## ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Мы определяли функцию одного вещественного аргумента как отображение $f\colon D \to \mathbb{R}$ некоторого подмножества $D \subset \mathbb{R}$ действительных чисел в действительные числа. Аналогичное определение можно дать и в случае нескольких аргументов:

Определение 1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — подмножество множества $n$-мерного арифметического пространства. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}$ называется *функцией $n$ вещественных аргументов* $(x_1, \ldots, x_n)$. При этом множество $D$ называется *областью определения* функции $f$, а множество

$$V = \{\, u \in \mathbb{R}^n \mid u = f(x) \,\}$$

— *областью допустимых значений*. *Графиком* функции $u = f(x)$ называется множество

$$\{\, (x_1, \ldots, x_n, u) \mid u = f(x_1, \ldots, x_n) \,\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Это определение, однако, является слишком общим, широким, и в следующем параграфе мы уточним, какие области определения допускаются нами к рассмотрению. Чтобы это сделать, нам понадобятся элементарные сведения из *топологии* пространств $\mathbb{R}^n$.

# 1. Непрерывность

Зафиксируем некоторое число $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. *Расстоянием* между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется величина

$$\rho = \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

*Открытым шаром* размерности $n$, радиуса $r > 0$ и с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$B^n(x, r) = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, y) < r \,\} \subset \mathbb{R}^n.$$

*Замкнутым шаром* размерности $n$, радиуса $r > 0$ и с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$\bar{B}^n(x, r) = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, y) \leqslant r \,\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Пример 1. Рассмотрим простейшие случаи — $n - 1$ (прямая), $n = 2$ (плоскость) и $n = 3$ (трёхмерное пространство).

1) Расстоянием между двумя точками с координатами $x$ и $y$ на прямой является величина $|x - y|$, т.е. длина соединяющего их отрезка. Открытый шар радиуса $r$ с центром в точке $x$ — это интервал $(x - r, x + r)$, а замкнутый — отрезок $[x - r, x + r]$.
2) Расстояние на плоскости — это

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

т.е. «самое обычное» расстояние. Двумерным открытым шаром является круг без границы, а замкнутым — тот же круг, но вместе с описывающей его окружностью.
3) В трёхмерном пространстве расстоянием также является длина отрезка, соединяющего соответствующие точки, открытым шаром — «настоящий» шар (без граничной сферы), а замкнутым — тот же шар, но уже с ограничивающей его сферой.

Открытый шар, содержащий некоторую точку, называется её *окрестностью*.

Определение 3. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если у любой точки $x \in M$ найдётся окрестность, целиком содержащаяся в $M$.

Пример 2. Любой открытый шар являеьтся открытым множеством в смысле определения 3. Открытыми являются пустое множество и всё пространство $\mathbb{R}^n$.

Расмотрим некоторое множество $M \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 4. *Замыканием* множества $M$ называется множество

$$\bar{M} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid B^n(x,r) \cap M \neq \varnothing, \forall r \}.$$

Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Пример 3. Замыканием открытого шара $B^n(x,r)$ является замкнутый шар $\bar{B}^n(x,r)$, и, значит, последний замкнут в смысле определения 4. Пустое множество и всё пространство $\mathbb{R}^n$ также замкнуты.

Замечание 1. Замыкание множества состоит из точек этого множества, а также точек, которые невозможно отделить от рассматриваемого множество, «бесконечно к нему близких». Такими, например, являются крайние точки $a$ и $b$ по отношению к интервалу $(a,b)$.

*Кривой* в $n$-мерном пространстве называется совокупность непрерывных функций

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), \qquad t \in [a,b].$$

Определение 5. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если для любых двух точек $x$ и $y \in \mathbb{R}^n$ можно построить такую кривую, что

$$(x_1(a), \dots, x_n(a)) = x, \qquad (x_1(b), \dots, x_n(b)) = y$$

и

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in M, \quad \forall t \in [a,b].$$

Таким образом, связным является такое множество, каждые две точки которого можно соединить кривой, целиком лежащей в этом множестве.

Замечание 2. Множества, которые мы назвали связными, в математической литературе часто называются *линейно связными*. Мы для простоты будем пользоваться термином «связный».

Пример 4. Любой шар, открытый или замкнутый, связен. Связным также является всё пространство $\mathbb{R}^n$. Множество

$$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geqslant 0 \}$$

несвязно — оно является объединением двух непересекающихся подмножеств

$$M_- = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \}, \qquad M_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \},$$

и ни одну точку из $M_-$ нельзя связать с точкой из $M_+$ кривой, целиком лежащей в $M$.

Определение 6. *Открытой* (*замкнутой*) *областью* в $\mathbb{R}^n$ называется открытое (замкнутое) связное множество $D \subset \mathbb{R}^n$.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать функции, чья область определения является областью в указанном выше смысле.

Замечание 3. Конечно, легко придумать функцию чья область определения не является областью в смысле определения 6. Простой пример:

$$y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Здесь область определения распадается на два непересекающихся подмножества (см. пример 4), но мы можем рассматривать нашу функцию на подмножествах $M_-$ и $M_+$ как две разные функции.

**Пределы.** Теория пределов для функций многих аргументов является непосредственным обобщением теории пределов, развитой нами для функций одного действительного аргумента.

Определение 7. Рассмотрим функцию $u = f(x_1, \dots, x_n)$ с областью определения $D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть точка $a$ принадлежит замыканию множества $D$. Говорят, что число $A$ является *пределом* функции $f$ в точке $a$ (и пишут $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любой точки $x \in D \cap B^n(a, r)$ выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

если $r < \delta$.

Аналогично определяются бесконечные пределы. Например, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если для любого числа $A$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любого открытого шара с центром в точке $a$ и радиуса $r < \delta$ будет выполняться неравенство

$$f(x) > A, \qquad \forall x \in D \cap B^n(a, r).$$

Так же, как и в случае функций одного аргумента, определяется предел функций нескольких переменных при $x \to \infty$.

Для функций многих переменных справедливы те же теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0.$$

Пример 6. Если «совсем немного» изменить функцию из предыдущего примера и положить

$$u = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

то предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ уже не будет существовать.

Вычислять пределы функций многих переменных, пользуясь только их определением, как правило, чрезвычайно трудно. Мощным и эффективным инструментом вычисления таких пределов является формулируемая ниже теорема 1. Суть её такова (для простоты мы рассмотрим случай двух переменных).

Предположим, нам нужно вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} f(x_1, x_2)$ и точка $a$ имеет координаты $(a_1, a_2)$. Стремление точки $x$ к $a$ означает, что $x_1 \to a_1$ и $x_2 \to a_2$, и можно попытаться сделать следующее. Зафиксируем какое-нибудь значение переменной $x_2$ и рассмотрим предел $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2)$. Последний, если он существует, является функцией переменной $x_2$, и мы можем рассмотреть так называемый *двойной предел* $\lim\limits_{x_2\to a_2} \lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2)$. Возникает естественный вопрос: справедливо ли равенство

$$\lim_{x\to a} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2\to a_2} \lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2)? \tag{1}$$

Пример 7. Обратимся к примеру 5:

$$\lim_{x_2\to 0} \left( \lim_{x_1\to 0} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \lim_{x_2\to 0} 0 = 0,$$

и, значит, равенство (1) выполняется.

Пример 8. Наоборот, в примере 6 это равенство уже не выполняется.

Теорема 1. *Пусть:*

1) *существует (конечный или бесконечный) предел*

$$A = \lim_{x\to a} f(x_1, x_2); \tag{2}$$

2) *при любом $x_2$ существует* <u>*конечный*</u> *простой предел*

$$g(x_2) = \lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2).$$

*Тогда существует двойной пределе*

$$\lim_{x_2 \to a_2} g(x_2) = \lim_{x_2 \to a_2} \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2)$$

*и он совпадает с пределом* (2).

Определение 8. Пусть $u = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция $n$ переменных и точка $a$ принадлежит области её определения. Функция называется *непрерывной* в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, если

$$\lim_{x \to a} f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n).$$

Функция называется *непрерывной* внекоторой *области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

**Свойства непрерывных функций.** Опишем основные свойства непрерывных функций многих переменных.

Предложение 1. *Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $a$ (области $D$) как функция $n$ переменных. Тогда она непрерывна и как функция каждой из переменных $x_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Предложение 2. *Пусть функции $u = f(x_1, \dots, x_n)$ и $u = g(x_1, \dots, x_n)$ непрерывны в точке $a$ (области $D$). Тогда функции*

$$f(x_1, \dots, x_n) \pm g(x_1, \dots, x_n), \quad f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n)$$

*также непрерывны в этой точке (области). Функция*

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)}$$

*непрерывна во всех точках $a$, где $g(a) \neq 0$.*

Определение 9. Рассмотрим функцию $n$ аргументов $u = f(x_1, \dots, x_n)$ и совокупность

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k),$$

состоящую из $n$ функций, зависящих от $k$ аргументов. Тогда функция

$$u = f\big(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k)\big)$$

называется *суперпозицией* функций (или, иначе, *сложной фунции*).

Предложение 3. *Если функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, функции*

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k),$$

*непрерывны в точке $b = (b_1, \dots, b_k)$ и*

$$a_1 = \varphi_1(b_1, \dots, b_k), \dots, a_n = \varphi_n(b_1, \dots, b_k),$$

*то их суперпозиция непрерывна в точке $b$.*

Для функций многих переменных справедливы теоремы Больцано–Коши и Вейерштрасса. Сформулируем их.

Теорема 2 (первая теорема Больцано–Коши). *Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна в области $D$ и в некоторых точках $a, b \in D$ принимает значения разных знаков. Тогда найдётся точка $o \in D$, в которой функция принимает нулевое значение.*

Теорема 3 (вторая теорема Больцано–Коши). *Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна в области $D$ и в некоторых точках $a, b \in D$ принимает значения $A = f(a)$ и $B = f(b)$, $A < B$. Тогда для любого числа $C \in [A, B]$ найдётся точка $c \in D$, в которой функция принимает значение $C$.*

Определение 10. Область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченной*, если существует шар, целиком её содержащий: $D \subset B^n(x, r)$.

Теорема 4 (первая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $D$. Тогда она ограничена сверху и снизу в этой области, т.е. существуют такие числа $m$ и $M$, что*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

*для любой точки $x \in D$.*

Теорема 5 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $D$. Тогда в этой области она достигает своих точных верхней и нижней граней.*

## 2. Дифференцируемость

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой открытой области и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка этой области. Рассмотрим такое приращение $\Delta x$ переменной $x_i$, что точки с координатами

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

по-прежнему лежат в этой области. Положим

$$\Delta_i f = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Определение 11. Предел (если он существует)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_i f}{\Delta x}$$

называется *$i$-ой частной производной* функции $f$ (или *частной производной по переменной $x_i$*).

Пример 9. Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Если $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Важное свойство частных производных, которое неоднократно будет использоваться в дальнейшем, связано с дифференцированием суперпозиций (см. определение 9).

Теорема 6 (производная сложной функции). *Рассмотрим функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, зависящую от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и пусть*

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_k). \tag{3}$$

*Предположим, что существуют все частные производные*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

*и*

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}.$$

*Тогда определены производные* $\frac{\partial f}{\partial t_j}$, $j = 1, \ldots, k$, *и справедливы равенства*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial t_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial t_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial t_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial t_k}. \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 4. Рассмотрим столбцы

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_1} \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

понимаемые как $k \times 1$- и $n \times 1$-матрицы соответственно, а также $k \times n$-матрицу

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_k} & \frac{\partial x_2}{\partial t_k} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда систему равенств (5) в матричном виде можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_k)} \circ \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{6}$$

Такая запись является точным аналогом формулы для *производной сложной функции*, которую мы выписывали для функций одного аргумента.

Определение 12. Матрица (5) называется *якобианом* системы функций

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_k).$$

Пример 10. Рассмотрим функцию $u = f(x, y)$ и предположим, что $x = \varphi(z)$, $y = \psi(t)$. Тогда $u$ является функцией переменных $z$ и $t$ в силу равенств

$$u = f(\varphi(z, t), \psi(z, t)).$$

При этом

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Рассмотрим случай, когда в равенствах (3) количество новых переменных $t_1, \ldots, t_k$ совпадает с количеством старых $x_1, \ldots, x_n$, т.е. $n = k$. Тогда эти равенства можно понимать как *замену переменных*, т.е. переход от переменных $x$ к переменным $t$.

Определение 13. Замена переменных

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n) \tag{7}$$

называется *невырожденной* в некоторой точке, если соответствующий якобиан является невырожденной матрицей, т.е.

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_n} & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Предложение 4. *Если замена переменных невырождена в точке $t = (t_1, \ldots, t_n)$, то она невырождена и в некоторой окрестности этой точки.*

Теорема 7 (теорема об обратной функции). *Пусть задана замена переменных (7), невырожденная в некоторой точке. Тогда найдётся окрестность этой точки, в которой рассматриваемая замена обратима, т.е. найдутся такие функции*

$$t_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_n = \psi_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{8}$$

*что*

$$\begin{cases} t_1 = \psi_1(\varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)), \\ t_2 = \psi_2(\varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = \psi_n(\varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)) \end{cases}$$

*и*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n)), \\ x_2 = \varphi_2(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n)). \end{cases}$$

*При этом якобианы замен (3) и (8) являются взаимно обратными матрицами, т.е.*

$$\frac{D(t_1, \ldots, t_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \circ \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)} = \mathbf{E}, \qquad \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)} \circ \frac{D(t_1, \ldots, t_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \mathbf{E},$$

*где $\mathbf{E}$ — единичная $n \times n$-матрица.*

Следствие 1. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = a_n \end{cases} \tag{9}$$

*относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ в орестности точки, в которой якобиан*

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$$

*невырожден. Тогда, если $a_i$ принадлежит области допустимых значений функции $\varphi_i$ в рассматриваемой окрестности, $i = 1, \ldots, n$, то эта система имеет единственное решение в той же окрестности.*

Следствие 2 (теорема о неявной функции). *Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

*относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, где $y_1, \ldots, y_m$ — некоторые параметры, и предположим, что в окрестности некоторой точки $x \in \mathbb{R}^n$ якобиан $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ невырожден. Тогда существует окрестность этой точки, в которой система (10) разрешима, т.е. приводится к виду*

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(y_1, \ldots, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \psi_n(y_1, \ldots, y_m). \end{cases} \tag{11}$$

*При этом выполняется матричное равенство*

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_x)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \circ \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_m)} + \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = 0, \tag{12}$$

*или*

$$\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(y_1,\dots,y_m)} = -\Big(\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_x)}{D(x_1,\dots,x_n)}\Big)^{-1} \circ \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(y_1,\dots,y_m)}, \tag{13}$$

*где якобиан* $\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(y_1,\dots,y_m)}$ *вычисляется в силу равенств* (11), *а остальные — в силу* (10).

Теперь мы определим для функций многих переменных понятие *дифференцируемости*. Рассмотрим функцию $u = f(x_1,\dots,x_n)$ и точку $x$, принадлежащую области её определения. Задим каждому аргументу $x_i$ приращение $\Delta x_i$, $i = 1,\dots,n$, и положим

$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n^2)}.$$

Таким образом, величина $\Delta\rho$ измеряет расстояние, на которое точка отстоит от исходной после приращения её координат. Положим

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1,\dots,x_n + \Delta x_n) - f(x_1,\dots,x_n).$$

Иными словами, $\Delta f$ — соответствующее приращение функциию

Определение 14. Функция $u = f(x_1,\dots,x_n)$ называется *дифференцируемой* в точке $x$, если в рассматриваемой точке её приращение имеет вид

$$\Delta f = \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n + o(\rho), \tag{14}$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — постоянные, а $o(\rho)$ — величина, бесконечно малая по отношению к $\rho$. Величина

$$df = \alpha_1\,dx_1 + \dots + \alpha_n\,dx_n \tag{15}$$

называется *главной частью* приращения функции, или её *дифференциалом*.

Теорема 8. *Если у функции $u = f(x_1,\dots,x_n)$ существуют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $x$, то она дифференцируема в этой точке, причём её дифференциал имеет вид*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \tag{16}$$

Следствие 3. *Если функция $u = f(x_1,\dots,x_n)$ обладает непрерывными производными в некоторой точке, то и сама функция непрерывна в этой точке.*

Рассмотрим некоторую функцию $u = f(x_1,\dots,x_n)$ и предположим, что переменные $x_1,\dots,x_n$ сами являются функциями некоторых параметров $t_1,\dots,t_k$:

$$x_1 = \varphi_1(t_1,\dots,t_m),\dots,x_n = \varphi_n(t_1,\dots,t_m). \tag{17}$$

Тогда $u$ становится сложной функцией, зависящей от $t_1,\dots,t_m$, и её дифференциал можно вычислить двумя способами:

1) вычислить частные производные $\frac{\partial f}{\partial t_j}$ и положить

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1}\,dt_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_m}\,dt_m; \tag{18}$$

2) сначала вычислить дифференциал фунции $u$ как функции переменных $x_1,\dots,x_n$, т.е. положить

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n, \tag{19}$$

а потом вычислить дифференциалы функций $x_i = \varphi_i(t_1,\dots,t_m)$:

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}\,dt_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_m}\,dt_m \tag{20}$$

и подставить выражения (20) в формулу (19).

В итоге мы получим

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\,dt_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m}\,dt_m\Big) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}\,dt_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_m}\,dt_m\Big) =$$
$$= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}\Big)\,dt_1 + \dots + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_m}\Big)\,dt_m. \qquad (21)$$

Однако в силу теоремы 6 (равенства (4)) правая часть равенств (21) совпадает с правой частью равенств (18). Иначе говоря, оба способа вычисления дифференциала приводят к одному и тому же результату. Это свойство дифференциала называется его *инвариантностью.*

Следствиями инвариантности дифференциала являются формулы для дифференциалов элементарных арифметических выражений:

$$d(cf) = c\,df, \qquad (22)$$
$$d(f \pm g) = df \pm dg, \qquad (23)$$
$$d(fg) = f\,dg + g\,df, \qquad (24)$$
$$d\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}, \qquad (25)$$

где $c$ — постоянная, а $f$ и $g$ — функции произвольного (и, возможно, различного) числа аргументов.

**Дифференциал и приближённые вычисления.** Формула (18) для диффренциала функции, а также его инвариантность позволяют решить вполне практическую задачу об оценке *погрешности* различных вычислений.

Пример 11. Погрешность измерения линейных размеров комнаты составляет 5%. Какова погрешность вычисления её площади и объёма?

Пример 12. Погрешность измерения сторон прямоугольного треугольника равна 10%. Какова погрешность вычисления его гипотенузы?

Пример 13. Погрешность измерения длины пути составляет 5%, а времени — 1%. Какова погрешность вычисления скорости?

Прежде чем ответить на эти вопросы, напомним определения.

Определение 15. Пусть $a$ — точное значение некоторой величины и $a^*$ — его приближённая оценка (полученная прямым измерением или вычислением). Тогда величины

$$|a - a^*|, \qquad \frac{|a - a^*|}{|a^*|} \qquad (26)$$

называются соответственно *абсолютной* и *относительной погрешностями* оценки.

Пусть теперь $a$ зависит от некоторых параметров $p_1, \dots, p_n$ и известны отклонения $\Delta p_1, \dots, \Delta p_n$ оценки каждого из параметров от точных значений. Тогда, если предположить, что функция $a = a(p_1, \dots, p_n)$, описывающая зависимость рассматриваемой величины от параметров, является дифференцируемой, имеет место приближённое равество

$$\Delta a \sim \frac{\partial a}{\partial p_1}\Delta p_1 + \dots + \frac{\partial a}{\partial p_n}\Delta p_n,$$

из которого, при «небольших» значениях отклонений $\Delta p_i$ следует неравенство

$$|\Delta a| \leqslant \left|\frac{\partial a}{\partial p_1}\right| |\Delta p_1| + \dots + \left|\frac{\partial a}{\partial p_n}\right| |\Delta p_n|.$$

Обозначая через $\delta$ *максимальное* значение абсолютной погрешности, мы приходим к равенству

$$\delta a = \left|\frac{\partial a}{\partial p_1}\right| \delta p_1 + \dots + \left|\frac{\partial a}{\partial p_n}\right| \delta p_n, \qquad (27)$$

которое и используется для оценки погрешности вычисленной величины.

В частности, из формулы (23) следует, что

$$\delta(a \pm b) = \delta a + \delta b, \tag{28}$$

т.е. *при сложении или вычитании величин их абсолютные погрешности всегда складываются.*

Заметим теперь, что из инвариантности дифференциала вытекает равенство

$$d(\ln a) = \frac{da}{a},$$

откуда, в силу того, что

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$$

следует, что

$$\frac{\delta(ab)}{|ab|} = \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|}, \qquad \frac{\delta(a/b)}{|a/b|} = \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|}. \tag{29}$$

Таким образом, *при умножении или делении величин их относительные погрешности всегда складываются.*

Пример 14. Теперь мы можем ответить на вопросы, поставленные в примерах 11–13.

**Пример 11:** Из первого равенства (29) мы немедленно поллучаем, что относительная погрешность определения площади составляет 5%+5% = 10%, а объёма — 5%+5%+5% = 15%.

**Пример 12:** Пусть $a$ и $c$ — катеты, а $b$ — гипотенуза рассматриваемого треугольника. Тогда по теореме Пифагора $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и в силу равенства (27)

$$\delta c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\delta a + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\delta b,$$

или

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\delta a}{a} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\delta b}{b}.$$

Значит, если относительные погрешности измерения катетов совпадают и равны, скажем, $e$, то относительная погрешность вычисления гипотенузы равна $2e = 20\%$.

**Пример 13:** Пусть $s$ — путь, $t$ — время и $v$ — скорость. Тогда из второго равенства (29) следует, что

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\delta s}{s} + \frac{\delta t}{t} = 5\% + 1\% = 6\%.$$

## 3. Исследование функций многих переменных

В этом параграфе мы изучим, как находить минимумы и максимумы функций многих переменных.

Определение 16. Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в открытой области и $x$ — точка этой области. Говорят, что функция $u$ достигает в точке $x$ *локального минимума* (*максимума*), если существует такая окрестность $B^n(x,r)$, что $f(x) \leqslant f(x')$ ($f(x) \geqslant f(x')$) для любой точки $x' \in B^n(x,r)$. Локальные минимумы или максимумы называются *экстремумами.*

Необходимое условие существование экстремума для функций многих переменных формулируется аналогично случаю функции одного аргумента.

Теорема 9. *Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x$ и в самой точке существуют все частные призводные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда все они обращаются в нуль в рассматриваемой точке.*

Точки области определения функции, в которых все её производные обращаются в нуль, называются *стационарными.* Как и вслучае одной переменной, обращение в нуль первых производных не является достаточным для существования экстремума.

Пример 15. Производные функции $u = x^2 - y^2$ равны

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

и, очевидно, обращаются в нуль в точке $(0,0)$, однако функция не достигает в этой точке ни максимума, ни минимума.

Достаточные условия существования экстремума у функций многих переменных значительно сложнее, чем в случае функций одного аргумента. Чтобы из сформулировать, введём нужные нам понятия.

**Производные высших порядков.** Рассмотрим вначале простейший случай функции двух переменных $u = f(x,y)$. Предположим, что в некоторой области существуют частные производные этой функции по обеим переменным. Тогда эти производные сами являются являются функциями двух переменных и их тоже можно продифференцировать, рассмотрев производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Эти производные (если, конечно, они существуют) называются *частными производными второго порядка.*

Пример 16. Возвращаясь к примеру 15, мы видим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Заметим, что в рассмотренном примере вторые производные функции $u$ по $x$ и по $y$, взятые в разном порядке (такие производные называются *смешанными*), совпадают. Этот факт не случаен, и справедлив следующий результат.

Теорема 10. *Предположим, что:*

1) *функция $u = f(x,y)$ определена в открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$;*
2) *в этой области существуют первые производные*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}$$

*и вторые смешанные производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x};$$

3) *последние производные непрерывны в рассматриваемой точке.*

*Тогда имеет место равенство*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Непрерывность смешанных производных существенна для того, чтобы утверждение теоремы 10 оставалось справедливым.

Пример 17. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0,\ y = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\Big(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\Big), & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0,\ y = 0. \end{cases}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\Big(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big), & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x=0,\ y=0, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1.$$

Если производные второго порядка можно продифференцировать, то мы получим шесть производных третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

Среди этих производных четыре являются смешанными, и, если они непрерывны, то, в силу теоремы 10, выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}.$$

Вообще, если все частные производные функции $u = f(x, y)$ порядка $n$ существуют и непрерывны, то мы имеем $n+1$ производную

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}},\ \frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

Для функций произвольного числа переменных имеет место следующий результат, обобщающий теорему 10:

Теорема 11. *Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в открытой обрасти $D \subset \mathbb{R}^n$ и имеет в этой области все частные производные до порядка $n-1$ включительно, а также смешанные производные порядка $n$, причём последние непрерывны в рассматриваемой области. Тогда значение любой $n$-й смешанной производной не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования функции $u$.*

Теперь можно сформулировать достаточные условия существования экстремума. Мы сделаем это для функций, зависящих от двух переменных.

Определение 17. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в области $D$ и имеет в этой области непрерывные производные первого и второго порядка. Матрица

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \tag{30}$$

называется *гессианом* функции $f$.

Обозначим через

$$\Delta_{H(f)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)^2$$

определитель гессиана, а через

$$\mathrm{tr}_{H(f)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

его след.

Теорема 12 (достаточные условия существования экстремума). *Путь функция $u = f(x, y)$ определена в открытой области $D$ и имеет в этой области непрерывные производные первого и второго порядка. Рассмотрим стационарную точку $x \in D$ и значения $\Delta_{H(f)}$ и $\mathrm{tr}_{H(f)}$ в этой точке. Тогда:*

1) *если* $\Delta_{H(f)} > 0$ *и* $\mathrm{tr}_{H(f)} < 0$, *то функция достигает максимума в точке* $x$;
2) *если* $\Delta_{H(f)} > 0$ *и* $\mathrm{tr}_{H(f)} > 0$, *то функция достигает минимума в точке* $x$;
3) *если* $\Delta_{H(f)} < 0$, *то экстремума нет (при равенстве* $\mathrm{tr}\, H_f = 0$ *имеет место седло).*

Если в стационарной точке определитель гессиана обращается в нуль, то для выяснения того, является ли эта точка экстремальной, нужно привлекать более тонкие критерии, рассмотрение которых входит за рамки настоящего текста.

## 4. Поверхности

Так же как кривые обобщают понятие графика функции одного аргумента, понятие *поверхности* является обобщением понятия графика функции двух аргументов.

Определение 18. Множество точек $S$ трёхмерного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0, \tag{31}$$

называются *поверхностью*, если в каждой точке множества $S$ хотя бы одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ отлична от нуля.

Пример 18. Множество точек, задаваемых уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{32}$$

является *сферой* радиуса $R$ с центром в начале координат.

Из теоремы 2 о неявной функции следует, что в окрестности каждой точки, лежащей на поверхности, уравнение (31) можно разрешить относительно хотя бы одной из неизвестных, т.е. представить её в одном из видов

$$x = g(y, z), \quad y = h(x, z), \quad z = f(x, y), \tag{33}$$

т.е. в виде графика функции.

Замечание 5. Представление (33), вообще говоря, возможно именно в некоторой окрестности, и оно может меняться при переходе от точки к точке. Например, при $z > 0$ сферу можно представить в виде

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

но при $z < 0$ такое представление уже не имеет места.

Обобщением представления (33) является задание поверхностей в виде

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \tag{34}$$

где точка $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ принадлежит некоторой открытой области плоскости. При этом мы будем считать, что функции $\varphi$, $\psi$ и $\chi$ дифференцируемы. Точка, лежащая на поверхности, называется *неособой* (или *точкой общего положения*), если векторы

$$U = \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u}\Big), \qquad V = \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \chi}{\partial v}\Big) \tag{35}$$

линейно независимы в этой точке.

В каждой точке общего положения векторы (35) определяют плоскость, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности в рассматриваемой точке. Из определения касательной плоскости немедленно следует, что её параметрические уравнения имеют вид

$$x = \frac{\partial \varphi(a)}{\partial u}\lambda + \frac{\partial \varphi(a)}{\partial v}\mu + x_0, \quad y = \frac{\partial \psi(a)}{\partial u}\lambda + \frac{\partial \psi(a)}{\partial v}\mu + y_0, \quad z = \frac{\partial \chi(a)}{\partial u}\lambda + \frac{\partial \chi(a)}{\partial v}\mu + z_0, \tag{36}$$

где $a = (x_0, y_0, z_0)$ — рассматриваемая точка поверхности и $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$. Те же уравнения можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial\varphi(a)}{\partial u} & \frac{\partial\psi(a)}{\partial u} & \frac{\partial\chi(a)}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi(a)}{\partial v} & \frac{\partial\psi(a)}{\partial v} & \frac{\partial\chi(a)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \tag{37}$$

или

$$\Big(\frac{\partial\psi(a)}{\partial u}\frac{\partial\chi(a)}{\partial v} - \frac{\partial\chi(a)}{\partial u}\frac{\partial\psi(a)}{\partial v}\Big)(x - x_0) - \Big(\frac{\partial\varphi(a)}{\partial u}\frac{\partial\chi(a)}{\partial v} - \frac{\partial\chi(a)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(a)}{\partial v}\Big)(y - y_0) + \\ + \Big(\frac{\partial\varphi(a)}{\partial u}\frac{\partial\psi(a)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(a)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(a)}{\partial v}\Big)(z - z_0). \tag{38}$$

Если поверхность задана уравнением (31), то касательная плоскость определяется уравнением

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(a)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(a)}{\partial z}(z - z_0) = 0. \tag{39}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касанаия, называется *нормалью* к поверхности в данной точке. Параметрические уравнения нормали имеют вид

$$\begin{cases} x = \Big(\frac{\partial\psi(a)}{\partial u}\frac{\partial\chi(a)}{\partial v} - \frac{\partial\chi(a)}{\partial u}\frac{\partial\psi(a)}{\partial v}\Big)\lambda + x_0, \\ y = \Big(\frac{\partial\varphi(a)}{\partial u}\frac{\partial\chi(a)}{\partial v} - \frac{\partial\chi(a)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(a)}{\partial v}\Big)\lambda + y_0, \\ z = \Big(\frac{\partial\varphi(a)}{\partial u}\frac{\partial\psi(a)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(a)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(a)}{\partial v}\Big)\lambda + z_0, \end{cases} \tag{40}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, или

$$x = \frac{\partial F(a)}{\partial x}\lambda + x_0, \quad x = \frac{\partial F(a)}{\partial y}\lambda + y_0, \quad x = \frac{\partial F(a)}{\partial z}\lambda + z_0. \tag{41}$$

Пример 19. Если $S$ — сфера, заданная уравнением (32), то

$$x_0x + y_0y + z_0z = R^2$$

— уравнение касательной плоскости, а

$$x = x_0(2\lambda + 1), \quad y = y_0(2\lambda + 1), \quad z = x_0(2\lambda + 1)$$

— уравнение нормали, проходящих через точку $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

**Сечения и линии уровня.** Пусть поверхность $S$ задана параметрическими уравнениями (34) и

$$u = u(t), \quad v = v(t), \qquad t \in [t_0, t_1],$$

— кривая в плоскости параметров $(u, v)$. Тогда в пространстве $\mathbb{R}^3$ возникает кривая

$$x = \varphi(u(t), v(t)) = x(t), \quad y = \psi(u(t), v(t)) = y(t), \quad z = \chi(u(t), v(t)) = z(t),$$

целиком лежащая на поверхности $S$.

Частным случаем таких кривых являются *сечения*. Пусть $a \in S$ — точка рассматриваемой поверхности, в некоторой окрестности которой матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

отлична от нулевой, и $P$ — плоскость, проходящая через эту точку. Тогда пересечение $S \cap P$ является плоской кривой, которая называется *сечением* поверхности $S$ плоскостью $P$. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то её сечения плоскостями $z = c$, где $c$ — число, называются *линиями уровня*.

Пример 20. Любое сечение сферы — это окружность.

**Ориентируемость.** В дальнейшем нам понадобится важная характеристика поверхностей, называемая *ориентируемостью.*

Пусть $a \in S$ — точка поверхности. Кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in [t_0, t_1],$$

лежащая на этой поверхности и такая, что

$$a = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x(t_1), y(t_1), z(t_1)),$$

называется *замкнутой*[1].

Предположим, что все точки поверхности неособые. Тогда в каждой точке определена нормаль и можно рассмотреть единичный вектор, приложенный к рассматриваемой точке и направленный вдоль нормали. Таких векторов два. Рассмотрим в некоторой точке $a \in S$ замкнутую кривую, лежащую на поверхности, начинающуюся и заканчивающуюся в этой точке, и выберем один из единичных нормальных векторов, приложенных к данной точке. Будем двигать это вектор вдоль выбранной кривой так, чтобы он непрерывно зависел от точки (т.е. чтобы его координаты непрерывно зависели от координат точки) и оставался нормальным. Поскольку кривая замкнута, при $t = t_1$ мы вернёмся в исходную точку. При этом возможны два случая:

1) вектор нормали, который мы двигали вдоль кривой вернётся в исходное положение;
2) вектор нормали при возвращении в исходную точку совпадёт с противоположным тому, с которого мы начинали.

Если для любой точки поверхности и для любой замкнутой кривой возможен только случай 1, то поверхность называется *ориентируемой*, а выбор одного из единичных векторов нормали в какой-нибудь из её точек — *ориентацией* этой поверхности. Если хотя бы для одной из точек и одной из петель, проходящих через эту точку, реализуется случай 2, поверхность называется *неориентируемой.*

Пример 21 (лист Мёбиуса). Возьмите длинную полоску бумаги и склейте её концы так, чтобы один из них повернулся относительно другого на $180^\circ$. Легко убедиться, что полученная поверхность неориентирума. Она называется *листом Мёбиуса.*

**Поверхности второго порядка.** Простейшими поверхностями (кроме, разумеется, плоскости) являются поверхности второго порядка.

Определение 19. Множество точек пространства, задаваемое уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \tag{42}$$

где ходя бы одно из чисел $a_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$, отлично от нуля, называется *поверхностью второго порядка.*

Как и в случае кривых второго порядка, тип любой поверхности второго порядка определяется инвариантами её *характеристических матриц*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}$$

и любое уравнение (42) заменами координат можно привести к *каноническому виду.* Существует семнадцать типов поверхностей второго порядка. Приведём их список вместе с соответствующими каноническими уравнениями.

**Эллипсоиды:** Есть два типа эллипсоидов.

[1] Замкнутая кривая называется также *контуром* или *петлёй.*

I. *Действительный эллипсоид* задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a\geqslant b\geqslant c>0. \tag{43}$$

II. *Мнимый эллипсоид* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad a\geqslant b\geqslant c>0. \tag{44}$$

**Гиперболоиды:** Есть два типа гиперболоидов.

III. *Двуполостный гиперболоид* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad a\geqslant b>0,\ c>0. \tag{45}$$

IV. *Однополостный гиперболоид* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a\geqslant b>0,\ c>0. \tag{46}$$

**Параболоиды:** Есть два типа параболоидов.

V. *Эллиптический параболоид* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\qquad p\geqslant q>0. \tag{47}$$

VI. *Гиперболический параболоид* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\qquad p>0,\ q>0. \tag{48}$$

**Конусы:** Существует два типа конусов.

VII. *Действительный конус* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\qquad a\geqslant b>0,\ c>0, \tag{49}$$

причём $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$.

VIII. *Мнимый конус* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,\qquad a\geqslant b>0\geqslant c>0, \tag{50}$$

причём $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$.

**Цилиндры:** Есть четыре типа цилиндров.

IX. *Действительный эллиптический цилиндр* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a\geqslant b>0. \tag{51}$$

X. *Мнимый эллиптический цилиндр* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,\qquad a\geqslant b>0. \tag{52}$$

XI. *Гиперболический цилиндр* задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a>0,\ b>0. \tag{53}$$

XII. *Параболический цилиндр* задаётся уравнением

$$y^2=2px,\qquad p>0. \tag{54}$$

**Пары плоскостей:** Имеется пять типов пар плоскостей, понимаемых как кривые второго порядка.

XIII. *Пара действительных пересекающихся плоскостей* задаётся уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \qquad a > 0,\ b > 0, \tag{55}$$
где $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.

XIV. *Пара мнимых пересекающихся плоскостей* задаётся уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \qquad a > 0,\ b > 0, \tag{56}$$
где $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.

XV. *Пара действиетельных параллельных плоскостей* задаётся уравнением
$$y^2 - b^2 = 0, \qquad b > 0. \tag{57}$$

XVI. *Пара мнимых параллельных плоскостей* задаётся уравнением
$$y^2 + b^2 = 0, \qquad b > 0. \tag{58}$$

XVII. Наконец, *пара совпадающих плоскостей* задаётся уравнением
$$y^2 = 0. \tag{59}$$

Замечание 6. Сечениями поверхностей второго порядка являются кривые второго порядка. Более того, любую кривую второго порядка можно получить как сечение действительного конуса. Поэтому кривые второго порядка иногда называются *коническими сечениями*.