ТЕОРИЯ РЯДОВ

Теория *рядов* является важнейшей составной частью математического анализа и находит как теоретические, так и многочисленные практические приложения. Различают ряды *числовые* и *функциональные*. Мы начнём с простейших, числовых рядов, а потом изучим два важнейших примера функциональных рядов — *степенные ряды* и *ряды Фурье*.

1. Числовые ряды

Пусть

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

числовая последовательность. Символ вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *числовым рядом*, а числа a_n — его членами. Выражения вида

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 + a_2, \quad A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$
$$A_n = a_1 + \cdots + a_n, \ldots$$

называются *частичными суммами* ряда (1).

Определение 1. Конечный или бесконечны предел

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

частичных сумм ряда (1) называется его *суммой*. Ряд называется *сходящимся*, если этот предел конечен, и *расходящимся* в противном случае (т.е. если предел частичных сумм бесконечен или не существует).

Важнейшей задачей теории рядов является исследование их сходимости.

Пример 1. Простейшим (и очень важным!) примером ряда является *бесконечная геометрическая прогрессия*

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

Её частичная сумма имеет вид

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

При этом справедливо следующее:

1) если $|q| < 1$, то ряд (2) сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$;
2) если $q \geqslant 1$, то ряд расходится и его сумма равна $\pm\infty$ в зависимости от знака a;
3) в остальных случаях ряд расходится и предела частичных сумм не существует.

Простейшие свойства рядов. Ряд вида

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{3}$$

называется *остатком* ряда (1) после m-го члена.

Предложение 1. *Если сходится ряд* (1), *то сходится и любой его остаток. Обратно, если сходится какой-либо остаток вида* (3), *то сходится и сам ряд.*

Предложение 2. *Пусть ряд* (1) *сходится и сумма остатка* (3) *есть* α_m. *Тогда* $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$.

Предложение 3. *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — *сходящийся ряд и* c — *постоянная. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *также сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — *другой сходящийся ряд, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, *причём*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Предложение 4 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.*

Положительные ряды. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *положительным*, если $a_n \geqslant 0$ для всех $n \geqslant 1$.

Теорема 1. *Положительный ряд всегда имеет сумму. Эта сумма конечна, если все частичные суммы ряда ограничены сверху, и равна бесконечности в противном случае.*

Пример 2. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots \tag{4}$$

конечна при $s > 1$ и бесконечна при $s \leqslant 1$. При $s = 1$ ряд (4) называется *гармоническим*.

Теоремы сравнения. Пусть заданы два положительных ряда

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{и} \qquad (B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Теорема 2. *Если начиная с некоторого* n *выполняется неравенство* $a_n \leqslant b_n$, *то из сходимости ряда* (B) *вытекает сходимость ряда* (A), *а из расходимости ряда* (A) — *расходимость ряда* (B).

Теорема 3. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = K, \qquad 0 \leqslant K \leqslant \infty,$$

то из сходимости ряда (B) *при* $K < \infty$ *следует сходимость ряда* (A), *а из расходимости ряда* (A) *при* $K > 0$ — *расходимость ряда* (B). *В частности, при* $0 < K > \infty$ *оба ряда сходятся или расходятся одновременно.*

Теорема 4. *Если начиная с некоторого* n *выполняется неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то из сходимости ряда (B) *вытекает сходимость ряда* (A), *а из расходимости ряда* (A) — *расходимость ряда* (B).

Теоремы сравнения позволяют устанавливать сходимость или расходимость достаточно сложных рядов.

Пример 3. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Имеем[1]

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} < \frac{1}{2^n},$$

и, значит, ряд сходится по теореме 2.

[1]Символ $(2n-1)!!$ обозначает произведение всех *нечётных чисел от единицы до* $2n-1$.

Пример 4. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n}, \qquad 0 < x < \pi.$$
Поскольку
$$\lim_{n\to\infty} \sin \tfrac{x}{n} : \tfrac{1}{n} = x,$$
этот ряд расходится в силу теоремы 3 и примера 2.

Важнейшие признаки сходимости. К этим признакам относятся признаки Коши и Даламбера, а также интегральный признак сходимости. Пусть по-прежнему
$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
— положительный ряд.

Теорема 5 (признак Коши). *Рассмотрим ряд* (A) *и предположим, что существует предел*
$$\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$
Тогда при $\mathcal{C} < 1$ ряд сходится, а при $\mathcal{C} > 1$ — расходится.

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Тогда
$$\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{n} = \tfrac{1}{\mathrm{e}} < 1.$$
Следовательно, этот ряд сходится.

Теорема 6 (признак Даламбера). *Рассмотрим ряд* (A) *и предположим, что существует предел*
$$\mathcal{D} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Тогда при $\mathcal{D} < 1$ ряд сходится, а при $\mathcal{D} > 1$ — расходится.

Пример 6. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$. Тогда
$$\mathcal{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{\mathrm{e}}.$$
Следовательно, ряд сходится при $x < \mathrm{e}$ и расходится при $x > \mathrm{e}$.

Теорема 7 (интегральный признак Коши–Маклорена). *Предположим, что существует такая функция $f(x)$, определённая на множестве $[1, +\infty)$, что $f(n) = a_n$ для всех натуральных n. Тогда ряд* (A) *сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Пример 7. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ сходится тогда и только тогда, когда $s > 1$, то и ряд сходится при тех же значениях s.

Произвольные числовые ряды. Теперь мы откажемся от условия положительности членов ряда и рассмотрим ряды произвольного вида. Для таких рядов справедлив следующий критерий сходимости:

Теорема 8. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что для всех $n > N$ и $m > 0$ выполняется неравенство*
$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

На практике, однако, этим критерием пользоваться, как правило, затруднительно.

Определение 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема 9 (Коши). *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Как мы увидим ниже, бывают ряды, которые сходятся, но не сходятся абсолютно.

Ещё одним частным случаем рядов являются знакопеременные ряды.

Определение 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакопеременным*, если $a_n a_{n+1} < 0$ для всех $n \geqslant 1$.

Теорема 10 (Лейбница). *Если члены знакопеременного ряда монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, то этот ряд сходится.*

Пример 8. По теореме Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится. Однако он не сходится абсолютно!

Свойства сходящихся рядов.

Теорема 11 (сочетательное свойство). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся ряд. Тогда любой ряд вида*

$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}}) + \dots$$

также сходится и имеет ту же сумму.

Таким образом, *сходящиеся* бесконечные суммы обладают тем же свойством ассоциативности, что и конечные. В случае расходящихся рядов это не так.

Пример 9. Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

расходится, однако ряд

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

сходится, и его сумма равна нулю.

Обратимся теперь к свойству *коммутативности* бесконечных сумм.

Теорема 12 (Дирихле). *Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный произвольной перестановкой его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.*

Абсолютная сходимость существенна в теореме Дирихле, и это показывает другая теорема.

Теорема 13 (Римана). *Пусть ряд сходится неабсолютно. Тогда для любого значения $-\infty \leqslant L \leqslant +\infty$ найдётся такая перестановка его членов, что сумма ряда будет равна L.*

Последний результат связан с *умножением* рядов. Рассмотрим два ряда

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{и} \qquad (B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и построим ряд (С) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1.$$

Теорема 14 (Коши). *Если ряды* (А) *и* (В) *сходятся абсолютно, то ряд* (С) *также сходится абсолютно и его сумма равна произведению сумм этих рядов.*

2. Общие сведения о функциональных рядах

Рассмотрим последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Символ вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \qquad (5)$$

называется *функциональным рядом*, а функции $f_n(x)$ — его членами. При каждом конкретном значении переменной x ряд (5) превращается в числовой, и этот ряд может сходиться или расходиться. Множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, при которых ряд сходится, называется *областью его сходимости*. На области сходимости определена функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — *сумма* функционального ряда.

Равномерная сходимость. Вообще говоря, сумма ряда, состоящего из «хороших» (например, непрерывных) функций, может оказаться «как угодно плохой». Это связано с тем, что в разных точках области сходимости ряд сходится к своей сумме по-разному. «Хорошие» функции получаются, когда ряд сходится равномерно.

Определение 4. Если ряд (5) сходится к функции $f(x)$ в области $\mathcal{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что для любого $n > N$ и *для любого* $x \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство

$$|f_1(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

то ряд называется *равномерно сходящимся* в области $\mathcal{X}$.

Теорема 15. *Для того чтобы ряд (5) сходился равномерно в области $\mathcal{X}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой не зависящий от x номер N, что при любом $m \geqslant 1$ неравенство*

$$|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

выполняется для всех $x \in \mathcal{X}$.

Теорема 16 (признак Вейерштрасса). *Если члены функционального ряда (5) удовлетворяют в области $\mathcal{X}$ неравенствам*

$$|f_n(x)| \leqslant c_n, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — сходящийся числовой ряд, то ряд (5) сходится равномерно в $\mathcal{X}$.

Свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 17. *Пусть функции $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ определены и непрерывны на отрезке $\mathcal{X} = [a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на этом отрезке. Тогда $f(x)$ также непрерывна на $\mathcal{X}$.*

Для *положительных* рядов верен и обратный результат.

Теорема 18. *Пусть члены ряда (5) непрерывны в области $\mathcal{X} = [a, b]$ и неотрицательны. Если этот ряд имеет сумму $f(x)$, также непрерывную на $\mathcal{X}$, то ряд сходится в рассматриваемой области равномерно.*

Теорема 19 (почленный переход к пределу). *Пусть функции $f_n(x)$ определены в области $\mathcal{X}$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = c_n$. Предположим, то ряд сходится в рассматриваемой области равномерно. Тогда*

1) *числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится;*
2) $\lim\limits_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$.

Теорема 20 (почленное интегрирование). *Если функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $\mathcal{X} = [a,b]$ и ряд* (5) *сходится на этом отрезке равномерно, то*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_a^b f_n(x)\,dx\Big).$$

Теорема 21 (почленное дифференцирование). *Пусть функции $f_n(x)$ определены на отрезке $\mathcal{X} = [a,b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные. Тогда, если ряд* (5) *сходится равномерно, а также равномерно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, то*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

3. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots,$$

где $a_1, \dots, a_n, \dots$ (*коэффициенты* ряда) и x_0 — действительные числа. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, и мы будем рассматривать степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{6}$$

Теорема 22. *Для каждого степенного ряда вида* (6) *существует такое R, $0 \leqslant R \leqslant \infty$, что*

1) *при $|x| < R$ ряд сходится абсолютно*;
2) *при $|x| > R$ ряд расходится.*

Интервал $(-R, R)$ называется *промежутком сходимости*, а R — *радиусом сходимости* степенного ряда.

На концах промежутка сходимости степенного ряда могут возникать разные ситуации.

Пример 10. Ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

сходится абсолютно в промежутке $(-\infty, +\infty)$, т.е. $R = \infty$.

Пример 11. Для ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$R = 1$, промежутком сходимости является $(-1, 1)$, на концах промежутка ряд расходится.

Пример 12. У ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$R = 1$, но он сходится и на обоих концах промежутка сходимости, однако сходимость в этих точках неабсолютная.

Пример 13. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

сходится в полуинтервале $[-1, 1)$; сходимость на левом конце неабсолютная.

Пример 14. Наконец, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

сходится на отрезке $[-1, 1]$, причём на обоих концах имеет место абсолютная сходимость.

Основные свойства степенных рядов. Из теорем 17–22 вытекают следующие важнейшие свойства степенных рядов:

1) Если R — радиус сходимости ряда (6), то этот ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r]$, где $0 < r < R$.
2) Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри его промежутка сходимости.
3) Если ряды
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
имеют одну и ту же сумму в некоторой окрестности точки $x = 0$, то они почленно совпадают, т.е. $a_n = b_n$ для всех n. Иными словами, разложение функции в степенной ряд единственно.
4) В любом промежутке $[0, r]$, $|r| < R$, степенной ряд можно почленно интегрировать:
$$\int_0^r \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$
5) Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать:
$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$
6) Из последнего свойства следует, что если степенной ряд сходится к функции $f(x)$, то эта функция имеет производные всех порядков, а коэффициенты этого ряда имеют вид
$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$
Иначе говоря, любой степенной ряд является *рядом Тейлора* той функции, к которой он сходится.

Ряды Тейлора. Итак, если функция $f(x)$ определена в окрестности нуля и сколько угодно раз дифференцируема в нуле, то её *рядом Тейлора* называется степенной ряд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \tag{7}$$

Разность

$$r_n(x) = f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{8}$$

называется *дополнительным членом* (порядка n).

Теорема 23. *Для того, чтобы ряд* (7) *сходился к функции* $f(x)$ *в точке* x, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{9}$$

Чтобы проверить выполнение условия (9) в предыдущей теореме, дополнительный член (8) обычно представляют в одной из двух удобных форм —

- *в форме Лагранжа*
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{10}$$

- и *в форме Коши*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(1-\theta)^n x^{n+1} \tag{11}$$

(здесь $0 \leqslant \theta \leqslant 1$).

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций. Имеют место следующие разложения

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \tag{12}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \tag{13}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \tag{14}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \tag{15}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \tag{16}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \tag{17}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \tag{18}$$

Эти формулы используются для приближённого вычисления значений указанных функций.

Замечание 1. Из разложения (15) получается *ряд Лейбница* для числа π:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \dots \tag{19}$$

Замечание 2. Для всех указанных функций справедлива теорема 23. Приведём пример, когда ряд Тейлора почти нигде не сходится к исходной функции. Для этого положим

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Можно показать, что эта функция имеет производные всех порядков в нуле и эти производные равны нулю. Таким образом, ряд Тейлора функции $f(x)$ нулевой и сходится к значению функции только в нуле.

4. Ряды Фурье

Теория рядов Фурье, или *гармонический анализ* имеет дело с *периодическими явлениями* и представлением их в виде суммы (*суперпозиции*) элементарных периодических функций (*гармоник*).

Напомним, что функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x). \tag{20}$$

Поведение периодической функции на всей прямой полностью определяется ей поведением на любом отрезке, длина которого кратна периоду. Поэтому любую функцию, удовлетворяющую условию (20), достаточно, например, рассматривать на отрезке $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Периодические функции возникают в школьной тригонометрии. Простейшие из них — $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен 2π, и, в силу сказанного выше, их достаточно рассматривать на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Заметим также, что если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f'(x) = f(\frac{Tx}{T'})$ является периодической с периодом T'. Поэтому простым преобразованием любую периодическую функцию можно привести к функции с периодом 2π и рассматривать её на отрезке $[-\pi, \pi]$, как и простейшие периодические функции.

Начнём с общих определений.

Определение 5. Система функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$$

называется *ортонормированной* на отрезке $[a, b]$, если выполняются равенства

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Предположим, что на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и нам удалось представить её в виде функционального ряда

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

Тогда из определения ортонормированной системы следует, что коэффициенты этого ряда имеют вид

$$c_n = \int_a^b \varphi_n(x) f(x)\,dx, \quad n = 0, 1, \dots \tag{21}$$

Определение 6. Функциональный ряд

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots,$$

коэффициенты которого заданы равенствами (21), называется *обобщённым рядом Фурье* функции $f(x)$, построенным по ортонормированной системе $\varphi_0, \varphi_1, \dots$

Классическая теория рядов Фурье имеет дело с конкретной ортонормированной системой функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 24. *Система функций*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots$$

является ортонормированной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Обобщённый ряд Фурье, построенный по этой системе называется просто *рядом Фурье* функции $f(x)$. Таким образом, этот ряд имеет вид

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

и его коэффициенты выражаются формулами

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \ n_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

где $n = 1, 2, \dots$ Числа a_n и b_n называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Основная задача теории рядов Фурье — выяснить, когда ряд Фурье сходится к порождающей его функции.

Теорема 25. *Если функция дифференцируема на отрезке* $[-\pi, \pi]$, *то её ряд Фурье сходится к значению функции в каждой точке этого отрезка.*

Замечание 3. Условие теоремы 25 можно ослабить. Именно, скажем, что функция *кусочно-дифференцируема* на отрезке, если она дифференцируема всюду, кроме конечного числа точек. Такая функция не обязательно непрерывна, и в каждой точке можно рассмотреть *правое* и *левое* значения

$$f(x+0)=\lim_{t\to 0+} f(t), \qquad f(x-0)=\lim_{t\to 0-} f(t).$$

Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой функции сходится к величине

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Частные случаи. Существуют два случая, когда разложение функции в ряд Фурье упрощается.

Предложение 5. *Если функция чётна, то её ряд Фурье имеет вид*

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

т.е. содержит только косинусы, а если она нечётна, то её ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

т.е. состоит из одних синусов.

Замечание 4. Если функция определена на отрезке $[0,\pi]$, то её можно продолжить до функции на отрезке $[-\pi,\pi]$, либо полагая

$$f(-x)=f(x), \qquad x>0,$$

и тогда получится чётная функция, либо можно положить

$$f(-x)=-f(x), \qquad x>0,$$

и получится нечётная функция. Значит, в силу теоремы 5, одну и ту же функцию, определённую на $[0,\pi]$, можно разложить в ряд Фурье как по косинусам, так и по синусам.

Примеры.

Пример 15. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

и разложим её в ряд Фурье на отрезке $[0,2\pi]$. Имеем

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,dx=0,\\
a_n&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0,\\
b_n&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad 0<x<2\pi. \tag{22}$$

Пример 16. Заменяя в предыдущем примере x на $2x$ и деля обе части полученного равенства пополам, мы придём к разложению

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{23}$$

Если теперь из равенства (22) вычесть равенство (23), мы получим

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{24}$$

В частности, при $x = \frac{\pi}{2}$ получается уже известный *ряд Лейбница*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Пример 17. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$$

и разложим её по косинусам на отрезке $[0, \pi]$. Вычисляя коэффициенты Фурье по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) \cos nx \, dx,$$

получаем

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

В частности, при $x = 0$ получается знаменитый *ряд Эйлера*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$