ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Понятие *дифференциального уравнения* — ключевое для приложений математики к различным областям естествознания и, в особенности, к физике и механике. Дифференциальные уравнения описывают движение тел в силовых полях (например, заряда в электромагнитном поле), динамику жидкостей и газов (например, атмосферы и океана, без чего не возможно предсказание погоды), распространение тепла и многое другое.

Мы рассмотрим ряд примеров, приводящих к дифференциальным уравнениям, кратко опишем общие свойства дифференциальных уравнений и научимся решать некоторые уравнения специального вида.

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Дифференциальные уравнения связывают между собой неизвестную функцию (или несколько таких функций) с её производными. С простейшими уравнениями такого типа мы уже фактически сталкивались.

Пример 1 (нахождение первообразной). Пусть $f(x)$ — функция на действительной прямой. Найти её первообразную означает найти такую функцию $y = F(x)$, что

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

Это — дифференциальное уравнение на неизвестную функцию y, и известно, что если в его правой части стои́т «хорошая» (например, непрерывная) функция, то его произвольное решение имеет вид

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx, \tag{2}$$

где x_0 — любая точка прямой.

Замечание 1. Следует задуматься, в каком смысле мы «решили» уравнение (1)? Для некоторых функций f формула (2) действительно даёт решение: например, если $f(x) = x$, то решением является произвольная функция вида $\frac{x^2}{2} + \mathrm{const}$. Если же, скажем, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, то интеграл, стоя́щий в правой части, можно понимать лишь как *обозначение* решения и формула (2) говорит лишь о *существовании* этого решения.

Пример 2 (поле скоростей). Пусть тело движется на плоскости и в каждой точке известна его скорость $v = (a(x, y), b(x, y))$. Как по этим данным восстановить траекторию тела? Пусть искомая траектория задаётся параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

где t — время. Поскольку скорость движения по кривой — это производные координат по параметру, мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y).$$

Например, если $a = \frac{k^2}{x}$, $b = -\frac{k^2}{y}$, то тело будет двигаться по эллипсам

$$\frac{x^2}{2k^2} + \frac{y^2}{2l^2} = \mathrm{const},$$

а в случае $a = \frac{k^2}{x}$, $b = \frac{k^2}{y}$ траекториями будут гиперболы

$$\frac{x^2}{2k^2} - \frac{y^2}{2l^2} = \text{const}.$$

В случае произвольных a и b, нельзя найти общей формулы для решений, но для «хороших» функций можно доказать, что решения существуют.

Пример 3 (движение в поле сил). Пусть к каждой точке плоскости приложена сила $F = (f(x,y), g(x,y))$. Тогда движение материальной точки массы m под действием силы F подчиняется второму закону Ньютона $F = ma$, где a — ускорение. Поскольку вектор ускорения есть вторая производная радиус-вектора точки (производная скорости по времени), уравнения движения запишутся в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,y), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = f(x,y). \tag{3}$$

Например, если материальное тело движется в гравитационном поле, источником которого является тело с массой M, значительно превышающей m, и находящееся в начале координат, по закону всемирного тяготения уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma\frac{y}{x^2+y^2},$$

где γ — гравитационная постоянная. Если массы движущихся тел сравнимы по величине (как, например, в случае двойных звёзд), то уравнения движения станут более сложными и будут содержать четыре неизвестные функции.

Замечание 2. Не следует думать, что в уравнениях (3) величина m всегда постоянна. Например, если эти уравнения описывают полёт ракеты, то масса убывает из-за сгорания топлива.

Пример 4 (закон Гука). Этот закон гласит, что сила реакции пружины (сила упругости) пропорциональна длине её растяжения. Пусть вся масса пружины сосредоточена на одном из её концов и равна m. Если пружину «привязать» другим концом к началу координат и растягивать вдоль оси x направо, то из второго закона Ньютона следует, что

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \qquad k > 0. \tag{4}$$

Любое решение уравнения (4) имеет вид

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t, \tag{5}$$

где A и B — произвольные постоянные. Эти постоянные можно найти, если знать, например начальное положение и начальную скорость правого конца.

Пример 5. Если тело брошено в воздух и сопротивлением воздуха можно пренебречь, то уравнениями движения являются

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

где g — ускорение свободного падения. Решения этого уравнения имеют вид

$$x = \alpha t + \beta, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + \gamma t + \delta,$$

где греческими буквами обозначены произвольные постоянные. Эти постоянные можно найти, если известны координаты точки, из которой производилось бросание, и начальная скорость. Траекторией тела всегда (кроме случая, когда тело бросали в вертикальном направлении) является парабола.

В заключение рассмотрим пример из геометрии.

Пример 6. Пусть плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$. Какова должна быть функция f, чтобы отрезок касательной, заключённый между осями, делился точкой касания в заданном отношении $k : l$?

Поскольку значение производной в каждой точке совпадает с тангенсом угла наклона касательной к оси x, сформулированное условие можно записать в виде

$$\frac{lf'}{f} + \frac{k}{x} = 0.$$

Произвольное решение имеет вид

$$y^l x^k = \mathrm{const}.$$

Постоянную в правой части можно найти, если указать через какую точку проходит искомая кривая.

2. Определение и общие свойства

Итак, мы видели, что многие задачи физики и математики приводят к соотношениям (связям) между неизвестной функцией (или функциями) и её производными.

Определение 1. Уравнение вида

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ky}{dx^k}) = 0 \tag{6}$$

называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* Число k называется *порядком* уравнения (6). Функция $y = f(x)$ называется *решением* уравнения (6), если выражение

$$F(x, f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^kf}{dx^k}) = 0$$

является тождеством[1].

Замечание 3. Конечно, обозначения, использованные в определении 1, не играют существенной роли: неизвестная функция может обозначаться через x, а независимая переменная — через t и т.п.

Замечание 4. В некоторых из рассмотренных в § 1 примерах возникала не одна, а несколько неизвестных функций, связанных между собой дифференциальными уравнениями. Поэтому мы будем говорить, что

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}, \frac{d^ky_1}{dx^k}, \dots, \frac{d^ky_n}{dx^k}) = 0, \\ \dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}, \frac{d^ky_1}{dx^k}, \dots, \frac{d^ky_n}{dx^k}) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

является *системой* обыкновенных дифференциальных уравнений (порядка k), а вектор-функция $y = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ — её решение, если при подстановке вместо всех y_i функций $f_i(x)$ все уравнения системы (7) все входящие в неё уравнения превращаются в тождества.

Замечание 5. Дифференциальные уравнения, которые мы определили выше, называются *обыкновенными* в противоположность так называемым дифференциальным уравнениям *в частных производных.* Такие уравнения возникают, если неизвестная функция зависит от двух или более переменных. Например, уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

описывает закон изменения во времени и распределения по длине температуры нагретого стержня. Это уравнение называется *уравнением теплопроводности.*

[1] Решения уравнения (6) называют также его *интегральными кривыми.*

В дальнейшем мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения и поэтому называть слово «обыкновенные» будем часто опускать.

Вернёмся к рассмотренным примерам и заметим, что в каждом из них получаемые решения зависят от некоторого числа произвольных постоянных. Это — общий факт: вообще говоря, произвольное решение системы (7), если оно существует, зависит от nk постоянных

$$c_{11}, \dots, c_{1k}, c_{21}, \dots, c_{2k}, \dots, c_{n1}, \dots, c_{nk}. \tag{8}$$

Поэтому, чтобы выделить конкретное решение из совокупности возможных, нужно добавить к уравнению (7) nk дополнительных условий. Существуют разные способы задания этих условий. Один из самых распространённых — это *данные Коши*.

Определение 2. Пусть задана точка $x_0 \in \mathbb{R}$. *Задачей Коши* для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) называется построение такого решения $y = (y_1, \dots, y_n)$, что

$$\begin{aligned}
&y_1(x_0) = c_{11},\ y_1'(x_0) = c_{12}, \dots, y_1^{(k-1)}(x_0) = c_{1k},\\
&y_2(x_0) = c_{21},\ y_1'(x_0) = c_{22}, \dots, y_1^{(k-1)}(x_0) = c_{2k},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n(x_0) = c_{n1},\ y_n'(x_0) = c_{n2}, \dots, y_n^{(k-1)}(x_0) = c_{nk}.
\end{aligned}$$

При этом сами числа c_{ij} называются *данными Коши* (или *начальными данными*).

Пример 7. В примере 3 естественными данными Коши являются координаты начальной точки траектории и компоненты скорости в той же точке. Если механическая система, движение которой на плоскости, состоит из n материальных точек и подчиняется второму закону Ньютона, то поведение этой системы полностью определяется $4n$ числами — $2n$ координатами и $2n$ компонентами скоростей в начальный момент времени. В трёхмерном пространстве, естественно, нужно задать $6n$ чисел.

Оказывается, задача Коши разрешима, причём разрешима однозначно, для «большинства» обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы точно сформулировать этот результат, сделаем несколько предварительных замечаний.

Во-первых, введём такие формальные переменные p_{ij}, что переменная p_{ij} соответствует j-й производной неизвестной функции y_i. Тогда систему (7) можно переписать в виде

$$\begin{cases}
F_1(x, p_{10}, \dots, p_{n0}, p_{11}, \dots, p_{n1}, p_{1k}, \dots, p_{nk}) = 0,\\
\dots\\
F_n(x, p_{10}, \dots, p_{n0}, p_{11}, \dots, p_{n1}, p_{1k}, \dots, p_{nk}) = 0.
\end{cases} \tag{9}$$

Во-вторых, предположим, что в некоторой точке $\theta = (x_0, p_{11}^0, \dots, p_{nk}^0)$ якобиан

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial p_{1k}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_{nk}}\\
\dots & \dots & \dots\\
\frac{\partial F_n}{\partial p_{1k}} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial p_{nk}}
\end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда по теореме о неявной функции систему (9) можно разрешить относительно переменных $p_{1k}, \dots, p_{nk}$, т.е. преобразовать её к виду

$$\begin{cases}
p_{1k} = f_1(x, p_{10}, \dots, p_{n0}, p_{11} \dots, p_{n1}, \dots, p_{1,k-1}, \dots, p_{n,k-1}),\\
\dots\dots\dots\\
p_{nk} = f_n(x, p_{10}, \dots, p_{n0}, p_{11} \dots, p_{n1}, \dots, p_{1,k-1}, \dots, p_{n,k-1}).
\end{cases}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1^{(k)} = f_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1' \dots, y_n', \dots, y_1^{(k-1)}, \dots, y_n^{(k-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(k)} = f_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1' \dots, y_n', \dots, y_1^{(k-1)}, \dots, y_n^{(k-1)}), \end{cases} \tag{10}$$

разрешённую относительно старших производных.

Теперь мы можем сформулировать важнейший результат теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 1 (теорема существования и единственности). *Пусть задана система* (10) *обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешённая относительно старших производных. Пусть функции $f_1, \dots, f_n$, стоящие в правой части*

1) *непрерывны по всем аргументам,*
2) *обладают всеми производными по переменным p_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, k-1$, и эти производные непрерывны.*

Тогда для любых начальных данных (8) *в некоторой окрестности $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ существует и единственным образом определено решение $y = (y_1, \dots, y_n)$, удовлетворяющее этим данным, т.е. такое, что*

$$\left.\frac{d^i y}{dx^i}\right|_{x=x_0} = c_{i,j+1}, \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Замечание 6. Теорема не гарантирует существование *глобального* решения на всей прямой, поскольку окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, в которой решение существует, зависит от точки x_0. Например, решая уравнение

$$y' = 1 + y^2$$

с начальными данными $y(0) = 0$, мы приходим к решению $y = \operatorname{tg} x$, которое не определено в точках $x = \pi k$.

Пример 8. Приведём пример, когда условие теоремы не выполнены и вследствие этого нарушается единственность. Рассмотрим уравнение

$$yy' = 1.$$

Оно разрешимо относительно старшей производной всюду, кроме тех точек, где $y = 0$. Его решениями являются параболы

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x - x_0},$$

и начальным данным $(x_0, 0)$ соответствуют два решения.

Пример 9 (траектории векторных полей). Пусть на плоскости задано поле скоростей $v = (v_1, v_2)$ (см. пример 2)[2] Его *траектории* — это решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{11}$$

Пусть эта система удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (теорема 1). Тогда через любую точку (x_1, x_2) плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит единственная кривая (решение уравнения (11))

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t),$$

такая, что $x_1(0) = x_1$ и $x_2(0) = x_2$. Поэтому для каждого $t \in \mathbb{R}$ определено отображение

$$F_t \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F_t(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t)),$$

[2] Или, что то же самое, *векторное поле* $v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}$.

плоскости в себя, обладающее следующими замечательными свойствами:

$$F_0 = \mathrm{id}, \quad F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2}.$$

Семейство преобразований $\{F_t\}$ называется *потоком* (или однопараметрической группой преобразований) векторного поля v. Оно показывает, как плоскость «движется» под воздействием этого поля.

Например, если плоскость заполнена жидкостью и (v_1, v_2) — скорость частицы в соответствующей точке, то $\{F_t\}$ описывает течение, а траектории говорят о форме потока[3].

Рассмотрим в качестве примера векторное поле

$$v = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Его траекториями являются окружности

$$x_1 = R\cos t, \quad x_2 = R\sin t,$$

а однопараметрическая группа преобразований состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

т.е. является поворотами плоскости на угол t (за время t) вокруг начала координат.

Замечание 7 (ломаные Эйлера). Вернёмся к теореме 1 и подчеркнём (хотя мы и не доказывали её), что классическое доказательство не просто *констатирует* существование решения задачи Коши, а содержит в себе *метод* приближённого построения последнего[4]. Проиллюстрируем этот метод на примере скалярного уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{12}$$

с начальными данными $c_{10} = y_0$ в точке $x = x_0$.

Предположим, что мы хотим построить решение уравнения (12) на отрезке $[x_0, x_1]$. Разобьём этот отрезок на n равных частей и положим

$$h = \frac{x_1 - x_0}{n}.$$

Тогда, пользуясь тем, что значение первой производной функции равно тангенсу угла наклона касательной к графику в рассматриваемой точке, мы можем *приблизительно* оценить значение неизвестной функции в узловых точках

$$x_0 + h,\ x_0 + 2h, \dots, x_0 + ih, \dots, x_0 + nh = x_1,$$

полагая

$$\begin{aligned} &\tilde{y}_1 = \tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + f(x_0, y_0)h, \\ &\tilde{y}_2 = \tilde{y}(x_0 + 2h) = \tilde{y}_1 + f(x_0 + h, \tilde{y}_1)h, \\ &\tilde{y}_3 = \tilde{y}(x_0 + 3h) = \tilde{y}_2 + f(x_0 + 2h, \tilde{y}_2)h, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}(x_0 + (i+1)h) = \tilde{y}_i + f(x_0 + ih, \tilde{y}_i)h \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{13}$$

Соединив точки $(x_0 + ih, \tilde{y}_i)$ отрезками прямых, мы получим график приближённого решения, называемый *ломаной Эйлера*. Оказывается, если выполняются условия теоремы 1, то при стремлении n к ∞ (т.е. при $h \to 0$) ломаные Эйлера стремятся к точному решению уравнения (12) с указанными выше начальными данными.

---

[3] Такая модель — очень грубое приближение к описанию жидкостей, но в некоторых задачах ею можно пользоваться для качественной оценки поведения жидкостей.

[4] Такие доказательства называются в математике *конструктивными*.

В случае системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

ломаные Эйлера строятся практически точно также: вместо (13) нужно рассмотреть равенства

$$\begin{aligned} &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\tilde{y}_1(x_0 + (i+1)h) = (\tilde{y}_1)_i + f_1(x_0 + ih, (\tilde{y}_1)_i, \ldots, (\tilde{y}_n)_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\tilde{y}_n(x_0 + (i+1)h) = (\tilde{y}_1)_i + f_n(x_0 + ih, (\tilde{y}_n)_i, \ldots, (\tilde{y}_n)_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Замечание 8. Если задана система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k, то простой заменой переменных её можно превратить в систему первого порядка. Например, уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

заменой переменных $y_1 = y$, $y_2 = y'$ превращается в систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = f(x, y_1, y_2), \end{cases}$$

уравнение третьего порядка

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

заменой переменных $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$ — в систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = f(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

и т.д.

3. Некоторые классы интегрируемых уравнений

Теорема существования и единственности указывает, как с помощью последовательных аппроксимаций искать приближённое решение задачи Коши, однако ничего не говорит о построении точных решений. Следует отметить, что для большинства дифференциальных уравнений такое решение в принципе нельзя построить. Однако для некоторых классов удаётся выписать общий вид решения. Простейшее уравнение такого вида — это $y' = f(x)$, рассмотренное в примере 1. Опишем более сложные случаи.

3.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$y' = f(x)g(y)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Деля обе его части на $g(y)$, мы приходим к уравнению

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x),$$

или

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx. \tag{14}$$

Поэтому общим решением этого уравнения будет

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

или

$$G(y) = F(x) + c, \tag{15}$$

где $G(y)$ где $F(x)$ — какие-нибудь первообразные функций $\frac{1}{g}$ и f соответственно, а c — произвольная константа.

Заметим, что равенство (15) задаёт величину y как *неявную* функцию переменной x. Кроме того, деля на $g(y)$, мы можем потерять некоторые частные решения, а именно, решения вида $y = a$, где постоянная a удовлетворяет уравнению $g(a) = 0$.

Пример 10. Рассмотрим уравнение

$$y' = (y^2 - 1)x, \tag{16}$$

или

$$\frac{y'}{y^2 - 1} = x.$$

Приводя его к виду (14), получаем

$$\Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big)\,dy = 2\,dx. \tag{17}$$

Значит,

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^2 + c, \qquad c = \mathrm{const},$$

т.е.

$$y = \frac{1 + k\mathrm{e}^{x^2}}{1 - k\mathrm{e}^{x^2}}, \qquad k = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Выполняя деление на $y^2 - 1$, мы могли потерять решения $y = \pm 1$. Решение $y = 1$ получается из (18) при $k = 0$, а решение $y = -1$ действительно потеряно.

Итак, все решения уравнения (16) состоят из функций вида (18), а также из постоянного решения $y = -1$.

Пример 11. Рассмотрим уравнение

$$y' = x^3\sqrt{1 - y^2}. \tag{19}$$

Оно приводится к виду

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = x^3\,dx,$$

и, значит,

$$\arcsin y = \frac{1}{4}x^4 + c, \qquad c = \mathrm{const}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (19) имеет вид

$$y = \sin\big(\frac{1}{4}x^4 + c,\big),$$

а двумя потерянными при делении частными решениями являются $y = \pm 1$.

3.2. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение приводящееся к виду

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \tag{20}$$

где выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ является дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, называется *уравнением в полных* дифференциалах. Это означает, что выполняются равенства

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{21}$$

Функция F называется *потенциалом* формы $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Предложение 1. *Выражение* (20) *является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{22}$$

Если удаётся найти потенциал F, то общее решение уравнения в полных дифференциалах задаётся неявно в виде

$$F(x,y) = c, \qquad c = \mathrm{const}. \tag{23}$$

Пример 12. Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \mathrm{const}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \tag{24}$$

и перепишем его в виде

$$(\alpha x + \beta y)\,dx + (\gamma x + \delta y)\,dy = 0. \tag{25}$$

В силу условия (22), уравнение (24) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\beta = \gamma$, т.е. имеет вид

$$y' + \frac{ax + by}{bx + cy}, \qquad a, b, c = \mathrm{const}, \quad ac \neq b^2. \tag{26}$$

В этом случае легко найти потенциал формы (25): он имеет вид

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2).$$

Поэтому решения уравнения (26) записываются в неявном виде

$$ax^2 + 2bx + cy^2 = d, \qquad d = \mathrm{const}.$$

Вспоминая классификацию плоских кривых второго порядка, мы получаем следующий результат:

Предложение 2. *Графики решений уравнения* (26) *имеют вид*

1) *семейства эллипсов при* $ac - b^2 > 0$ *(включая вырожденный эллипс при* $d = 0$*),*
2) *семейства гипербол при* $ac - b^2 < 0$ *(включая пару пересекающихся прямых при* $d = 0$*).*

Пример 13. Аналогично предыдущему примеру, уравнение

$$y' + \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{bx^2 + 2cxy + dy^2} = 0$$

приводится к уравнению в полных дифференциалах, и его решения задаются неявно в виде

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = \mathrm{const}.$$

Замечание 9 (интегрирующий множитель). В принципе, любое дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

можно преобразовать к уравнению в полных дифференциалах. Именно, домножим это уравнение на некоторую функцию $\mu = \mu(x,y)$ и потребуем, чтобы выполнилось условие

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{27}$$

или

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big).$$

Это уравнение в частных производных относительно неизвестной функции μ, и оно всегда имеет локальное (т.е. в некоторой окрестности) решение. Значит, уравнение

$$\mu P(x,y)\,dx + \mu Q(x,y)\,dy = 0,$$

эквивалентное исходному, является уравнением в полных дифференциалах. Функция μ, удовлетворяющая условию (27), называется *интегрирующим множителем.*

Пример 14. Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{y^2+xy+1}{x^2+xy+1}$$

и приведём его к виду

$$(x^2+xy+1)\,dy + (y^2+xy+1)\,dx. \tag{28}$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x}((x^2+xy+1) = 2x+y, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y^2+xy+1) = 2y+1,$$

оно не является уравнением в полных дифференциалах. Однако, разделив обе части (28) на $x+y$, получаем

$$\big(x + \frac{1}{x+y}\big)\,dy + \big(y + \frac{1}{x+y}\big)\,dx, \tag{29}$$

и, как нетрудно заметить,

$$x + \frac{1}{x+y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy + \ln|x+y|), \quad y + \frac{1}{x+y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy + \ln|x+y|).$$

Поэтому выражение (28) является полным дифференциалом, и мы получаем семейство решений

$$xy + \ln|x+y| = c, \qquad c = \mathrm{const},$$

или

$$x + y = k\mathrm{e}^{-xy}, \qquad k = \mathrm{const}.$$

3.3. Однородные уравнения

Уравнение вида

$$y' = f(x,y) \tag{30}$$

называется *однородным*, если для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y).$$

Стандартный метод решения однородных уравнений — замена переменных

$$u = \frac{y}{x}. \tag{31}$$

Действительно, в силу однородности имеем

$$f(x,y) = f(1, \frac{y}{x}).$$

С другой стороны, из (31) следует, что
$$y' = xu' + u,$$
и (30) приводится к виду
$$xu' + u = \varphi(u),$$
где $\varphi(u) = f(1, u)$. Последнее уравнение легко интегрируется:
$$F(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + \mathrm{const}.$$
Заменяя в функции $F(u)$ переменную u на $\frac{y}{x}$, получаем общее решение уравнения (30).

Замечание 10. Случай $\varphi(u) = u$ рассматривается отдельно и не вызывает затруднений.

Пример 15. Вернёмся к уравнению
$$y' + \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$
из примера 12. Оно является однородным, и теперь мы можем проинтегрировать его без дополнительных ограничений на коэффициенты. После подстановки имеем
$$xu' + u + \frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u},$$
или
$$\frac{\delta u + \gamma}{\delta u^2 + (\beta + \gamma)u + \alpha}\, du + \frac{dx}{x} = 0.$$
Первое слагаемое в этом выражении интегрируется стандартными методами интегрирования рациональных дробей, и результат, разумеется, зависит от коэффициентов α, β, γ и δ. Например, для уравнения
$$y' + \frac{x - y}{x + y}$$
получаем
$$\frac{u + 1}{u^2 + 1}\, du + \frac{dx}{x} = 0,$$
или
$$\frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) + \operatorname{arctg} u + \ln|u| = \mathrm{const},$$
т.е. общее решение имеет вид
$$x^2 + y^2 = k\mathrm{e}^{-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \qquad k = \mathrm{const}.$$
Переходя к полярным координатам, мы получаем уравнение семейства *логарифмических спиралей*
$$r = k\mathrm{e}^{-\varphi}.$$
Геометрически эти кривые характеризуются тем, что пересекают радиус-векторы под постоянным углом $\alpha = \operatorname{arcctg} k$.

Пример 16. Вот задача из геометрической оптики, сводящаяся к однородным дифференциальным уравнениям: какую форму должно иметь зеркало, чтобы падающий на него поток параллельных лучей фокусировался в одной точке?

Предположим, лучи падают на зеркало справа параллельно оси x и запишем закон отражения света[5] — угол падения равен углу отражения. Получающееся уравнение имеет вид
$$y' = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1}{\frac{y}{x}}.$$

[5]При падении на искривлённую поверхность свет отражается от касательной плоскости.

Делая замену (31), мы приходим к уравнению

$$xu' + u = \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{u}.$$

Чтобы его проинтегрировать, введём новую переменную $w = \sqrt{1+u^2}$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{dw}{1-w} = \frac{dx}{x}.$$

Значит,

$$x(w-1) = c, \qquad c = \text{const},$$

или

$$\sqrt{1+u^2} = \frac{c}{x} + 1.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$y^2 = c(2x+c).$$

Это — семейство парабол с общим фокусом в начале координат, и в этом фокусе собираются лучи, отражённые зеркалом.

3.4. Уравнения, допускающие понижение порядка

Стандартный способ понизить порядок уравнения — это ввести новую переменную $p = y'$. Вообще говоря, после такой замены мы получим *систему* дифференциальных уравнений, решать которую нисколько не легче исходного уравнения, однако в некоторых специальных случаях задача упрощается. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{32}$$

не зависящее явно от неизвестной функции y. Замена

$$p = y' \tag{33}$$

сводит его к скалярному уравнению первого порядка

$$F(x, p, p') = 0.$$

Решая это уравнение, мы найдём выражение для первой производной функции y и, проинтегрировав, саму функцию.

Пример 17. Рассмотрим уравнение

$$y'' + (y')^2 = 0.$$

Тогда после замены (33) получаем

$$p' + p^2 = 0,$$

или

$$\frac{dp}{p^2} + dx = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{z} = x + c_1,$$

т.е.

$$y' = \frac{1}{x+c_1}$$

и

$$y = \ln|x+c_1| + c_2, \qquad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Кроме того, есть также решение $y = \text{const}$, потерянное при делении на p^2.

Пример 18. Рассмотрим более сложный пример:

$$Ry'' = -\big(\sqrt{1+(y')^2}\,\big)^3, \qquad R = \text{const}.$$

После замены (33) получаем

$$dx = -\frac{R\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$x - c_1 = -R\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Значит, теперь мы должны решить уравнение первого порядка

$$x - c_1 = -R\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}. \tag{34}$$

Чтобы это сделать, введём параметр t и положим $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда из (34) следует, что

$$x - c_1 = -R\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = -R\sin t,$$

откуда получаем

$$dy = y'\,dx = \operatorname{tg} t(-R\cos t\,dt) = -R\sin t\,dt.$$

Итак,

$$x - c_1 = -R\sin t, \quad y - c_2 = R\cos t,$$

или

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = R^2.$$

Значит, интегральными кривыми рассматриваемого уравнения являются окружности радиуса R с центрами в произвольной точке плоскости.

Рассмотрим ещё один тип уравнений, допускающих понижение порядка. Это уравнения вида

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{35}$$

не содержащие переменную x в явном виде. В этом случае тоже делается замена

$$p = y', \tag{36}$$

но вторая производная выражается через новую переменную по-другому:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}. \tag{37}$$

Таким образом, уравнение (35) приобретает вид

$$F\big(y, p, p\frac{dp}{dy}\big) = 0$$

и его решают относительно неизвестной p, считая y *независимой переменной.*

Пример 19 (задача преследования). Предположим, что некоторая цель (заяц, самолёт) движется равномерно по оси x вправо с постоянной скоростью a и её преследует другой объект (волк, ракета), движущийся с постоянной по величине скоростью v, направленной на преследуемого. По какой траектории будет двигаться преследователь?

Если учесть, что скорость преследователя направлена по касательной к его траектории, то то можно получить следующее уравнение движения

$$y'' = \frac{a}{v}\cdot\frac{(y')^2}{y}\sqrt{1+(y')^2}. \tag{38}$$

Это уравнение имеет вид (35) и называется *уравнением погони*, а его интегральные кривые — *линиями погони.*

Применяя к уравнению (38) замену переменных (36), мы получаем уравнение с разделяющимися переменными[6]

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{v}\cdot\frac{dy}{y}. \tag{39}$$

Из условий задачи следует, что величина $p = y'$ отрицательна, и поэтому

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = -\frac{\frac{dp}{p^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}}.$$

Поэтому, интегрируя (39) получаем

$$\ln\Big(\frac{1}{p}+\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}\Big) = \frac{a}{v}(\ln|y|+c).$$

Если предположить, что в начальный момент времени преследователь и преследуемый имели одну и ту же ординату y_0, то последнее равенство перепишется в виде

$$\frac{1}{p}+\sqrt{\frac{1}{p^2}+1} = \Big(\frac{y}{y_0}\Big)^{\frac{a}{v}}.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\frac{2}{p} = \Big(\frac{y}{y_0}\Big)^{\frac{a}{v}} - \Big(\frac{y}{y_0}\Big)^{-\frac{a}{v}},$$

или

$$dx = \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{y}{y_0}\Big)^{\frac{a}{v}} - \Big(\frac{y}{y_0}\Big)^{-\frac{a}{v}}\Big).$$

Считая, что $a < v$, т.е. что преследователь может догнать цель, получаем решение в виде

$$x = \frac{y_0}{2}\left[\frac{\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-1}{1+\frac{a}{v}} - \frac{\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}-1}{1-\frac{a}{v}}\right] + x_0,$$

где x_0 — абсцисса в начальный момент времени. При этом абсцисса точки встречи есть

$$x_1 = x_0 + y_0\frac{av}{v^2-a^2},$$

а продолжительность погони —

$$T = \frac{y_0 v}{v^2-a^2}.$$

3.5. Линейные уравнения первого порядка

Определение 3. Дифференциальное уравнение вида

$$a_k(x)y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{40}$$

называется *линейным.* В случае, если $b(x) = 0$, линейное уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным.* Аналогичным образом, система дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1k}^1(x)y_1^{(k)} + \dots + a_{1k}^n(x)y_n^{(k)} + \dots + a_{10}^1(x)y_1 + \dots + a_{10}^n(x)y_n = b_1(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nk}^1(x)y_1^{(k)} + \dots + a_{nk}^n(x)y_n^{(k)} + \dots + a_{n0}^1(x)y_1 + \dots + a_{n0}^n(x)y_n = b_n(x) \end{array}\right. \tag{41}$$

называется линейной, и эта система однородна, если все функции $b_1, \dots, b_n$, стоящие в её правой части, равны нулю.

Множества решений линейных уравнений обладают следующими важными свойствами. Сформулируем их для скалярных уравнений.

[6]Деля на p, мы потеряли решение $y = \mathrm{const}$, но оно не представляет интереса, поскольку соответствует движению преследователя по той же прямой, что и преследуемый.

Предложение 3. *Пусть задано линейное уравнение вида* (40). *Тогда*:

1) *Если уравнение однородно и* y_1, y_2 — *его решения, то функция* $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ — *также решения для любых* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$;
2) *если* y_1 *и* y_2 — *решения неоднородного уравнения, то их разность является решением соответствующего однородного уравнения*;
3) *любое решение неоднородного уравнения есть сумма некоторого его частного решения и решения соответствующего однородного уравнения.*

Свойство 1 называется *принципом суперпозиции* для решений линейных уравнений.

Покажем, как предложение 3 используется для решения линейных уравнений

$$A(x)y' + B(x)y = C(x)$$

первого порядка. Разделив на $A(x)$, приведём это уравнение к виду

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{42}$$

Тогда соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y' + P(x)y = 0 \tag{43}$$

и его общее решение выражается формулой

$$y = k\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}, \qquad k = \mathrm{const}. \tag{44}$$

В силу утверждения 3 предложения 3, общее решение уравнения (42) есть сумма решения (44) и какого-нибудь частного решения. Чтобы найти последнее, используют так называемый *метод вариации произвольной постоянной*. Он состоит в следующем.

Предположим, что в равенстве (44) величина k не является постоянной, а есть некоторая функция переменной x: $k = k(x)$. Подставляя функцию

$$k(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}$$

в уравнение (42), получаем

$$\Big(k(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx})\Big)' + P(x)k(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} = Q(x),$$

или

$$k' = Q\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}.$$

Отсюда следует, что в качестве $k(x)$ можно взять функцию

$$\int_{x_0}^{x} Q\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\,dx$$

Таким образом, справедлив следующий результат

Предложение 4. *Всякое решение уравнения* (42) *имеет вид*

$$y = \underbrace{\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\int_{x_0}^{x} Q\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\,dx}_{\text{частное решение неоднородного уравнения}} + \underbrace{k\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}}_{\text{общее решение однородного уравнения}} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\Big(k + \int_{x_0}^{x} Q\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\Big), \qquad k = \mathrm{const}. \tag{45}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 20 (сила тока в цепи). Из физики известно, что связь между силой тока i в цепи и электродвижущей силой E определяется уравнением

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, \tag{46}$$

где t время, R — сопротивление и L — самоиндукция (последние две величины постоянны). Общим решением однородного уравнения является функция

$$i = k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Методом варьирования постоянной получаем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int_{t_0}^{t} E\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,dt.$$

Поэтому общее решение уравнения (46) будет иметь вид

$$i = \Big(\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} E\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,dt + k\Big)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \qquad k = \mathrm{const}. \tag{47}$$

Рассмотрим два важных частных случая.

Постоянный ток. Пусть электродвижущая сила постоянна. Тогда решение (47) примет вид

$$i = \big(\frac{E}{R} + k\big)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Если предположить, что в момент времени $t = 0$ ток в контуре был нулевым, то можно определить значение постоянной k. Соответствующее решение будет иметь вид

$$i = \frac{E}{R}\big(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\big).$$

Переменный ток. Пусть теперь электродвижущая сила изменяется по закону

$$E = E_0 \sin\omega t.$$

В этом случае частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\frac{LE_0\sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

где $\delta = \operatorname{arctg}\frac{L\omega}{R}$, и поэтому общим решением является функция

$$i = k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{LE_0\sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \qquad k = \mathrm{const}.$$

Пример 21 (уравнение Бернулли). Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{48}$$

называемое *уравнением Бернулли.* При $n = 0$ оно является линейным неоднородным уравнением, а при $n = 1$ — однородным. При всех остальных значениях n это уравнение не является линейным. Однако его можно свести к таковому, если сделать замену

$$z = y^{1-n}. \tag{49}$$

Действительно, из (49) следует, что

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{50}$$

Поскольку уравнение (48) можно переписать в виде[7]

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q,$$

подстановка (49) и (50) в последнее уравнение даёт линейное уравнение на z:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = (1-n)Q,$$

[7]При этом мы можем потерять решение $y = 0$!

решать которое мы уже умеем.

Решим, например, таким способом уравнение

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \cdot \sqrt{y}.$$

Оно является уравнением Бернулли с $n = \frac{1}{2}$. Поэтому, в силу (49) новая переменная имеет вид $z = \sqrt{y}$. Делая соответствующую замену, мы приходим к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция

$$z = kx^2,$$

а методом вариации постоянной мы получаем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$z = \frac{1}{2}x^2 \ln x.$$

Поэтому общее решение есть

$$z = x^2(k + \frac{1}{2}\ln x).$$

Возвращаясь к функции y, получаем общий вид решений исходного уравнения

$$y = x^4(k + \frac{1}{2}\ln x)^2, \qquad k = \mathrm{const}.$$

Добавив сюда потерянное решение $y = 0$, мы получим все решения.

3.6. Решение некоторых уравнений с помощью рядов

Поскольку дифференциальное уравнение общего вида решить точно, как правило, не удаётся, необходимы приближённые методы решения. Один из таких методов — в буквальном смысле прямолинейный — даёт доказательство теоремы существования и единственности (см. замечание 7). Другой основывается на использовании теории рядов, и мы проиллюстрируем его на простых примерах.

Пример 22. Рассмотрим уравнение колебания пружины

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \qquad k > 0,$$

(см. пример 4). Предположим, что его решение разлагается в степенной ряд (т.е. в ряд Тейлора) в окрестности точки $t = 0$ и положим

$$x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_i t^i + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i. \tag{51}$$

Дифференцируя этот ряд дважды по t, получаем ряд для второй производной решения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x_2 + 6x_3 t + 12x_4 t^2 + \cdots + (i+2)(i+1)x_{i+2}t^i + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)x_{i+2}t^i.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, мы приходим к равенству

$$m\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)x_{i+2}t^i = -k\sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i.$$

Поскольку разложение функции в степенной ряд единственно, из этого равенства вытекает бесконечная система уравнений

$$\begin{cases} m \cdot 2x_2 = -k \cdot x_0, \\ m \cdot 6x_3 = -k \cdot x_1, \\ m \cdot 12x_4 = -k \cdot x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m \cdot (i+2)(i+1)x_{i+2} = -k \cdot x_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

или

$$x_{i+2} = -\frac{k}{m(i+2)(i+1)}x_i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Это уравнение выражает значение коэффициента x_{i+2} через значения предыдущих[8] и, в конечном итоге, позволяет получить общую формулу. Действительно, для коэффициентов с чётными номерами имеем

$$\begin{aligned} &x_2 = \Big(-\frac{k}{m}\Big)\frac{x_0}{2!}, \\ &x_4 = \Big(-\frac{k}{m}\Big)^2\frac{x_0}{4!}, \\ &x_6 = \Big(-\frac{k}{m}\Big)^3\frac{x_0}{6!}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{2i} = \Big(-\frac{k}{m}\Big)^i\frac{x_0}{2i!} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

а для нечётных коэффициентов —

$$\begin{aligned} &x_3 = \Big(-\frac{k}{m}\Big)\frac{x_1}{3!}, \\ &x_5 = \Big(-\frac{k}{m}\Big)^2\frac{x_1}{5!}, \\ &x_7 = \Big(-\frac{k}{m}\Big)^3\frac{x_1}{7!}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{2i+1} = \Big(-\frac{k}{m}\Big)^i\frac{x_1}{(2i+1)!} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = x_0, \quad B = \frac{x_1}{\lambda}.$$

Тогда, с учётом сказанного, разложение (51) перепишется в виде

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i} t^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i+1} t^{2i+1} = A\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(\lambda t)^{2i}}{2i!} + B\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Осталось заметить, что первое слагаемое в правой части есть ряд Тейлора функции $\cos\lambda t$, а второе — функции $\sin\lambda t$. Итак, общее решение имеет вид

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

[8] Такие уравнения, или соотношения, называются *рекуррентными*.

где A и B — произвольные постоянные.

Пример 23 (уравнение Риккати). Рассмотрим нелинейное уравнение

$$y' = y^2 + R(x), \tag{52}$$

являющееся частным случаем *уравнения Риккати*, решения которого играют важную роль в геофизике, теории управления и других приложениях.

Замечание 11. Общее уравнение Риккати имеет вид

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

однако заменами переменных его можно привести к виду

$$y' = \pm y^2 + R(x).$$

Про это уравнение известно, что, вообще говоря, его решения нельзя выразить с помощью интегралов от элементарных функций.

Замечание 12. Конечно, в некоторых частных случаях это не так. Например, если $R = 0$, то уравнение Риккати превращается в уравнение Бернулли, при $P = 0$ — это линейное неоднородное уравнение.

Использование теории рядов позволяет получить рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда Тейлора неизвестной функции и, таким образом, вычислять приближённые решения с заданной точностью. Пусть y_i, $y_i^{(2)}$ и r_i — коэффициенты разложения функций $y(x)$, $y^2(x)$ и $R(x)$ в степенные ряды:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i x^i, \quad y^2 = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(2)} x^i, \quad R = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i. \tag{53}$$

Подставляя выражения (53) в уравнение (52) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$(i+1)y_{i+1} = y_i^{(2)} + r_i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots \tag{54}$$

С другой стороны,

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} y_i x^i\Big)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(2)} x^i$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
y_0^{(2)} &= y_0^2,\\
y_1^{(2)} &= 2y_0y_1,\\
y_2^{(2)} &= 2y_0y_2 + y_1^2,\\
y_3^{(2)} &= 2(y_0y_3 + y_1y_2),\\
y_4^{(2)} &= 2(y_0y_4 + y_1y_3) + y_2^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
y_{2i}^{(2)} &= 2(y_0y_{2i} + y_1y_{2i-1} + \dots + y_{i-1}y_{i+1}) + y_i^2,\\
y_{2i+1}^{(2)} &= 2(y_0y_{2i+1} + y_1y_{2i} + \dots + y_iy_{i+1}),\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Поэтому из (54) следует, что

$$\begin{aligned}
y_{2i+1} &= \frac{2(y_0y_{2i} + y_1y_{2i-1} + \dots + y_{i-1}y_{i+1}) + y_i^2 + r_{2i}}{2i+1},\\
y_{2i+2} &= \frac{2(y_0y_{2i+1} + y_1y_{2i} + \dots + y_iy_{i+1}) + r_{2i+1}}{2i+2}.
\end{aligned}$$

Это и есть искомые соотношения. В частности,

$$y_1 = y_0^2 + r_0,$$
$$y_2 = \frac{y_0^3 + y_0 r_0 + r_1}{2},$$
$$y_3 = \frac{2y_0^4 + 3y_0^2 r_0 + y_0 r_1 + r_0^2 + r_2}{3}$$

и т.д.

4. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение вида

$$a_n y^{(k)} + a_{k-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{55}$$

называется уравнением *с постоянными коэффициентами*, если все $a_0, \dots, a_n$ являются константами. Если функция f, стоящая в правой части, тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным*; в противном случае оно называется *неоднородным*.

Аналогичным образом можно определить *систему линейных уравнений* с постоянными коэффициентами (см. ниже § 4.2). Мы опишем общий метод решения однородных уравнений и систем такого вида, а также укажем, как их решать для некоторых правых частей специального вида.

4.1. Скалярные уравнения

4.1.1. Однородные уравнения

Пусть дано однородное уравнение вида (55) т.е. уравнение

$$a_n y^{(k)} + a_{n-1} y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{56}$$

Если его порядок равен k, то $a_n \neq 0$ и, разделив на a_n, можно всегда считать, что оно имеет вид

$$y^{(k)} + a_{n-1} y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{57}$$

Решение уравнения (57) ищут в виде

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{58}$$

Поскольку в этом случае

$$y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x},$$

то, подставляя функцию (58) в уравнение (57), получаем

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

и, т.к. $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$,

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{59}$$

Значит, справедливо

Предложение 5. *Функция* $\mathrm{e}^{\lambda x}$ *тогда и только тогда является решением уравнения* (57), *когда* λ *является корнем уравнения* (59).

Правая часть уравнения (59) называется *характеристическим многочленом* уравнения (57) и обозначается через $P(\lambda)$. Изучим, как корни характеристического многочлена определяют решения уравнения (56).

Простой вещественный корень. Каждому простому корню (т.е. корню кратности 1) λ характеристического многочлена соответствует решение вида

$$y = Ce^{\lambda x}, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{60}$$

двум различным корням λ_1 и λ_2 — решение

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

и т.д. В частности, если характеристический многочлен имеет k различных вещественных корней, то *общее решение* уравнения (57) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_k e^{\lambda_k x}.$$

Пример 24. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = 0.$$

Его характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

имеет два различных вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Значит, общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Вещественный корень кратности m. Пусть λ — вещественный корень характеристического многочлена кратности $m > 0$. Тогда этому корню соответствует m-мерное пространство решений вида

$$y = (C_0 + C_1 x + \cdots + C_{m-1} x^{m-1}) e^{\lambda x}, \qquad C_0, C_1, \ldots, C_{m-1} \in \mathbb{R}. \tag{61}$$

В частности, если $\lambda = 0$, то ему соответствуют решения

$$y = C_0 + C_1 x + \cdots + C_{m-1} x^{m-1}.$$

Очевидно, формула (58) является частным случаем равенства (61) при $m = 0$.

Пример 25. Характеристическим многочленом уравнения

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

является

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

имеющий корень $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и корень $\lambda_2 = -1$ кратности 1. Первому значению соответствует решение

$$y = (C_0 + C_1 x) e^{x},$$

а второму — решение

$$y = C_2 e^{-x}.$$

Значит, общее решение имеет вид

$$y = (C_0 + C_1 x) e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Простой комплексный корень. Пусть $\lambda = p + iq$ — комплексный корень характеристического многочлена кратности 1. Такому корню соответствует решение

$$y = e^{p+iq} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx).$$

С другой стороны, поскольку $P(\lambda)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, число $\bar{\lambda} = p - iq$ — тоже его корень и последнему соответствует решение

$$y = e^{p-iq} = e^{px}(\cos qx - i \sin qx).$$

Этой паре комплексных решений эквивалентным образом можно сопоставить пару действительных

$$y = e^{px} \sin qx, \qquad y' = e^{px} \cos qx,$$

и, таким образом, паре простых комплексно-сопряжённых корней $\lambda \pm iq$ соответствует двумерное пространство решений

$$y = \mathrm{e}^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx),$$

где C_1 и $C_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные.

Пример 26 (свободные гармонические колебания). Уравнение *свободных гармонических колебаний* имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

С этим уравнением мы уже сталкивались выше (см. пример 4). Рассмотрим его с точки зрения общей теории.

Характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a^2x$$

имеет два комплексных корня $\lambda_{1,2} = \pm ia$ и, значит, общее решение имеет вид

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at.$$

Вводя величину $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и угол $\delta = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}$, решение можно переписать в виде

$$x = A \sin(at + \delta).$$

Величина A называется *амплитудой* колебаний, a — *частотой*, а δ — *начальной фазой*. Период колебаний есть

$$T = \frac{2\pi}{a},$$

а количество колебаний в единицу времени —

$$\nu = \frac{a}{2\pi}.$$

Пример 27 (свободные упругие колебания при наличии сопротивления). Такие колебания описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0,$$

где сила сопротивления определяется вторым слагаемым. Считая, что коэффициент сопротивления b не слишком велик (достаточно считать, что $b < a$) и решая уравнение

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0,$$

находим два комплексных корня

$$\lambda_{1,2} = -b \pm i\sqrt{a^2 - b^2}$$

и соответствующее решение уравнения колебаний

$$x = \mathrm{e}^{bt}(C_1 \cos \sqrt{a^2 - b^2}\, t + C_2 \sin \sqrt{a^2 - b^2}\, t),$$

или

$$x = A\mathrm{e}^{-bt} \sin(\sqrt{a^2 - b^2}\, t + \delta).$$

Итак, при наличии сопротивления колебания являются *затухающими*.

Пример 28. Если характеристический многочлен имеет и действительные, и комплексные корни, общее решение строится в виде комбинации решений, соответствующих каждому из корней. Рассмотрим уравнение

$$y''' + y = 0.$$

Корнями его характеристического многочлена являются

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\big(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\big).$$

Комплексный корень корень кратности m. Если характеристический многочлен имеет комплексный корень $\lambda = p + iq$ кратности m (а значит, и корень $\bar{\lambda} = p - iq$ той же кратности), то этой паре соответствует множество решений

$$y = e^{px}\big((C_0 + C_1x + \dots + C_{m-1}x^{m-1})\cos qx + (C'_0 + C'_1x + \dots + C'_{m-1}x^{m-1})\sin qx\big) = \\ = e^{px}\big(A_0 \sin(qx + \delta_0) + A_1 x \sin(qx + \delta_1) + \dots + A_{m-1}x^{m-1}\sin(qx + \delta_{m-1})\big).$$

Пример 29. Рассмотрим уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Его характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda 2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ кратности 2. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = e^x\big((C_0 + C_1x)\cos x + (C'_0 + C'_1x)\sin x\big).$$

В общем виде описанные выше результаты можно представить следующим образом.

Теорема 2. *Пусть характеристический многочлен уравнения*

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{62}$$

имеет различные вещественные корни $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ кратностей $l_1, \dots, l_s$ соответственно и комплексные корни $\mu_1 = p_1 \pm iq_1, \dots, \mu_n = p_n \pm iq_n$ кратностей $m_1, \dots, m_n$, где

$$l_1 + \dots + l_s + 2(m_1 + \dots + m_n) = k.$$

Тогда общее решение уравнения (62) *имеет вид*

$$y = F_1 + \dots + F_s + G_1 + \dots + G_n,$$

где

$$F_i = e^{\lambda_i x}(C^i_0 + C^i_1 x + \dots + C^i_{l_i-1}x^{l_i-1})$$

и

$$G_j = e^{p_j x}\big((D^j_0 + D^j_1 x + \dots + D_{m_j-1}x^{m_j-1})\cos q_j x + (E^j_0 + E^j_1 x + \dots + E_{m_j-1}x^{m_j-1})\sin q_j x\big).$$

4.1.2. Неоднородные уравнения

При решении неоднородных уравнений мы будем пользоваться предложением 3, из которого следует, что общее решение такого уравнения складывается из какого-нибудь его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Мы укажем, как находить частные решения уравнения

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x) \tag{63}$$

в случае, когда правая часть имеет один из следующих видов

$$P_r(x)e^{\lambda x}, \quad e^{px}(P_r(x)\sin qx + Q_r(x)\cos qx), \tag{64}$$

где $P_r(x)$ и $Q_r(x)$ — произвольные многочлены степени r.

Предложение 6. *Частное решение уравнения*

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = P_r(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

может быть найдено в виде

$$x^m R_r(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

где m есть кратность корня λ характеристического многочлена, а уравнения

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \mathrm{e}^{px}(P_r(x)\sin qx + Q_r(x)\cos qx)$$

— в виде

$$x^m \mathrm{e}^{px}(R_r(x)\sin qx + S_r(x)\cos qx),$$

где m есть кратность корня $\lambda = p + iq$ характеристического многочлена[9].

Выше функции $R_r(x)$ и $S_r(x)$ являются многочленами степени r. Коэффициенты этих многочленов, как будет видно из примеров, находятся *методом неопределённых коэффициентов.*

Замечание 13. Пусть y_1 — решение уравнения (63) с правой частью f_1, а y_2 — решение, сответчтвующее правой части f_2. Тогда $\alpha y_1 + \beta y_2$ является решением уравнения с правой частью $\alpha f_1 + \beta f_2$. Поэтому предложение 6 фактически позволяет решать все уравнения (63), правые части которых являются линейными комбинациями функций вида (64).

Пример 30. Рассмотрим уравнение

$$y''' + y'' = x^2 + 1 + 3x\mathrm{e}^x.$$

Согласно сделанному замечанию мы можем независимо рассмотреть два уравнения:

$$y''' + y'' = x^2 + 1$$

и

$$y''' + y'' = 3x\mathrm{e}^x.$$

Характеристический многочлен однородного уравнения имеет вид $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2$; его корни $\lambda_1 = 0$ (кратности 2) и $\lambda_2 = -1$ (кратности 1). Значит, решение первого уравнения следует искать в виде

$$y_1 = x^2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2),$$

а второго — в виде

$$y_2 = \mathrm{e}^x(b_0 + b_1 x),$$

где a_i, b_j — неопределённые коэффициенты. Подставляя y_1 в первое уравнение, получаем

$$\begin{aligned}1 + x^2 = y_1''' + y_1'' &= (a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4)''' + (a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4)'' = \\ &= (6a_1 + 24a_2x) + (2a_0 + 6a_1x + 12a_2x^2) = (6a_1 + 2a_0) + (24a_2 + 6a_1)x + 12a_2x^2.\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{cases} 6a_1 + 2a_0 = 1, \\ 24a_2 + 6a_1, \\ 12a_2 = 1, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_0 = \frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$$y_1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

— частное решение первого уравнения.

Аналогично, подставляя y_2 во второе уравнение, получаем

$$3x\mathrm{e}^x = y_2''' + y_2'' = \big(\mathrm{e}^x(b_0 + b_1x)\big)''' + \big(\mathrm{e}^x(b_0 + b_1x)\big)'' =$$

[9] Если λ не является корнем, то кратность равна нулю.

$$= (3b_1 + b_0 + b_1x)\mathrm{e}^x + (2b_1 + b_0 + b_1x)\mathrm{e}^x = (5b_1 + 2b_0 + 2b_1x)\mathrm{e}^x$$

и, значит,

$$\begin{cases} 5b_1 + 2b_0 = 0, \\ 2b_1 = 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_2 = \mathrm{e}^x\Big(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\Big).$$

Следовательно, общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y = \underbrace{C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2 + C_3x}_{\text{общее решение однородного}} + \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{e}^x\Big(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\Big)}_{\text{частное решение неоднородного}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Пример 31. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = \mathrm{e}^x x \cos x.$$

Числа $\lambda = 1 \pm i$ не являются корнями характеристического многочлена $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$, и поэтому частное решение следует искать в виде

$$y = \mathrm{e}^x\big((a_0 + a_1x)\cos x + (b_0 + b_1x)\sin x\big).$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем

$$\mathrm{e}^x x\cos x = \Big(\mathrm{e}^x\big((a_0 + a_1x)\cos x + (b_0 + b_1x)\sin x\big)\Big)'' - \Big(\mathrm{e}^x\big((a_0 + a_1x)\cos x + (b_0 + b_1x)\sin x\big)\Big) =$$
$$= \mathrm{e}^x\Big(\big(2a_1 + 2b_0 + 2b_1 - a_0 + (2b_1 - a_1)x\big)\cos x + \big(2b_1 - 2a_0 - 2a_1 - b_0 - (2a_1 + b_1)x\big)\sin x\Big).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2a_1 + 2b_0 + 2b_1 - a_0 = 0, \\ 2b_1 - a_1 = 1, \\ 2b_1 - 2a_0 - 2a_1 - b_0 = 0, \\ 2a_1 - b_1 = 0, \end{cases}$$

откуда вытекает, что

$$a_1 = -\frac{1}{5}, \quad b_1 = \frac{2}{5}, \quad a_0 = \frac{14}{25}, \quad b_0 = \frac{2}{25}.$$

Значит, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \underbrace{C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-1}}_{\text{общее решение однородного}} + \underbrace{\mathrm{e}^x\Big(\big(-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25}\big)\cos x + \big(\frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\big)\sin x\Big)}_{\text{частное решение неоднородного}}.$$

Пример 32. Рассмотрим вновь уравнение упругих колебаний без сопротивления (см. пример 26), но при наличии *периодической возмущающей внешней силы*. Это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = p\sin\omega t, \tag{65}$$

где a, p и ω — постоянные. Корнями характеристического многочлена являются $\lambda_{1,2} = \pm ai$, и поэтому возможны два случая.

Случай 1: $\omega \neq a$. Это означает, что частота возмущающей силы не равна частоте собственных колебаний системы. Частное решение должно иметь вид

$$x = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t.$$

Подставляя это выражение в уравнение (65), получаем

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{p}{a^2 - \omega^2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$x = A\sin(at+\delta) + \frac{p}{a^2-\omega^2}\sin\omega t. \tag{66}$$

Таким образом, движение системы получается наложением друг на друга её собственного колебания и вынужденного колебания. Заметим, что амплитуда последнего бесконечно возрастает при приближении вынужденной частоты ω к собственной частоте системы a.

Случай 2: $\omega = a$**.** Частота возмущающей силы совпадает с собственной. Решение в этом случае должно иметь вид

$$x = t(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t).$$

После подстановки в уравнение получаем

$$\alpha = -\frac{p}{2a}, \quad \beta = 0,$$

т.е. общее решение имеет вид

$$x = A\sin(at+\delta) - \frac{p}{2a}\cos at.$$

Таким образом, во втором случае амплитуда колебания неограниченно возрастает. Это явление носит название *резонанса.*

Пример 33. Изучим теперь поведение системы с сопротивлением (см. пример 27) при наличии возмущающей силы. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dt}{dx} = p\sin\omega t. \tag{67}$$

Полагая по-прежнему $b < a$ и опуская вычисления, выпишем общее решение уравнения (67). Оно имеет вид

$$x = A\mathrm{e}^{-bt}\sin(\sqrt{a^2-b^2}\,t+\delta) + \frac{p}{\sqrt{(a^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}\sin(\omega t+\delta'),$$

где

$$\delta' = -\operatorname{arctg}\frac{2b\omega}{a^2-\omega^2}.$$

Таким образом, при больших временах затухающие собственные колебания системы становятся исчезающе малыми по сравнению с вынужденными. «Настоящего» резонанса нет, но при частоте ω, близкой к частоте собственных колебаний a, амплитуда вынужденных колебаний велика из-за малости величины b.

Решение с помощью рядов Фурье. На основе полученных выше результатов линейные уравнения с произвольной правой частью можно решать с помощью рядов Фурье. Покажем это на примере уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + qx = f(x), \qquad q \neq 0.$$

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

— разложение правой части в ряд Фурье.

Возможны два случая.

Случай 1: $q \neq n^2$**.** В этом случае частное решение получается в виде ряда Фурье

$$y = \frac{a_0}{2q} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{a_k}{q-k^2}\cos kt + \frac{b_k}{q-k^2}\sin kt\Big).$$

Можно показать, что этот ряд равномерно сходится и его сумма удовлетворяет уравнению.

Случай 2: $q = n^2$. Если величина q имеет вид n^2 для какого-нибудь натурального n, то решение представляется в виде

$$y = \frac{a_0}{2n^2} + \sum_{k\neq n}\Big(\frac{a_k}{n^2-k^2}\cos kt + \frac{b_k}{n^2-k^2}\sin kt\Big) - t\frac{b_n}{2n}\cos nt + t\frac{a_n}{2n}\sin nt.$$

Таким образом, на частоте n возникает резонанс.

На этом эффекте основана спектроскопия: если известна собственная частота колебаний системы (измерительного прибора) и на неё направлено внешнее воздействие (например, свет), то при наличии в этом воздействии известной частоты возникает резонанс.

4.2. Системы линейных уравнений

Мы будем считать, что рассматриваемые системы являются системами первого порядка (см. замечание 8) и разрешены относительно старшей (т.е. первой) производной. Иначе говоря, мы будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x),\\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x),\\ \dots\\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{68}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ — постоянные. Если все функции $f_1, \dots, f_n$ равны нулю, система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Как и в случае скалярных уравнений, решение линейных систем с постоянными коэффициентами сводится к нахождению общего решения однородной системы и отысканию частного решения неоднородной. Решения однородной ищут в виде

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) = (\gamma_1 e^{\lambda x}, \gamma_2 e^{\lambda x}, \dots, \gamma_n e^{\lambda x}), \qquad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{69}$$

Подставляя выражения (69) в однородную систему (68), получаем

$$\begin{cases} \lambda\gamma_1 e^{\lambda x} = a_{11}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n e^{\lambda x},\\ \lambda\gamma_2 e^{\lambda x} = a_{21}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n e^{\lambda x},\\ \dots\\ \lambda\gamma_n e^{\lambda x} = a_{n1}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + a_{nn}\gamma_n e^{\lambda x}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = 0,\\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = 0,\\ \dots\\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0, \end{cases}$$

т.е. однородную систему линейных уравнений на коэффициенты $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Чтобы эта система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{70}$$

Этот определитель является многочленом степени n относительно λ и называется *характеристическим многочленом системы*. Его корни определяют решения однородной системы. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением систем 2×2.

Итак, рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{71}$$

Её характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{72}$$

Его дискриминант есть

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}.$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: $\Delta < 0$. Пусть $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ — корни характеристического многочлена. Этим корням соответствуют два комплексных решения

$$y_1 = k_1 \mathrm{e}^{(p+iq)x} = k_1 \mathrm{e}^p(\cos qx + i \sin qx), \quad y_2 = k_2 \mathrm{e}^{(p+iq)x} = k_2 \mathrm{e}^p(\cos qx + i \sin qx)$$

и

$$\bar{y}_1 = \bar{k}_1 \mathrm{e}^{(p-iq)x} = \bar{k}_1 \mathrm{e}^p(\cos qx - i \sin qx), \quad \bar{y}_2 = \bar{k}_2 \mathrm{e}^{(p-iq)x} = \bar{k}_2 \mathrm{e}^p(\cos qx - i \sin qx),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Этим комплексным решениям соответствуют два действительных

$$y_1' = \frac{y_1 + \bar{y}_1}{2}, \quad y_2' = \frac{y_2 + \bar{y}_2}{2} \tag{73}$$

и

$$y_1'' = \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i}, \quad y_2'' = \frac{y_2 - \bar{y}_2}{2i}. \tag{74}$$

Пример 34. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + 7y_1 - y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = 0. \end{cases}$$

Её характеристический многочлен имеет вид

$$\begin{vmatrix} -7 - \lambda & 1 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37.$$

Его корни —

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm i.$$

Значит, существуют решения

$$y_1 = k_1 \mathrm{e}^{(-6+i)x}, \quad y_2 = k_2 \mathrm{e}^{(-6+i)x}$$

и

$$\bar{y}_1 = \bar{k}_1 \mathrm{e}^{(-6-i)x}, \quad \bar{y}_2 = \bar{k}_2 \mathrm{e}^{(-6-i)x}.$$

При этом числа k_1 и k_2 должны удовлетворять уравнению

$$(\lambda_1 + 7)k_1 - k_2 = (1 + i)k_1 - k_2 = 0.$$

Аналогично,

$$(\lambda_2 + 7)\bar{k}_1 - \bar{k}_2 = (1 - i)\bar{k}_1 - \bar{k}_2 = 0.$$

Поэтому можно положить

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1 + i, \qquad \bar{k}_1 = 1, \quad \bar{k}_2 = 1 - i.$$

Этим значениям соответствуют комплексные решения

$$y_1 = \mathrm{e}^{(-6+i)x}, \quad y_2 = (1 + i)\mathrm{e}^{(-6+i)x}$$

и

$$\bar{y}_1 = \mathrm{e}^{(-6-i)x}, \quad \bar{y}_2 = (1 - i)\mathrm{e}^{(-6-i)x}.$$

В соответствии с формулами (73) и (74) получает два действительных решения

$$y_1' = \mathrm{e}^{-6x}\cos x, \quad y_2' = \mathrm{e}^{-6x}\sin x$$

и

$$y_1'' = \mathrm{e}^{-6x}(\cos x - \sin x), \quad y_2'' = \mathrm{e}^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

и общее решение в виде

$$y_1 = \mathrm{e}^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \quad y_2 = \mathrm{e}^{-6x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x).$$

Случай 2: $\Delta > 0$. Это означает, что характеристический многочлен имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2. Им соответствуют решения

$$y_1 = k_{11}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = k_{21}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$$

и

$$y_1 = k_{12}\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \quad y_2 = k_{22}\mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

причём между коэффициентами имеют место следующие соотношения

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)k_{11} + a_{12}k_{21} = 0, \\ a_{21}k_{11} + (a_{22} - \lambda_1)k_{21} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)k_{12} + a_{12}k_{22} = 0, \\ a_{21}k_{12} + (a_{22} - \lambda_2)k_{22} = 0. \end{cases}$$

Пример 35. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{y_1}{dx} = 2y_1 + 2y_2, \\ \frac{y_2}{dx} = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

Имеем

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Корни характеристического многочлена — $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -2$. Значит, существуют решения

$$y_1 = k_{11}\mathrm{e}^{3x}, \quad y_2 = k_{21}\mathrm{e}^{3x}$$

и

$$y_1 = k_{12}\mathrm{e}^{-2x}, \quad y_2 = k_{22}\mathrm{e}^{-2x},$$

причём

$$k_{11} = k_{21}, \quad 2k_{12} + k_{22} = 0.$$

Значит, общее решение имеет вид

$$y_1 = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}, \quad y_2 = C_1\mathrm{e}^{3x} - 2C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

Случай 3: $\Delta = 0$. Пусть λ — корень характеристического многочлена кратности 2. Общее решение ищется в виде

$$y_1 = (k_{11} + k_{12}x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y_2 = (k_{21} + k_{22}x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

а связи между коэффициентами находятся из соотношений

$$\begin{cases} k_{12} + \lambda(k_{11} + k_{12}x) = a_{11}(k_{11} + k_{12}x) + a_{12}(k_{21} + k_{22}x), \\ k_{22} + \lambda(k_{21} + k_{22}x) = a_{21}(k_{11} + k_{12}x) + a_{22}(k_{21} + k_{22}x). \end{cases}$$

Пример 36. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Имеем

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9.$$

Характеристический многочлен имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2. Значит, общее решение имеет вид

$$y_1 = (k_{11} + k_{12}x)\mathrm{e}^{3x}, \quad y_2 = (k_{21} + k_{22}x)\mathrm{e}^{3x}.$$

При этом соотношения между коэффициентами таковы:

$$k_{12} + k_{22} = 0, \quad k_{11} + k_{21} = k_{12}.$$

Полагая $k_{12} = C_1$ и $k_{21} = C_2$, получаем общее решение в виде

$$y_1 = (C_1 - C_2 + C_1 x)\mathrm{e}^{3x}, \quad y_2 = (C_2 - C_1 x)\mathrm{e}^{3x}.$$

Аналогичным образом можно построить теорию неоднородных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Мы, однако, опишем альтернативный способ их решения, сводящий решение систем 2×2 к решению двух скалярных уравнений второго порядка.

Пусть

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x) \end{cases} \tag{75}$$

— система 2×2 общего вида. Если коэффициент a_{12} равен нулю, то первое уравнение содержит только одну неизвестную функцию y_1 и его можно разрешить. Подставляя полученное решение во второе уравнение, мы опять получаем скалярное уравнение первого порядка на функцию y_2, которое также решается.

Если $a_{12} \neq 0$, то из первого уравнения получаем

$$y_2 = \frac{\frac{dy_1}{dx} - a_{11}y_1 - f_1(x)}{a_{12}}. \tag{76}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение и приводя подобные члены, мы получим скалярное уравнение второго порядка на функцию y_1:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dy_1}{dx} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22})y_1 = a_{12}f_2 - a_{22}f_1 + f_1',$$

которое можно решить уже известными нам методами[10]. Подставляя полученное решение в равенство (76), мы найдём выражение для y_2, а значит, решим нашу систему.

Пример 37. Рассмотрим систему из примера 34 с нетривиальной правой частью:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + 7y_1 - y_2 = x^2, \\ \frac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = \mathrm{e}^x. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} + 7y_1 - x^2. \tag{77}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + 12\frac{dy_1}{d_x} + 37y_1 = \mathrm{e}^x + 5x^2 + 2x.$$

Частное решение ищем в виде суммы $y' + y''$, где

$$y' = C_0\mathrm{e}^x, \qquad y'' = C_1 + C_2x + C_3x^2,$$

и неопределённые коэффициенты находим из условий

$$\frac{d^2y'}{dx^2} + 12\frac{dy'}{dx} + 37y' = \mathrm{e}^x$$

[10]Заметим, что характеристический многочлен полученного уравнения совпадает с характеристическим многочленом исходной системы.

и
$$\frac{d^2y''}{dx^2}+12\frac{dy''}{d_x}+37y''=5x^2+2x. \tag{78}$$
Из первого уравнения получаем
$$(C_0+12C_0+37C_0)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^c,$$
т.е. $C_0=\frac{1}{50}$, а из второго —
$$2C_3+12(C_2+2C_3x)+37(C_1+C_2x+C_3x^2)=5x^2+2x,$$
т.е.
$$\begin{cases}37C_3=5,\\ 24C_3+37C_2=2,\\ 2C_3+12C_2+37C_1=0.\end{cases}$$
Отсюда следует, что
$$C_3=\frac{5}{37},\quad C_2=-\frac{46}{37^2},\quad C_1=\frac{182}{37^3}.$$
Поскольку корни характеристического многочлена $\lambda^2+12\lambda+37$ — это $\lambda_{1,2}=-6\pm i$, общее решение уравнения (78) имеет вид
$$y_1=\mathrm{e}^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{50}\mathrm{e}^x+\frac{182}{37^3}-\frac{46}{37^2}x+\frac{5}{37}x^2.$$
Выражение для y_2 получается подстановкой этого равенства в (77).

Пример 38. Рассмотрим систему из примера 35 и добавим в неё неоднородность:
$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=2y_1+2y_2+x\mathrm{e}^{3x},\\ \frac{dy_2}{dx}=2y_1-y_2+\sin x.\end{cases}$$
Имеем
$$y_2=\frac{1}{2}\frac{dy_1}{dx}-y_1-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{3x}. \tag{79}$$
Подставив (79) во второе уравнение, получаем
$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{dy_1}{dx}-6y_2=(1+4x)\mathrm{e}^{3x}+2\sin x. \tag{80}$$
Значит, частное решение $y'+y''$, где
$$y'=x(C_0+C_1x)\mathrm{e}^{3x},\qquad y''=C_2\cos x+C_3\sin x,$$
находится из условий
$$\frac{d^2y'}{dx^2}-\frac{dy'}{dx}-6y'=(1+4x)\mathrm{e}^{3x}$$
и
$$\frac{d^2y''}{dx^2}-\frac{dy''}{dx}-6y''=2\sin x.$$
Из первого уравнения следует, что
$$5C_1=2,\quad 2C_1+6C_0=1,$$
т.е.
$$C_1=\frac{2}{5},\quad C_0=\frac{1}{30}.$$
Из второго уравнения получаем
$$\begin{cases}7C_2+C_3=0,\\ C_2-7C_3=2.\end{cases}$$
Значит,
$$C_2=\frac{1}{25},\quad C_3=-\frac{7}{25}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (80) имеет вид

$$y_1 = \left(C_1 + \frac{1}{30}x + \frac{2}{5}x^2\right)\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{25}\cos x - \frac{7}{25}\sin x.$$

Выражение для y_2 получается подстановкой y_1 в равенство (79).

Пример 39. Рассмотрим в заключение систему из примера 36, добавив к ней неоднородность:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 + y_2 + \mathrm{e}^{5x}, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + 2y_2 + x. \end{cases}$$

Имеем

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} - 4y_1 - \mathrm{e}^{5x} \tag{81}$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - 6\frac{dy_1}{dx} + 9y_1 = 3\mathrm{e}^{5x} + x.$$

Стандартным способом находим частное решение

$$\frac{3}{4}\mathrm{e}^{5x} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{27}$$

и общее решение в виде

$$y_1 = (C_0 + C_1x)\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{5x} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{27}.$$

После этого y_2 находится из (81).

5. Операционное исчисление

Операционное исчисление — мощный метод решения различных задач, возникающих в прикладной математике, технической физике и инженерных дисциплинах.

5.1. Преобразование Лапласа

5.1.1. Основные определения

Преобразованием Лапласа для функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt. \tag{82}$$

При этом $f(t)$ называется *оригиналом*, а $F(p)$ — *изображением*. Связь между оригиналом и изображением с помощью формулы (82) мы будем записывать символически

$$f(t) \to F(p).$$

Используются также записи

$$f(t) \risingdotseq F(p), \qquad f(t) \div F(p).$$

В выражении (82) оригиналом $f(t)$ может быть любая комплексная функция действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале;
2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
3) при $t \to +\infty$ функция $f(t)$ либо остаётся конечной, либо, если растёт по модулю, то не быстрее экспоненты, то есть существуют некоторые постоянные $M > 0$ и $s_0 > 0$ такие, что $|f(t)| \leqslant M\mathrm{e}^{s_0 t}$ для любого t.

Изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Пример 40. Покажем, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}\sin 3t & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом. Для этого необходимо проверить выполнение условий 1)–3).

Условие 1) выполняется в силу того, что существует интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t}\sin 3t\,dt$$

для любых конечных t_1 и t_2. Условие 2) выполняется в силу того, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Наконец, условие 3) тоже выполнено, так как для любых вещественных t верна оценка $|e^{2t}\sin 3t| \leqslant e^{2t}$. Поэтому в качестве M в условии 3) можно взять любое число большее 1, а $s_0 = 2$.

Заметим, что простейшим оригиналом является так называемая *единичная функция Хевисайда*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Замечание 14. В дальнейшем будем считать все функции $f(t)$ равными нулю при $t < 0$.

Пример 41. Пользуясь определением, найдём изображение функции

$$f(t) = e^{3t}.$$

Для функции $f(t) = e^{3t}$ имеем $s_0 = 3$. Значит, изображение $F(p)$ является функцией, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 3$. Найдём $F(p)$ по формуле (82):

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{3t}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-3)t}\,dt = \frac{1}{-(p-3)}e^{-(p-3)t}\Big|_0^{+\infty},$$

$\operatorname{Re} p = s > 3$. Итак, $F(p) = \frac{1}{p-3}$.

5.1.2. Таблица некоторых изображений и их оригиналов

Соответствие между некоторыми изображениями и их оригиналами приведено в табл. 1 на с. 34.

Везде в таблице $n \in \mathbb{N}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

5.1.3. Свойства преобразования Лапласа

Ниже перечисляются важнейшие свойства преобразования Лапласа, используемые в дальнейшем.

Свойство линейности. Для любых комплексных постоянных α и β имеет место соответствие

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \to \alpha F(p) + \beta G(p), \tag{83}$$

где

$$f(t) \to F(p), \quad g(t) \to G(p).$$

Теорема подобия. Для любого постоянного $\alpha > 0$ имеем

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{84}$$

	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{sh}\alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch}\alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{-at}\sin\alpha t$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{-at}\cos\alpha t$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
11	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$t^n\mathrm{e}^{\alpha t}$
15	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{a}$	$\frac{\sin at}{t}$
16	$\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}$
17	$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$
18	$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$

Таблица 1. Таблица некоторых изображений и их оригиналов

Дифференцирование оригинала. Если функции $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, причём $f(t) \to F(p)$, то

$$\begin{aligned} &f'(t) \to pF(p) - f(0), \\ &f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\quad\ldots. \\ &f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \end{aligned} \tag{85}$$

где под $f^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, понимается $\lim\limits_{t\to 0+} f^{(k)}(t)$.

Пример 42. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найдём изображение функции

$$f(t) = \sin^2 t.$$

Пусть $f(t) \to F(p)$. Тогда $f'(t) \to pF(p) - f(0)$. Учитывая, что

$$f(0) = 0, \quad f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$$

(см. табл. 1), находим

$$\sin 2t \to \frac{2}{p^2+4}.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{p^2+4} = pF(p), \qquad F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

В результате получаем

$$\sin^2 t \to \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению на $-t$ оригинала:

$$-tf(t) \to F'(p) \tag{86}$$

и

$$(-t)^n f(t) \to F^{(n)}(p), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{87}$$

Пример 43. Найдём изображение функции

$$f(t) = t^2 \mathrm{e}^t.$$

Так как $\mathrm{e}^t \to \frac{1}{p-1}$, по теореме о дифференцировании изображения получаем

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' = -\frac{1}{(p-1)^2}, \qquad t\mathrm{e}^t \to \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Далее имеем

$$\left(-\frac{1}{(p-1)^2}\right)' = -\frac{2!}{(p-1)^3},$$

откуда следует, что

$$t^2\mathrm{e}^t \to \frac{2}{(p-1)^3}.$$

Интегрирование оригинала. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p: если $f(t) \to F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{F(p)}{p}. \tag{88}$$

Пример 44. Найдём изображение функции $\int_0^t \mathrm{e}^\tau d\tau$. Так как $\mathrm{e}^t \to \frac{1}{p-1}$, то по теореме об интегрировании оригинала получаем

$$\int_0^t \mathrm{e}^\tau d\tau \to \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

Интегрирование изображения. Если $\int_p^\infty F(p)\,dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^\infty F(p)\,dp. \tag{89}$$

Пример 45. Найдём изображение функции $\frac{\sin t}{t}$. Так как $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$, на основании теоремы об интегрировании изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \to \int_p^\infty \frac{d\tau}{\tau^2+1} = \operatorname{arctg}\tau\big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Теорема смещения. Если $f(t) \to F(p)$, то для любого комплексного числа p_0 выполняется соответствие

$$\mathrm{e}^{p_0 t} f(t) \to F(p - p_0). \tag{90}$$

Пример 46. Найдём изображение функции $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t$: так как $\cos 2t \to \frac{p}{p^2+4}$, по теореме смещения (при $p_0 = -1$) имеем

$$\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \to \frac{p+1}{(p+1)^2+4}.$$

Теорема запаздывания. Если $f(t) \to F(p)$, то для любого положительного числа τ имеет место соответствие

$$f(t-\tau) \to \mathrm{e}^{-p\tau}F(p).$$

Теоремой запаздывания удобно пользоваться при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Пример 47. Найдём изображение функции $f(t-1) = (t-1)^2$. Для функции $f(t) = t^2$ имеем

$$f(t) \to \frac{2}{p^2}.$$

По теореме запаздывания для функции $(t-1)^2$ получаем

$$(t-1)^2 \to \mathrm{e}^{-p}\frac{2}{p^2}.$$

Заметим, что здесь существенно, что ищется изображение функции $f(t-1)$, равной нулю при $t < 1$ ($t - 1 < 0$ по предположению, см. замечание 14).

Теорема умножения Бореля (теорема о свёртке). Пусть

$$f(t) \to F(p), \quad \varphi(t) \to \Phi(p).$$

Тогда произведение двух изображений $F(p)$ и $\Phi(p)$ также является изображением, причём

$$\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \to F(p)\cdot\Phi(p). \tag{91}$$

Интеграл в левой части называется *свёрткой* функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается через $f(t)*\varphi(t)$:

$$\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(t)*f(t).$$

Пример 48. Найдём изображение функции

$$\psi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)\mathrm{e}^{\tau}\,d\tau.$$

Для этого заметим, что функция $\psi(t)$ является свёрткой функций $f(t) = t$ и $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$. По теореме умножения получаем

$$\psi(t) \to \Psi(p), \qquad \Psi(p) = F(p)\cdot\Phi(p) = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}$$

и, значит,

$$\int\limits_0^t (t-\tau)\mathrm{e}^{\tau}\,d\tau \to \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

1	Линейность	$\alpha f(t)+\beta g(t)\to \alpha F(p)+\beta G(p)$
2	Теорема подобия	$f(\alpha t)\to \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
3	Дифференцирование оригинала	$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-\sum_{i=1}^{n-1}p^{n-i}f^{(i-1)}(0)$
4	Дифференцирование изображения	$(-t)^nf(t)\to F^{(n)}(p)$
5	Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau\to \frac{F(p)}{p}$
6	Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t}\to\int_p^\infty F(p)$
7	Теорема смещения	$\mathrm{e}^{p_0t}f(t)\to F(p-p_0)$
8	Теорема запаздывания	$f(t-\tau)\to \mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$
9	Теорема о свёртке	$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau\to F(p)\cdot\Phi(p)$

Таблица 2. Основные свойства преобразования Лапласа

5.1.4. Нахождение оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ используются свойства преобразования Лапласа, сформулированные выше. Для удобства они сведены в таблице 2.

Мы рассмотрим процедуру нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ в случае, когда $F(p)=\frac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная рациональная дробь[11]. В этом случае дробь раскладывается в сумму простых и у полученных слагаемых находятся оригиналы с использованием описанных свойств преобразования Лапласа.

Пример 49. Найдём оригинал для функции

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

Для этого разложим правую часть в сумму простых дробей:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Из этого равенства следует, что

$$1=A(p-1)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+(Cp+D)p(p-1)$$

т.е

$$\begin{cases} A+B+C=0,\\ A+C-D=0,\\ 4A+4B-D=0,\\ 4A=-1.\end{cases}$$

Значит,

$$A=-\frac{1}{4},\quad B=\frac{1}{5},\quad C=\frac{1}{20},\quad D=-\frac{1}{5}.$$

Поэтому

$$F(p)=-\frac{1}{4p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

Оригиналы простых дробей, входящих в эту сумму, суть

$$1\to\frac{1}{p},$$

$$\mathrm{e}^t\to\frac{1}{p-1},$$

[11]Напомним, дробь называется *рациональной*, если её числитель и знаменатель являются многочленами, а рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя.

$$\cos 2t \to \frac{p}{p^2+4},$$
$$\sin 2t \to \frac{2}{p^2+4}.$$

Отсюда, пользуясь свойством линейности, находим

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

Пример 50. Для изображения $F(p) = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p+1}$ найдём оригинал $f(t)$. Имеем $\mathrm{e}^{-t} \to \frac{1}{p+1}$. Множитель e^{-p} указывает на необходимость применения теоремы запаздывания при $\tau = 1$. Поэтому

$$\mathrm{e}^{-(t-1)} \to \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p+1}.$$

Значит,

$$f(t) = \mathrm{e}^{1-t}.$$

5.2. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа

Применим полученные результаты к решению задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.

5.2.1. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами

$$a_0\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = f(t) \tag{92}$$

и решим задачу Коши для этого уравнения с начальными данными

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{93}$$

Пусть $x(t) \to X(p)$, $f(t) \to F(p)$. Тогда, применяя к обеим частям уравнения (92) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, получим вместо дифференциального уравнения (92) с начальными условиями (93) уравнение

$$\begin{aligned}(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n)X(p) - a_0(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}) - \\ - a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x'_0 + \dots + x_0^{(n-2)}) - \dots - a_{n-2}(px_0 + x'_0 - a_{n-1}x_0 = F(p).\end{aligned} \tag{94}$$

Из уравнения (94) находим

$$X(p) = \frac{F(p) + \psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}, \tag{95}$$

где

$$\begin{aligned}\psi_{n-1}(p) = a_0(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}) + a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x'_0 + \dots + x_0^{(n-2)}) + \dots \\ \dots + a_{n-2}(px_0 + x'_0 - a_{n-1}x_0)\end{aligned}$$

и

$$\varphi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n.$$

Выражение (95) представляет собой изображение решения $x(t)$ уравнения (92). Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы получим решение задачи Коши для уравнения (92). Если заданы нулевые начальные условия, т.е.

$$x_0 = x_0' = \dots = x_0^{(n-1)} = 0,$$

то решение уравнения (94) примет вид

$$X(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Найдя оригинал этого изображения, получим решение задачи Коши уравнения (92) при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$. Тогда, если $x(t) \to X(p)$ и $f(t) \to F(p)$, то получаемое уравнение имеет вид

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) - (a_0 p x_0 + a_0 x_0' + a_1 x_0) = F(p),$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_0' + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Находя по изображению $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы получим решение поставленной задачи Коши.

Пример 51. Решим задачу Коши для уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t$$

с начальными условиями $x_0 = x_0' = 0$.

Пусть $x(t) \to X(p)$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} \to pX(p) - x(0) = pX(p),$$
$$\frac{d^2 x}{dt^2} \to p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p)$$

и, поскольку

$$t \to \frac{1}{p^2},$$

имеем

$$X(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2},$$

т.е.

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)}.$$

Чтобы найти для этого изображения оригинал, разложим дробь, стоящую в правой части, на элементарные:

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+2},$$

где A, B, C, D — неопределённые коэффициенты, которые находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ 3A + B + 2C + D = 0, \\ A + 3B = 0, \\ 2B = 1. \end{cases}$$

Решая её, получаем

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{5}{2}, \quad D = -1.$$

Значит

$$X(p) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}.$$

Воспользовавшись данными таблиц 1 и 2, находим решение в виде

$$x(t) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}.$$

Пример 52. Решим задачу Коши

$$x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&x(t) \to X(p),\\
&x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p),\\
&x''(t) \to p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1,\\
&\cos t \to \frac{p}{p^2+1}.
\end{aligned}$$

Значит

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1},$$

или

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t, \quad \frac{2p}{(p^2+1)^2} \leftarrow t\sin t,$$

оригиналом для $X(p)$ служит функция $(t-1)\sin t$, откуда получаем решение

$$x(t) = (t-1)\sin t.$$

5.2.2. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом производится аналогично тому, как решается одно дифференциальное уравнение. Пусть, например, дана система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2} + b_{ik}\frac{dx_k}{dt} + c_{ik}x_k \right) = f_i(t),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, где a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} — постоянные, и начальные данные

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad x'_k(0) = \beta_k.$$

Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения функций $x_k(t)$ и $f_i(t)$ соответственно, перейдём от исходной системы к системе уравнений для изображений

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}p^2 + b_{ik}p + c_{ik} \right) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{n} \left((a_{ik}p + b_{ik})\alpha_k + a_{ik}\beta_k \right),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Решая эту систему как линейную алгебраическую систему уравнений относительно $X_k(p)$, найдём изображения $X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Это и будет решение задачи Коши для исходной системы дифференциальных уравнений.

Пример 53. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x'' = 3(y - x + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z \end{cases}$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x'(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, & y'(0) &= -1, \\ z(0) &= 1, & z'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$x(t) \to X(p), \quad y(t) \to Y(p), \quad z(t) \to Z(p).$$

После преобразования Лапласа система перепишется в виде

$$\begin{cases} p^2 X(p) = 3(Y(p) - X(p) + Z(p)), \\ p^2 Y(p) + 1 = X(p) - Y(p), \\ p^2 Z(p) - p = -Z(p). \end{cases}$$

Решая её относительно неизвестных $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$, получаем

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \\ Y(p) &= \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1}, \\ Z(p) &= \frac{p}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Найдём оригиналы этих изображений. Для этого разложим дроби $\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}$ и $\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)}$ в суммы элементарных.

Имеем

$$\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^2+4},$$

откуда

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + D = 0, \\ 4A = 3, \\ 4B = -3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = -\frac{3}{4}, \quad D = \frac{3}{4}, \quad C = -\frac{3}{4}$$

и

$$X(p) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2+4}.$$

Находя оригинал для каждого слагаемого, получим

$$x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t.$$

Далее положим

$$\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1} + \frac{Lp+M}{p^2+4},$$

откуда следует, что
$$\begin{cases} A + C + L = 0, \\ B + D + M = 0, \\ 5A + 4C + L = 0, \\ 5B + 4D + M = 0, \\ 4A = 3, \\ 4B = -3. \end{cases}$$
Решая эту систему, получаем
$$A = \frac{3}{4}, \quad B = -\frac{3}{4}, \quad C = -1, \quad D = 1, \quad L = \frac{1}{4}, \quad M = -\frac{1}{4},$$
т.е.
$$Y(p) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2+4}.$$
Оригиналом этого изображения является функция
$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \cos t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$
Наконец, оригиналом для $Z(p) = \frac{p}{p^2+1}$ служит функция
$$z(t) = \cos t.$$
Итак, получили решение поставленной задачи:
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t, \\ y(t) &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \cos t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t, \\ z(t) &= \cos t. \end{aligned}$$