4, 9) и D(1, 8, 3).

5) В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-4, -4), B(-3, 1) и C(4, 5). Найти угол ABC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1, 0, 1) и B(2, 3, 4) параллельно оси OZ.

7) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4-x^2-6}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-1}{2x^4-x^2+5}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}4x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{7x\cdot\sin 3x}$; 11) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x^3-1}$; 12) $y=\ln(1-x+x^4)$; 13) $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$;

14) $y = \sqrt[4]{1-x}\cdot\cos x$; 15) $y = 5^{\sin x}$; 16) $y = (7x-3x^2)^5$; 17) $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$;

18) $z = \sqrt{xy + y^2}$.

Вариант 23

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

2) Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$ и векторы $\overline{a} + 3\overline{b}$ и $7\overline{a} - 5\overline{b}$ перпендикулярны.

3) Найти модуль вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$, $(\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$.

4) Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(2, 1, 3)$, $B(4, -2, 0)$, $C(1, 3, -8)$ и $D(7, 5, 2)$.

5) В треугольнике ABC с вершинами $A(1, -3)$, $B(0, -1)$ и $C(3, 3)$ найти угол BAC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$ и $C(0, 3, 2)$.

7) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^2-25}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2-2x-1}{5x^3+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2-3x+2)\cos\pi x}$;

10) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-2)}}$; 11) $y = 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 16x$; 12) $y = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2+x-1}$; 13) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$;

14) $y = \cos 7x$; 15) $y = x^5\ln x$; 16) $y = 2^{x^2}$; 17) $y = \dfrac{x^3-32}{x^2}$;

18) $z = \sin^2(4x + y)$.

Вариант 24

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2) Вычислить длину вектора $\overline{p} + 2\,\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\,\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 120^0$.

3) Найти наименьший внутренний угол треугольника с вершинами в точках $A(-1, 3, 1)$, $B(0, 2, -3)$ и $C(3, -1, 0)$.

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, -2)$, $C(2, 0, 2)$ и $D(0, 2, 2)$.

5) В треугольнике ABC известны координаты двух вершин $A(2, -2)$ $B(3, -1)$ и точка пересечения медиан $E(1, 0)$. Составить уравнение

высоты треугольника, проведенной из вершины С.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0, -1, 0)$, $B(2, 1, -2)$, и $C(1, 4, 1)$.

7) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{3x-6x^2-2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi-5x)}{e^{2x}-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$; 11) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{2x^2+5}$; 12) $y=7x\arcsin x$; 13) $y=2x-\dfrac{1}{x}+\sqrt[5]{x}$;

14) $y=e^{\operatorname{ctg}x}$; 15) $y=5^{12x^2}$; 16) $y=\operatorname{tg}5x$; 17) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 18) $z=\arcsin(x\sqrt{y})$.

Вариант 25

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases}5x-y-z=0,\\ x+2y+3z=14,\\ 4x+3y+2z=16.\end{cases}$

2) Вычислить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=45^0$.

3) Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c. Вычислить $\overline{AB}\,\overline{AC}+\overline{BC}\,\overline{BA}+\overline{CA}\,\overline{CB}$.

4) Найти координаты вершины D тетраэдра, если известно, что она лежит на оси OX, объем тетраэдра равен 3, $A(5, 0, 3)$, $B(3, 3, -2)$ и $C(4, 2, 2)$.

5) В треугольнике ABC известны координаты двух вершин $A(3, -4)$, $B(4, -3)$ и точки пересечения медиан $E(2, -2)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0, 3, 2)$, $B(1, 0, -1)$ и $C(1, 5, -1)$.

7) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{8-x^3}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-1}{6x^2-6x+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3x+1)}{\left(e^{5\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{5x-1}$; 11) $y=\dfrac{2x-1}{x^2+5}$; 12) $y=3^{x^2}\cdot\cos x$; 13) $y=\sqrt{5x-4-x^2}$;

14) $y=\ln 2\operatorname{tg}x$; 15) $y=e^{x^3}$; 16) $y=\operatorname{arcctg}(-x)$; 17) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$;

18) $z=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^2$.

Вариант 26

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases}3x+4y+2z=8,\\ 2x-y-3z=-4,\\ x+5y+z=0.\end{cases}$

2) Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (5α, α, 2) и $\overline{b}$ = (2, -6, -1) будут взаимно перпендикулярны.

3) Является ли четырехугольник с вершинами в точках A(2, -1, 3), B(1, 2, -1), C(-4, 7, 5) и D(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

4) Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(-2, 1, 3), C(-1, 0, -2) и D(3, 2, 1) в одной плоскости?

5) Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если координаты вершин известны: A(-2, 3), B(5, 7) и C(-3, -2).

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1, 2, -1) и B(0, 3, 2) параллельно вектору $\overline{a}$ = (1, 0, 5).

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-10x^3+2}{x^3-x-3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$; 11) $y=\dfrac{\cos 5x}{\operatorname{tg} x}$; 12) $y=\arccos\sqrt{x}$; 13) $y=7^{\operatorname{arctg} x}$;

14) $y=\ln(x+3x^5)$; 15) $y=\sqrt[3]{x^5}\cdot(x-2)$; 16) $y=\dfrac{1}{3^x}$; 17) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

18) $z=x^2e^{x^2-y^2}$.

Вариант 27

1) Решить систему линейных уравнений а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x+2y+z=8,\\ 4x+3y-2z=4,\\ 7x+5y-z=14. \end{cases}$

2) Вычислить $(3\overline{a}-4\overline{b})^2$, если $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=60^0$.

3) Вычислить синус угла между векторами $\overline{a}$ = (2, -3, 1) и $\overline{b}$(1, 2, 3).

4) Лежат ли точки A(1, 1, 1), B(2, 0, 1), C(3, 1, -1) и D(4, -2, -2) в одной плоскости?

5) Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если координаты вершин известны: A(-1, 1), B(6, 5) и C(-2, -4).

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3, 2, 3) и B(2, 1, -1) параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-6x+8}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x}{(x^2-x+2)^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; 11) $y=\sin^2 3x$; 12) $y=\ln\arccos x$; 13) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$;

14) $y = e^{\sqrt{x}}$; 15) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$; 16) $y = \operatorname{ctg} x$; 17) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$;

18) $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Вариант 28

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x - 4y - 2z = -3, \\ 3x + y + z = 5, \\ 3x - 5y - 6z = -9. \end{cases}$

2) Вычислить $(\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (3\overline{b} + \overline{c})$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 6$, $|\overline{c}| = 4$,
$(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах
$\overline{p} = 5\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Определить острый угол между медианой и высотой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если координаты вершин известны:
$A(-3, 5)$, $B(4, 9)$ и $C(-4, 0)$.

6) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x - z - 4 = 0$ и
$x + y - 2z + 1 = 0$.

7) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{-x + x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{7x - 6x^3 + 1}{2x^3 - x + 1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1} (3 - 2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x}$; 11) $y = \frac{x^2-2}{24x^3}$; 12) $y = \cos^2 18x$; 13) $y = \frac{3+x}{2} \cdot \operatorname{tg} x$;

14) $y = 5^{\sin x}$; 15) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 16) $y = \ln(x^2 - 1)$; 17) $y = \frac{3-x^2}{x+2}$;

18) $z = \operatorname{arctg}\frac{y^2}{x}$.

Вариант 29

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2) Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$, $(\overline{a} - \overline{b})^2 + (\overline{a} + 2\overline{b})^2 = 20$.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам
$\overline{a} = (0, 1, 2)$ и $\overline{b}(2, 0, 1)$, образует тупой угол с осью OX и $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$ и $C(1, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин: $A(5, 6)$, B(-2, 2) и C(-3, -3).

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1, 0, 2) и B(3, 2, 5) параллельно оси OZ.

7) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{5x^3-x+3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\ \mathrm{tg}\,2x}{5x\cdot\sin 6x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{8x+1}$; 11) $y=\frac{x^6+8x^3+1}{x^2+3}$; 12) $y=5x\cdot\mathrm{tg}\,3x$; 13) $y=\cos\ln x$;

14) $y=\mathrm{ctg}\sqrt{x}$; 15) $y=\frac{1}{e^x}$; 16) $y=\arccos 2x$; 17) $y=\frac{x^2+6x+3}{x+4}$;

18) $z=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

Вариант 30

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x-4y-2z=-5,\\ 3x+y+z=5,\\ -3x+5y+6z=8.\end{cases}$

2) Определить, при каких α векторы $\overline{a}$ = (α -4, α, 4) и $\overline{b}$ = (α, -1, 1) будут взаимно перпендикулярны.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (1, α, 1) и $\overline{b}$ = (2, 1, 0), равна $\sqrt{6}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$ и $C(1, 0, 2)$ лежат в одной плоскости?

5) В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин треугольника: $A(6, 4)$, B(-1, 0) и C(-2, -5).

6) Составить параметрические и канонические уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x+4y-7z+8=0$ и $5x+2y-5z-2=0$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^2-(4+3x)}{x^2-2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^4+4x^2+3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{tg}\,x)}{\ln(1+\sin 3x)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x-3}{x-2}}$; 11) $y=\ln(1+e^x)$; 12) $y=\arccos\sqrt{x}$; 13) $y=5x^4\cdot\sin x^3$;

14) $y = 5^{1-x}$; 15) $y = \frac{3x+2}{\operatorname{tg} x}$; 16) $y = \frac{1}{x^8}$; 17) $y = \frac{-8x}{x^2+4}$; 18) $z = \frac{xy}{x-y}$.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 1-6, 17 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №1

Вариант 0

1) Решить систему линейных уравнений
а) методом Гаусса, б) матричным методом: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

2) Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2, 1, -2\}$ и удовлетворяющий условию $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = 27$.

3) Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\overline{b} = \{2, 0, 1\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $|\overline{x}| = \sqrt{6}$.

4) Определить, лежат ли точки A(1, 2, 3); B(0, 5, 5); C(3, -1, -1); D(-2, 14, 9) в одной плоскости.

5) В треугольнике ABC известны координаты вершины A(4, 0) и уравнения высоты BE: $2x - 3y + 15 = 0$ и медианы BD: $2x + 3y - 3 = 0$. Составить уравнения сторон треугольника.

6) Найти длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если D(1, 6, 3), A(4, 5, 2), B(-1, 11, 6) и C(2, -1, 3).

7) Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить её график:

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}.$$

РЕШЕНИЯ

1) а) Решение системы методом Гаусса.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ из коэффициентов при неизвестных называется основной матрицей системы. Рассмотрим матрицу C – расширенную матрицу системы. С помощью элементарных преобразований строк приведём матрицу C к треугольному виду. Для этого умножаем первую строку на (–2) и прибавляем ко второй, затем умножаем первую строку на (–1) и прибавляем к третьей:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Далее меняем местами вторую и третью строки, умножаем вторую строку на 5 и прибавляем к третьей:

$$C\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -7 & -9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -4\end{array}\right).$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} C = 3$, значит, система совместна и имеет единственное решение. Последняя матрица есть матрица системы, равносильной данной системе:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5,\\ \quad\quad y + z = 1,\\ \quad\quad -2z = -4,\end{cases}$$

откуда $z = 2,\ y = -1,\ x = 1$.

Ответ: $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$.

<u>б) Решение системы матричным методом.</u>

Данную систему уравнений можно записать в матричном виде

$$A\cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}5\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$.

Если главный определитель системы $\det A$ отличен от нуля, то решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}\cdot B$. Найдём A^{-1}.

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot(-4+3) - 2\cdot(8+1) + 3\cdot(6+1) = 2 \neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix} = -1,\quad A_{12} = -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -9,\quad A_{13} = \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 7,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 1,\quad A_{22} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 1,\quad A_{23} = -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -1,$

$A_{31} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix} = 1,\quad A_{32} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 7,\quad A_{33} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -5.$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -9 & 1 & 7\\ 7 & -1 & -5\end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -9 & 1 & 7\\ 7 & -1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 6\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5+1+6\\ -45+1+42\\ 35-1-30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$.

<u>2) Решение.</u>

В силу коллинеарности вектор $\overline{x}$ можно представить в виде $\overline{x} = \lambda\overline{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия $(\overline{x}\cdot\overline{a}) = \lambda\overline{a}^2 = \lambda(4+1+4) = 9\lambda = 27$. Отсюда $\lambda = 3$ и $\overline{x} = 3\overline{a} = \{6,3,-6\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{6,3,-6\}$

3) Решение. $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$, следовательно,

$$\overline{c} = [\,\overline{a},\overline{b}\,] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$$

Поскольку вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то он коллинеарен вектору $\overline{c}$. Следовательно, $\overline{x} = \lambda\cdot\overline{c} = \{\lambda,\lambda,-2\lambda\}$.

Так как $|\overline{x}| = \sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2} = \sqrt{6}\,|\lambda| = \sqrt{6}$, то $\lambda = \pm1$. Вектор $\overline{x}$ образует тупой угол с осью OX, поэтому его проекция (координата) на эту ось должна быть отрицательной, отсюда $\lambda = -1$ и $\overline{x} = -\overline{c} = \{-1,-1,2\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{-1,-1,2\}$.

4) Решение.

Рассмотрим три вектора $\overline{AB} = \{-1,3,2\}$, $\overline{AC} = \{2,-3,-4\}$ и $\overline{AD} = \{-3,12,\ 6\}$. если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ компланарны. Для проверки составляем смешанное произведение этих векторов:

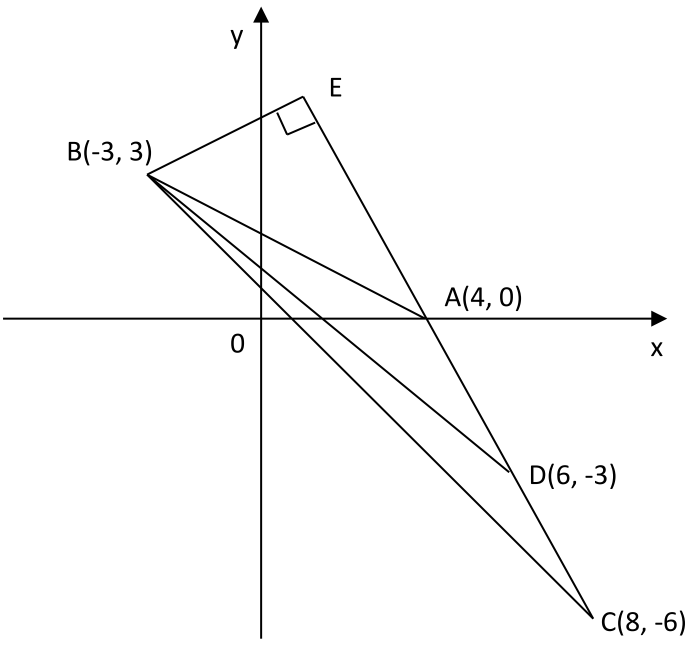
$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18+36+43-18-36-48 = 0,$$

следовательно, векторы компланарны и точки лежат в одной плоскости.

5) Решение.

Сделаем чертёж. Находим координаты вершины B как точки пересечения BD и высоты BE:

$$\begin{cases} 2x-3y+15=0 \\ 2x+3y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$$



Составим уравнение AC, для чего определим её угловой коэффициент из условия перпендикулярности AC и BE:

$$K_{BE} = \frac{2}{3};\ K_{AC} = \frac{-1}{K_{BE}} = -\frac{3}{2}.$$

Зная угловой коэффициент и одну точку, находим уравнение AC:

$$y = -\frac{3}{2}(x-4) \text{ или } 2y + 3x - 12 = 0.$$

Находим координаты D как точки пересечения медианы BD и стороны AC:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

Находим координаты вершины C, используя то, что D делит отрезок AC пополам, $C(8, -6)$. Зная координаты всех вершин треугольника, составляем уравнения сторон AB и BC как прямых, проходящих через заданные точки.

$$AC:\ \frac{y-3}{0-3} = \frac{x+3}{4+3} \qquad\qquad 3x + 7y - 12 = 0$$

или

$$BC:\ \frac{y-3}{-6-3} = \frac{x+3}{8+3} \qquad\qquad 11y + 9x - 6 = 0.$$

Ответ: AC: $3x + 7y - 12 = 0$; BC: $11y + 9x - 6 = 0$.

6) Решение.

Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение этой плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -1-4 & 11-5 & -6-2 \\ 2-4 & -1-5 & 3-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y-5) \cdot \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-42(x-4) + 21(y-5) + 42(z-2) = 0 \Rightarrow 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

Находим теперь расстояние от D до плоскости ABC:

$$h = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: h = 3.

7) Провести полное исследование функции и построить её график:

$$y = \frac{x^2-x-6}{x-2}.$$

<u>Решение.</u>

1. Функция определена всюду, кроме точки $x = 2$, так как знаменатель дроби не должен обращаться в нуль. Имеем область определения функции $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Функция общего вида.
3. Функция непрерывна на своей области определения. Исследуем функцию в точке $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2+0-2} = \frac{-4}{+0}\right\} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2-0-2} = \frac{-4}{-0}\right\} = +\infty.$$

   Эти пределы бесконечны, т.е. в точке $x = 2$ функция имеет разрыв второго рода.

4. Так как функция имеет в точке $x = 2$ бесконечный разрыв, то прямая $x = 2$ будет для графика этой функции вертикальной асимптотой. Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$, коэффициенты которого определяются по формулам

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-6}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1;$$

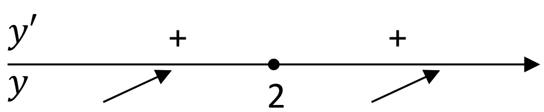
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x-6}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1.$$

   График имеет асимптоту $y = x + 1$.

5. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{(2x-1)(x-2)-\left(x^2-x-6\right)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}.$$

   Найдем критические точки. Производная не существует при $x = 2$. Выясним, при каких значениях x производная равна нулю. Решим уравнение $x^2 - 4x + 8 = 0$. Вычисляя дискриминант, получаем $D = 4^2 - 4 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$, поэтому корней у этого уравнения нет.

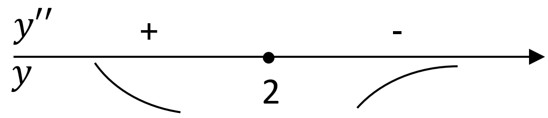


Производная всюду положительна, экстремумов у графика функции нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

6. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)\left(x^2-4x+8\right)}{(x-2)^4} = \frac{-8}{(x-2)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому функция не имеет точек перегиба.



При $x \in (-\infty; 2)$ выполнено неравенство $y'' > 0$, поэтому на интервале $(-\infty; 2)$ график функции является вогнутым. При $x \in (2; +\infty)$ выполняется неравенство $y'' < 0$, поэтому на интервале $(2; +\infty)$ график функции является выпуклым.

7. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Имеем $y(0) = \frac{0^2-0-6}{0-2} = 3$, поэтому с осью y функция пересекается в точке $(0; 3)$. Далее, $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, поэтому с осью x функция пересекается в точках $(-2; 0)$и $(3; 0)$.

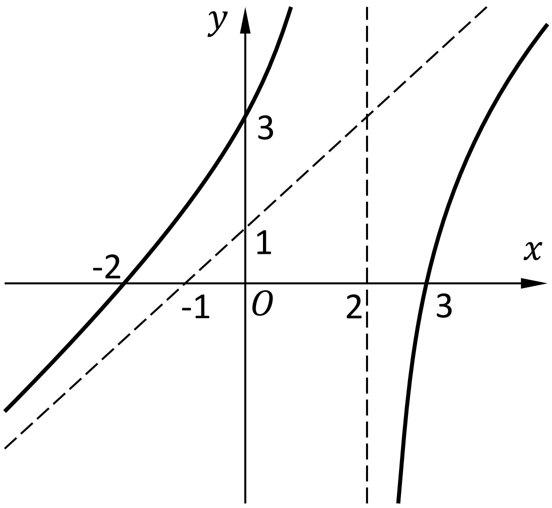


График функции $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$.

В Т О Р О Й С Е М Е С Т Р

Во втором семестре студент должен выполнить два контрольных домашних задания: КДЗ №2 по теме «Неопределённый и определённый интеграл» и КДЗ №3 по теме «Дифференциальные уравнения».

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

Задания 1-5 . Найти неопределённые интегралы.

Задания 6,7. Вычислить определённые интегралы.

Задания 8,9. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

Задание 10. Найти площадь области, ограниченной данными линиями.

Вариант 1

1) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int \left(2\sin 6x + \cos\frac{x}{4}\right)dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x+5}}$;

4) $\int \frac{e^{\arcsin x} + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 5) $\int (4-3x)\,e^{-3x}\,dx$; 6) $\int\limits_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$;

7) $\int\limits_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx$; 8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; 10) $y=(x-2)^2,\ y=x$.

Вариант 2

1) $\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int (6e^{-3x} + 3\cos 2x)\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{(1+2x)^3}$;

4) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$; 5) $\int (4x-1)\,e^{4x}\,dx$; 6) $\int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{16+x^4}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\cos 4x\cdot dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$; 9) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\cdot\ln x}$; 10) $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$.

Вариант 3

1) $\int\left(\frac{4}{5x}-\frac{2}{x^3}+4\sqrt[3]{x}\right)dx$; 2) $\int\left(6e^{2x}+\sin\frac{x}{2}\right)dx$; 3) $\int 2^{2x+1}\,dx$;

4) $\int\frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx$; 5) $\int(2+3x)e^{2x}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^5 x\cdot\sin 2x\cdot dx$; 7) $\int\limits_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$;

8) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$; 9) $\int\limits_0^1\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $y=0,\ y=x\cdot\sqrt{9-x^2}\quad(0\le x\le 3)$.

Вариант 4

1) $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x}\right)dx$; 2) $\int(12\cos 4x+e^{-x})\,dx$; 3) $\int\frac{dx}{(3+4x)^2}$;

4) $\int\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; 5) $\int(4x-2)\cos 2x\,dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{x+4}{\sqrt{4-x^2}}dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\sin 4x\cdot dx$;

8) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$; 9) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{x^4}$; 10) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1$.

Вариант 5

1) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}\right)dx$; 2) $\int\left(2\sin 6x+4e^{\frac{x}{2}}\right)dx$; 3) $\int 2^{1-5x}\,dx$;

4) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$; 5) $\int(4-16x)\sin 4x\,dx$; 6) $\int\limits_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/3}\cos^3 x\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^2\frac{dx}{x^2}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; 10) $y=\sin x\cdot\cos^2 x,\ y=0\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 6

1) $\int 2^x\cdot\left(5-\frac{2^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int(2\cos 3x+e^{-5x})\,dx$; 3) $\int\sin(4x-1)\,dx$;

4) $\int x\cdot e^{-5x^2}\,dx$; 5) $\int(5x-2)\cdot\cos 10x\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x}{e^x+3}dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$;

8) $\int\limits_1^2\frac{dx}{(x-1)^2}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$; 10) $y=\sqrt{x+4},\ x=0,\ y=0$.

Вариант 7

1) $\int\left(4\sqrt{x}-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}+1\right)dx$; 2) $\int\left(4\sin 4x-3e^{\frac{x}{3}}\right)dx$; 3) $\int 5^{4-3x}\,dx$;

4) $\int\dfrac{\arcsin^5 x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 5) $\int(1-6x)\,e^{2x}\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin^3 x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e \ln x\cdot dx$;

8) $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{(x-3)^3}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\cdot dx$; 10) $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0\ \left(0\le x\le 2\right)$.

Вариант 8

1) $\int\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$; 2) $\int\left(5e^{-2x}+\cos\dfrac{x}{2}\right)dx$; 3) $\int\sin(8x+3)\,dx$;

4) $\int\dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}dx$; 5) $\int(3x+2)\cos 3x\,dx$; 6) $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^3\dfrac{dx}{(x-2)^2}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^1\dfrac{1}{x^2+3}dx$; 10) $y=x^2-4x,\ \ y=x$.

Вариант 9

1) $\int\dfrac{7x+x^2-\sqrt{x}}{x^2}dx$; 2) $\int\left(4\cos 6x-2e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int(4+5x)^9\,dx$;

4) $\int\dfrac{x+\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$; 5) $\int(x-5)\cdot\sin 5x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$;

8) $\int\limits_0^4\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+5}$; 10) $y=\dfrac{1}{4}x^2,\ \ y=5-x^2$.

Вариант 10

1) $\int e^x\cdot\left(\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}}-8\right)dx$; 2) $\int\left(10\sin\dfrac{x}{2}+3e^{-3x}\right)dx$; 3) $\int\dfrac{3\,dx}{\sqrt{5-3x}}$; 4) $\int\dfrac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

5) $\int(2-4x)\cdot\sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{x\,(1+\ln x)^2}$; 7) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot dx$;

8) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-2x}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4x^2+1}$; 10) $y=-x^2+1,\ \ y=x-1$.

Вариант 11

1) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{5\sin^2 5x}+2e^{-8x}\right)dx$; 3) $\int 4^{3x-1}\cdot dx$; 4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$;

5) $\int (3-2x)\cos\frac{x}{2}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \cos 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 7) $\int\limits_{0}^{1} x\cdot e^{-2x}\cdot dx$; 8) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^4}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 10) $y=(x+1)^2,\ \ x=0,\ \ y=0$.

Вариант 12

1) $\int \frac{(2-x)^2}{x^3}dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{2\sin^2 2x}-4e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int \frac{4\,dx}{(2x-5)^5}$; 4) $\int \frac{(5+3\ln x)^4}{x}dx$;

5) $\int (4x-3)\cdot\cos 4x\cdot dx$; 6) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; 7) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \sin 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 8) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2}$;

9) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$; 10) $y=x^2-4x+3,\ \ y=3-x$.

Вариант 13

1) $\int \left(\frac{x^4}{2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+1\right)dx$; 2) $\int \left(2\sin 3x\cos 3x+e^{\frac{x}{10}}\right)dx$; 3) $\int (4x+1)^3\,dx$;

4) $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\cdot dx$; 5) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$; 7) $\int\limits_{1}^{e} x\cdot\ln x\ dx$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+4}$; 9) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x\cdot\ln x}dx$; 10) $y=\frac{6}{x},\ \ y=7-x$.

Вариант 14

1) $\int \frac{x^3\cdot\cos x-2x^2+7x}{x^3}dx$; 2) $\int \left(4\cos\frac{x}{3}-\frac{2}{e^x}\right)dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}}$;

4) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 3}} dx$; 5) $\int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^3 x} dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1) \cdot \sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot dx$;

8) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^4}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 17}$; 10) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

Вариант 15

1) $\int \frac{2x^3 - 4x^2 \sin x + 7}{x^2} dx$; 2) $\int \left(5 \sin \frac{2x}{5} + e^{-2x}\right) dx$; 3) $\int 2^{3-4x} dx$; 4) $\int \frac{x^3 dx}{4 + x^8}$;

5) $\int (4x+5) e^{\frac{x}{2}} dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{2x^2 + 1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/8} x \cdot \cos 4x \cdot dx$; 8) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$; 10) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

Вариант 16

1) $\int \left(3x^5 + \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}\right) dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{e^{2x}} + 2 \cos \frac{2x}{3}\right) dx$; 3) $\int \frac{dx}{8x + 6}$; 4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4 - x^4}}$

5) $\int (2 - x) e^{-x} dx$; 6) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \cdot (1 + \ln x)^2}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \cdot dx$; 8) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1 - x}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{3x^2 + 4}$;

10) $y = \sin x$, $y = x^2 - \pi x$.

Вариант 17

1) $\int \left(6x^5 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$; 2) $\int \left(e^{10x} - \frac{10}{\sin^2 10x}\right) dx$; 3) $\int \frac{dx}{(5x+1)^6}$;

4) $\int \frac{1 - 2 \sin x}{\cos^2 x} dx$; 5) $\int (5x + 6) \cdot \cos 2x \cdot dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx$.

8) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x - 2}}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2 + 1}$; 10) $y = x^2 - 3x$, $y = x$.

Вариант 18

1) $\int \frac{x - 2x^2 \cos x + 1}{x^2} dx$; 2) $\int \left(\cos \frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 3x}\right) dx$; 3) $\int \frac{dx}{(2x - 7)^3}$;

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$; 5) $\int (3x-2)\sin 6x \cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x \cdot \cos 3x \cdot dx$;

8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$; 10) $y=\frac{4}{x}$, $y=5-x$.

Вариант 19

1) $\int \left(5x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}\right)dx$; 2) $\int (2\sin 4x\cos 4x+6e^{5x})\,dx$; 3) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+x}}$;

4) $\int \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}dx$; 5) $\int (2x-3)\cos 4x \cdot dx$; 6) $\int\limits_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; 7) $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} \cdot dx$;

8) $\int\limits_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{16x^2+9}$; 10) $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$.

Вариант 20

1) $\int \frac{7x^2+5x\cdot 3^x-3}{x}dx$; 2) $\int (2\sin^2 3x+4e^{-4x})\,dx$; 3) $\int \sqrt[3]{1+5x}\,dx$;

4) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{x^4-9}}dx$; 5) $\int (4x+7)\sin\frac{x}{3}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e \ln x \cdot dx$;

8) 1) $\int\limits_0^1 \frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$; 10) $y^2=2x$, $x=8$.

Вариант 21

1) $\int \frac{3x^3+\sqrt{x}-2}{x}dx$; 2) $\int (2\cos^2 5x-e^{8x})\,dx$; 3) $\int \sqrt{5x-4}\,dx$; 4) $\int \frac{1-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int (2x-5)\cos\frac{x}{4}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx$; 7) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}$; 8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

9) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\cdot\ln x}$; 10) $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$.

Вариант 22

1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{3x}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{14}{\cos^2 7x}-e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int(1-8x)^8\,dx$;

4) $\int\frac{x^2+3x}{x^2-1}dx$; 5) $\int(8-3x)\cdot\sin 3x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{4-x^6}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi}x\cdot\cos^2 x\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; 10) $y=3-2x,\quad y=x^2$.

Вариант 23

1) $\int\frac{3x+2x^2\cdot\sin x-7}{x^2}dx$; 2) $\int\left(\frac{5}{\sin^2 10x}+8e^{-\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{5-3x}$;

4) $\int\frac{\sin x+\cos^2 x}{\cos^4 x}dx$; 5) $\int(x+5)\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; 7) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot dx$; 9) $\int\limits_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 10) $y=x^2,\quad y=\frac{x^2}{2},\quad x=3$.

Вариант 24

1) $\int\frac{x^6+3x^3\cdot 5^x-5}{x^3}dx$; 2) $\int\left(\sin\frac{x}{5}+9e^{3x}\right)dx$; 3) $\int\frac{5\,dx}{\sqrt{1-5x}}$; 4) $\int\frac{2+\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}dx$;

5) $\int(x-10)\sin 7x\,dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; 7) $\int\limits_{-3}^{-1}\frac{x-1}{x^2+6x+13}dx$; 8) $\int\limits_0^1\ln x\cdot dx$;

9) $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^3}$; 10) $y=\frac{x^2}{3},\quad y=4-\frac{2}{3}x^2$.

Вариант 25

1) $\int\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x^2}dx$; 2) $\int\left(\cos\frac{x}{6}-12\,e^{-3x}\right)dx$; 3) $\int(4x+2)^5\,dx$; 4) $\int\frac{x^2-4\ln^3 x}{x}dx$

5) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot dx$; 8) $\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{ctg} x\cdot dx$;

9) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$; 10) $y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \le x \le 2)$.

Вариант 26

1 $\int \left(\frac{1}{5\sin^2 5x} + 2e^{-8x} \right) dx$) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$; 2); 3) $\int 4^{3x-1} \cdot dx$; 4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2 - x}} dx$;

5) $\int (3 - 2x) \cos \frac{x}{2} dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/6} \cos 2x \cdot \sin 4x \cdot dx$; 7) $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-2x} \cdot dx$; 8) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$; 10) $y = (x+1)^2, \quad x = 0, \quad y = 0$.

Вариант 27

1) $\int \frac{(2 - x)^2}{x^3} dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{2\sin^2 2x} - 4e^{\frac{x}{4}} \right) dx$; 3) $\int \frac{4\,dx}{(2x - 5)^5}$; 4) $\int \frac{(5 + 3\ln x)^4}{x} dx$;

5) $\int (4x - 3) \cdot \cos 4x \cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x \cdot \sin 4x \cdot dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

9) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$; 10) $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 3 - x$.

Вариант 28

1) $\int \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx$; 2) $\int \left(2\sin 3x \cos 3x + e^{\frac{x}{10}} \right) dx$; 3) $\int (4x + 1)^3\, dx$;

4) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 5} \cdot dx$; 5) $\int e^{-3x} (2 - 9x)\, dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e x \cdot \ln x\, dx$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2 + 4}$; 9) $\int\limits_1^e \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$; 10) $y = \frac{6}{x}, \quad y = 7 - x$.

Вариант 29

1) $\int \frac{x^3 \cdot \cos x - 2x^2 + 7x}{x^3} dx$; 2) $\int \left(4\cos \frac{x}{3} - \frac{2}{e^x} \right) dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x + 3}}$;

4) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 x+3}}dx$; 5) $\int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^3 x}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot dx$;

8) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^4}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+8x+17}$; 10) $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$.

Вариант 30

1) $\int \frac{x^2 - 4x^3 \cos x + 1}{x^3}dx$;2) $\int \left(2\sin 5x \cdot \cos 5x + \frac{1}{e^{5x}}\right)dx$;3) $\int 2^{3-4x}\,dx$; 4) $\int \frac{x^3 dx}{4+x^8}$;

5) $\int (4x+5)e^{\frac{x}{2}}\,dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{2x^2+1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/8} x \cdot \cos 4x \cdot dx$; 8) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$; 10) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0$.

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3

Задания 1, 3, 4, 6. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

Задания 2, 5. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Вариант 1

1) $(x^2 \cdot y + 9y)\cdot dy + \sqrt{2+y^2}\cdot dx = 0$; 2) $x \cdot y' + y = x^5$; $y(1) = 0$;

3) $y'' = 24\sin 2x + 3x^2 + 1$; 4) $y'' + 25y = 50 \cdot e^{5x}$;

5) $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$; 6) $y''' + 36y' = 0$.

Вариант 2

1) $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\cdot y \cdot y' = 0$; 2) $y' - \frac{y}{x} = \ln x$; $y(1) = 0$;

3) $y'' = 6e^{2x} - x^2 + 7$; 4) $y'' + y' = 4x - 1$;

5) $y'' - 2y' = e^x(3x-1)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; 6) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Вариант 3

1) $y \cdot (1 + \ln y) + x \cdot y' = 0$; 2) $y' - y \cdot \cos x = \cos^2 x \cdot e^{\sin x}$, $y(0) = 0$;

3) $y'' = 2x^{-3} + 8e^{4x} + 5$; 4) $y'' + 4y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

5) $y'' - 6y' + 9y = 4x \cdot e^{x}$; 6) $y'''' - 9y'' = 0$.

Вариант 4

1) $\sqrt{1 - x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$; 2) $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2}$, $y(1) = 1$;

3) $y'' = \sqrt{x} - 15 - 3\sin 4x$; 4) $y'' + y = x^2 + 6$;

5) $y'' - 5y' - 6y = e^{x} \cdot (-10x - 3)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$;

6) $y''' + 5y'' - 14y' = 0$.

Вариант 5

1) $y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$; 2) $y' - 3x^2 \cdot y = x^2 \cdot e^{x^3}$; $y(0) = 0$;

3) $y'' = 3\cos 6x - \frac{5}{\cos^2 x} + 1$; 4) $y'' - 2y' + y = (2x + 5) \cdot e^{2x}$;

5) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$; 6) $y''' - 3y'' - 4y' = 0$.

Вариант 6

1) $\sqrt{5 + y^2} + y' \cdot y \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0$; 2) $y' - 4xy = 4x^3 \cdot e^{2x^2}$, $y(0) = 0$;

3) $y'' = 6x^5 - \frac{3}{e^{2x}} + \sin 7x$; 4) $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$;

5) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}$;

6) $y''' - 3y'' - 4y' = 0$.

Вариант 7

1) $\sqrt{4 - x^2} \cdot y' + x \cdot (y^2 + 1) = 0$; 2) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$;

3) $y'' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sin^2 x} + 4$; 4) $y'' - 4y' + 3y = -4x \cdot e^{x}$;

5) $y'' + 6y' + 9y = 25 \cdot e^{2x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$; 6) $y'''' - 81y = 0$.

Вариант 8

1) $y' \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$; 2) $y' + \frac{y}{2x} = x$; $y(1) = 0$;

3) $y'' = 15e^{3-2x} - \frac{1}{x^2} + 8x;$ 4) $y'' - y' - 2y = (1-2x)\cdot e^x;$

5) $y'' - 2y' + y = 16\cdot e^x;$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2;$ 6) $y''' - 9y'' + 8y' = 0.$

Вариант 9

1) $\sqrt{4+x^2}\cdot dx - 4y\cdot dy = x^2\cdot y\cdot dy;$ 2) $y' - \frac{y}{x} = x^2,$ $y(1) = 0;$

3) $y'' = 14\cos 7x - \sqrt[5]{x+4} + 6;$ 4) $y'' + 6y' + 13y = 75\cos 2x;$

5) $y'' + y = 4\cdot e^x;$ $y(0) = 4,$ $y'(0) = -3;$ 6) $y''' - 6y'' + 9y' = 0.$

Вариант 10

1) $x\cdot\sqrt{1+y^2} + y\cdot y'\cdot\sqrt{1+x^2} = 0;$ 2) $y' - \frac{y}{x} = x\sin x;$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$

3) $y'' = 6\cdot\sin 3x + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{\sin^2 x};$ 4) $y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2;$

5) $y'' + 81y = 162\cdot e^{9x};$ $y(0) = 0;$ $y'(0) = 9;$ 6) $y''' - 2y'' - 8y' = 0.$

Вариант 11

1) $y\cdot(1+\ln y) + x\cdot y' = 0;$ 2) $xy' + y = \ln x;$ $y(1) = 1;$

3) $y'' = 2\sin 4x + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{\cos^2 x};$ 4) $y'' + y' - 6y = 10e^{2x};$

5) $y'' + y = 1;$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$ $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$ 6) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

Вариант 12

1) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\cdot y' = 0;$ 2) $y' + \frac{y}{x} = 3x;$ $y(1) = 1;$

3) $y'' = 10e^{1-5x} + (x+3)^5 - 2;$ 4) $y'' + 3y' + 2y = (6x-1)\cdot e^x;$

5) $y'' + 9y = 18x + 9;$ $y(0) = 0;$ $y'(0) = 5;$ 6) $y''' + 2y'' - 24y' = 0.$

Вариант 13

1) $2x\cdot dx - y\cdot dy = y\cdot x^2\cdot dy - x\cdot y^2\cdot dx;$ 2) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3};$ $y(1) = 1;$

3) $y'' = 3\sqrt{x-8} - 4\cos 5x + \frac{2}{x^4};$ 4) $y'' + 2y' - 3y = 30\cdot\cos 3x;$

5) $y'' - 2y' = 2e^x;$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0;$ 6) $y''' + 4y'' + 4y' = 0.$

Вариант 14

1) $(1+e^x)\cdot y\cdot y' = e^x;$ 2) $y' + \frac{y}{x} = e^x;$ $y(1) = 0;$

3) $y'' = (2x+5)^6 - e^{-x} + 4;$ 4) $y'' - 3y' + 2y = -5e^x;$

5) $y'' - y = 2x \quad ; y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0\,;$ 6) $y''' + 3y'' - 4y' = 0.$

Вариант 15

1) $\sqrt{5+y^2} \cdot dx + 4(x^2 \cdot y + y) \cdot dy = 0;$ 2) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{3x^2}{1+x^2}$; $y(0) = 0;$

3) $y'' = \frac{5}{x^2} - 2\sqrt{x+4} - 7;$ 4) $y'' + y' - 2y = 9e^x;$

5) $y'' + y = 48\cos 5x + 72\sin 5x\,;\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0;$

6) $y''' - 9y'' + 8y' = 0.$

Вариант 16

1) $(e^{2x} + 2)dy + y \cdot e^{2x} \cdot dx = 0;$ 2) $y' + \frac{y}{x} = \sin x\,;\ \ y(\pi) = 1;$

3) $y'' = \sqrt[3]{x-5} - \frac{11}{\cos^2 x} + 3;$ 4) $y'' + y' = x;$

5) $y'' - 3y' + 2y = 24 \cdot e^{-2x};\ \ y(0) = -1;\ \ \ y'(0) = 4;$

6) $y''' + 4y'' - 5y' = 0\,.$

Вариант 17

1) $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx;$ 2) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x \cdot (x+1)$; $y(0) = 1;$

3) $y'' = \frac{1}{(2x-5)^2} + 9e^{3x-1};$ 4) $y'' + 3y' + 2y = 12x^2 + 8x;$

5) $y'' - 5y' + 4y = 3 \cdot e^{4x};\ \ y(0) = 0\,;\ \ y'(0) = 4;$

6) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

Вариант 18

1) $6xdx - 2ydy = 2yx^2 \cdot dy - 3xy^2 \cdot dx;$ 2) $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x\,;\ \ y(\pi) = 0;$

3) $y'' = 2\sin(5x-3) - 4x^3 + 13;$ 4) $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x};$

5) $y'' + y' = 16x + 10;\ \ y(0) = 0;\ y'(0) = 0;$ 6) $y''' + 8y'' + 15y' = 0.$

Вариант 19

1) $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0;$ 2) $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x\,;\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4};$

3) $y'' = 3\cos(7x-2) - 5e^{2x-7} + \sqrt{x};$ 4) $y'' - 3y' + 2y = -5 \cdot e^x;$

5) $y'' - 64y = 128 \cdot \cos 8x$; $y(0) = 0$; $y''(0) = 0$; 6) $y''' + y'' - 2y' = 0$.

Вариант 20

1) $6x \cdot dx - y \cdot dy = y \cdot x^2 \cdot dy - 3x \cdot y^2 \cdot dx$; 2) $y' - \frac{y}{x} = x^2$; $y(1) = 0$;

3) $y'' = (2x-1)^9 - \frac{1}{e^{3x}} + 11$; 4) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$;

5) $y'' + 3y' + 2y = 1 - 2x^2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; 6) $y''' + 6y'' + 5y' = 0$.

Вариант 21

1) $(2 - e^x) \cdot dy + 3e^x \cdot \operatorname{tg} y \cdot dx = 0$; 2) $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$;

3) $y'' = 3\sqrt{x-8} + \frac{7}{x^2} - 5\sin(2x-3)$; 4) $y'' + y = 16\cos 3x - 24\sin 3x$;

5) $y'' - y' = 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; 6) $y''' + 10y'' + 16y' = 0$.

Вариант 22

1) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$; 2) $y' - \frac{3y}{x} = x, y(1) = 6$;

3) $y'' = 5e^{-5x} - \frac{1}{x}$; 4) $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 6$;

5) $y'' + 6y' + 5y = 84\, e^{2x}, y(0) = -1, y'(0) = 1$; 6) $y''' + y' = 0$.

Вариант 23

1) $y' \sin x = y \ln y$; 2) $y' - \frac{3y}{x} = x$; $y(1) = 6$;

3) $y'' = 6x + 5e^{2-x} + \sqrt[3]{3x}$; 4) $y'' - 4y' + 4y = 8x^2$;

5) $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$; $y(0) = 1, y'(0) = 0$; 6) $y''' + 25y' = 0$.

Вариант 24

1) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; 2) $y' - y\cos x = \sin x \cdot e^{\sin x}$, $y(0) = 0$;

3) $y'' = 20\sin 2x + 3x^2 + 6$; 4) $xy'' + y' = 3x + 2$;

5) $y'' - 4y' + 3y = 10\cos x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$; 6) $y'''' - 16y = 0$.

Вариант 25

1) $y' \sin x - y\cos x = 0$; 2) $y' - 4xy = 2x \cdot e^{x^2}$; $y(0) = 1$;

3) $y'' = 12e^{6x-5} + \sqrt{x} + 7$; 4) $y'' - 9y = 5x\mathrm{e}^{2x}$;

5) $y'' + 4y' + 5y = 25x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; 6) $y'''' - 7y'' = 0$.

Вариант 26

1) $y(1+\ln^2 y) + x \cdot y' = 0;$ 2) $xy' + y = \ln x;\quad y(1) = 1;$

3) $y'' = 2\sin 4x + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{\sin^2 x};$ 4) $y'' + y' - 6y = 10e^{2x};$

5) $y'' + y = 1;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;\ \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$ 6) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

Вариант 27

1) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2} \cdot y' = 0;$ 2) $y' + \dfrac{y}{x} = 3x;\quad y(1) = 1;$

3) $y'' = 10e^{1-5x} + (x+3)^5 - 2;$ 4) $y'' + 3y' + 2y = (6x - 1) \cdot e^x;$

5) $y'' + 9y = 18x + 9;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 5;$ 6) $y''' + 2y'' - 24y' = 0.$

Вариант 28

1) $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx;$ 2) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3};\ \ y(1) = 1;$

3) $y'' = 3\sqrt{x - 8} - 4\cos 5x + \dfrac{2}{x^4};$ 4) $y'' + 2y' - 3y = 30 \cdot \cos 3x;$

5) $y'' - 2y' = 2e^x;\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0;$ 6) $y''' + 4y'' + 4y' = 0.$

Вариант 29

1) $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x;$ 2) $y' + \dfrac{y}{x} = e^x;\ \ y(1) = 0;$

3) $y'' = (2x + 5)^6 - e^{-x} + 4;$ 4) $y'' - 3y' + 2y = -5e^x;$

5) $y'' - y = 2x;\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0;$ 6) $y''' + 3y'' - 4y' = 0.$

Вариант 30

1) $\sqrt{5 + y^2} \cdot dx + 4(x^2 \cdot y + y) \cdot dy = 0;$ 2) $y' + \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{3x^2}{1+x^2};\ \ y(0) = 0;$

3) $y'' = \dfrac{5}{x^2} - 2\sqrt{x + 4} - 7;$ 4) $y'' + y' - 2y = 9e^x;$

5) $y'' + y = 48\cos 5x + 72\sin 5x;\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0;$

6) $y''' - 9y'' + 8y' = 0.$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 5 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №3

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y'' - 10y' + 21 = 50\sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 7$. Значит, общее решение однородного уравнения $y'' - 10y' + 21y = 0$ записывается в виде $Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi(x) = A\cos x + B\sin x$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Для их определения вычислим $\varphi'(x) = -A\sin x + B\cos x$, $\varphi''(x) = -A\cos x - B\sin x$ и подставим в исходное уравнение. Тогда получим

$$-A\cos x - B\sin x - 10(-A\sin x + B\cos x) + 21(A\cos x + B\sin x) = 50\sin x,$$

или

$$(20A - 10B)\cos x + (20B + 10A)\sin x = 0 \cdot \cos x + 50 \cdot \sin x$$

Это равенство должно выполняться для всех x, что возможно лишь при выполнении условий:

$\begin{cases} 20A - 10B = 0 \\ 20B + 10A = 50 \end{cases}$. Значит, $A = 1, B = 2$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x} + \cos x + 2\sin x$.

Для решения задачи Коши найдем производную $y' = 3C_1 e^{3x} + 7C_2 e^{7x} - \sin x + 2\cos x$. Подставив в начальные условия для y и y', получим систему $\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 + 1 \\ 13 = 3C_1 + 7C_2 + 2 \end{cases}$, откуда $C_1 = -1, C_2 = 2$.

Ответ: $y = -e^{3x} + 2e^{7x} + \cos x + 2\sin x$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Замечательные пределы и эквивалентности

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}} \frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}} \left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$$

Если при $x \to a$ $\varphi(x) \to 0$, то

$\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad e^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x)$,

$\operatorname{tg}\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad a^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x)\cdot\ln a$,

$1-\cos\varphi(x) \sim \frac{1}{2}\varphi(x)^2$, $\quad \ln(1+\varphi(x)) \sim \varphi(x)$,

$\arcsin\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad \log_a\left(1+\varphi(x)\right) \sim \frac{1}{\ln a}\varphi(x)$,

$\operatorname{arctg}\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad \left(1+\varphi(x)\right)^m - 1 \sim m\,\varphi(x)$.

Таблица производных

1. $(C)' = 0$
2. $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$;
4. $(e^u)' = e^u\cdot u'$;
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$;
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$;
7. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$;
8. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$;
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;
11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u\cdot u'$;
16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u\cdot u'$;
17. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\cdot u'$;

9. $(\mathrm{tg}\,u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;

18. $(\mathrm{cth}\,u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u}\cdot u'$;

Правила дифференцирования

$(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; $(cu)' = cu'$ (c – число).

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = \int 1\cdot dx = x + C$;

2) $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\cdot dx = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x \cdot dx = e^x + C$;

5) $\int a^x \cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

6) $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$;

7) $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot dx = \mathrm{tg}\, x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$;

10) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \arcsin x + C$;

11) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\cdot dx = \mathrm{arctg}\, x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\cdot dx = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;

13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;

14) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\cdot dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

15) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}}\cdot dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$;

16) $\int \sqrt{a^2-x^2}\cdot dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$;

17) $\int \sqrt{x^2+A}\cdot dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \dfrac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$;

18) $\int \operatorname{sh} x \cdot dx = \operatorname{ch} x + C$;

19) $\int \operatorname{ch} x \cdot dx = \operatorname{sh} x + C$;

20) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

21) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Правила интегрирования

$\int A \cdot f(x) \cdot dx = A \cdot \int f(x)\, dx$;

$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$.

Подведение функции под знак дифференциала

(a, c – постоянные)

$$d\,(f(x)) = f'(x) \cdot dx$$

1) $a \cdot dx = d(ax)$;

2) $dx = d(x+c)$;

3) $dx = \frac{1}{a} d(ax+c)$;

4) $x \cdot dx = \frac{1}{2} d(x^2)$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot d(\sqrt{x})$;

6) $\frac{1}{x^2} dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$;

7) $x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$;

8) $\frac{1}{x} \cdot dx = d(\ln x)$;

9) $e^x \cdot dx = d(e^x)$;

10) $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$;

11) $\sin x \cdot dx = -d(\cos x)$;

12) $\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x)$;

13) $\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d(\operatorname{ctg} x)$;

14) $\frac{1}{x^2+1} dx = d(\operatorname{arctg} x) = -d(\operatorname{arcctg} x)$;

15) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Основные методы интегрирования

1) Метод подстановки (или замены переменной)

Для нахождения интеграла $\int f(x)\cdot dx$ делаем замену $x=\varphi(t)$. Если существует обратная функция $t=g(x)$, то $dx=\varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt=F(t)+C=F(g(x))+C.$$

2) Формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du; \qquad \int_a^b u\,dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du;$$

Две полезные формулы

1) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$; 2) $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C$.

Некоторые формулы алгебры

Формулы сокращённого умножения

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;

Выделение полного квадрата

$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$, далее учесть, что $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Некоторые формулы тригонометрии

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};\quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$

$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x;\quad \operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x;$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;\quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x};$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$

$\sin x\ \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$

$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$

$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y));$

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;\quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) основная литература

1. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис-пресс, 2007 и более поздние издания.

2. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2005 – 2011.

б) учебно-методическая литература

3. Жулёва Л.Д., Самохин А.В. и др. Сб. задач по высшей математике ч. IV Интегралы. Дифференциальные уравнения. М.: РИО МГТУГА, 2005.

4. Жукова Е.А., Жулёва Л.Д. Неопределенный интеграл. Справочный материал и пособие к практическим занятиям и СРС. М.: РИО МГТУГА, 2012.

Содержание

Первый семестр

Второй семестр