ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Понятие *интеграла* является противоположным, обратным понятию производной. Первоначально возникшие как инструмент рения задачи вычисления площадей, интегралы играют важную роль в современной математике, физике и их приложениях.

1. Неопределённый интеграл

Определение 1. *Первообра́зной* функции $y = f(x)$ называется такая функция $y = F(x)$, что

$$F'(x) = f(x), \quad \text{или} \quad dF(x) = f\,dx.$$

Оказывается, что если некоторая функция обладает первообразной, то их бесконечно много.

Теорема 1. *Пусть $y = F(x)$ и $y = \bar{F}(x)$ — первообразные функции $y = f(x)$. Тогда*

$$F(x) - \bar{F}(x) = c,$$

где c — постоянная. Обратно, если $y = F(x)$ — первообразная функции $y = f(x)$, то и любая функция вида $F(x) + c$ также является её первообразной.

Выражение вида $F(x) + c$, где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $y = f(x)$, называется *неопределённым интегралом* этой функции и обозначается через $\int f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

где $F(x)$ — первообразная, а c — постоянная. Выражение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, а функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Предложение 1 (простейшие свойства неопределённого интеграла). *Справедливы следующие равенства*:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$, *или*
2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$;
3) $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$, *или*
4) $\int df(x) = f(x) + c$.

Задача о площади. Покажем, каким образом понятие первообразной связано с вычислением площадей. Пусть $y = f(x)$ — некоторая непрерывная функция и $F(x)$ — площадь[1] фигуры, ограниченной

1) снизу отрезком $[x_0, x]$;
2) слева отрезком $[x_0, f(x_0)]$;
3) справа отрезком $[x, f(x)]$;
4) сверху графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$.

Эта фигура называется *криволинейной трапецией*. Если отрезок $[x_0, x]$ увеличить на Δx и ввести обозначения

$$m = \min_{[x, x+\Delta x]} f(x), \qquad M = \max_{[x, x+\Delta x]} f(x),$$

то для приращения площади будут выполняться неравенства

$$m\Delta x \leqslant \Delta F(x) \leqslant M\Delta x,$$

[1]Мы ещё не знаем, что такое площадь, и поэтому наши рассуждения носят неформальный характер.

или
$$m \leqslant \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \leqslant M.$$
Устремим Δx к нулю. Тогда
$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x), \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$
Таким образом, справедлива

Теорема 2 (теорема Ньютона–Лейбница). *Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, как функция левого конца основания является первообразной для $f(x)$.*

Как вычислять неопределённые интегралы? Вообще говоря, эта задача может быть сколь угодно сложной, а иногда и неразрешимой в том смысле, что ответ нельзя записать, используя элементарные функции.

Пример 1. К интегралам, вычисление которых нельзя свести к элементарным функциям, относятся, например, такие
$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Практические приёмы интегрирования основываются на *табличных интегралах* и некоторых свойствах неопределённого интеграла, которые мы изучим ниже.

Табличные интегралы. Из определения первообразной и известных производных элементарных функций следует, что
$$\int 0\,dx = c, \tag{1}$$
$$\int 1\,dx = x + c, \tag{2}$$
$$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c, \tag{3}$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \tag{4}$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c, \tag{5}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c, \tag{6}$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \tag{7}$$
в частности,
$$\int e^x\,dx = e^x + c, \tag{8}$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c, \tag{9}$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \tag{10}$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c, \tag{11}$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c. \tag{12}$$

Теперь мы изучим важнейшие свойства неопределённых интегралов, необходимые для их вычисления.

Предложение 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ обладают первообразными. Тогда*:

1) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, *где* $a \neq 0$ *— постоянная.*
2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.
3) *Если* $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, *то* $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$, *где* $a \neq 0$ *— постоянная.*

Пример 2. Покажем, как, пользуясь сформулированными свойствами, можно вычислить некоторые интегралы:

$$\int \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + c,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c,$$
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$$
$$\int \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2mx)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\sin 2mx + c,$$
$$\int \sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2mx)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx + c.$$

Теорема 3 (замена переменных). *Пусть*

$$\int f(t)\,dt = F(t) + c.$$

Тогда

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c, \tag{13}$$

или

$$\int f(g(x))\,dg(x) = F(g(x)) + c. \tag{14}$$

Пример 3. Покажем, как вычислять некоторые интегралы, пользуясь теоремой 3.

1) Рассмотрим $\int \sin^m x \cos x\,dx$. Поскольку $\cos x\,dx = d\sin x$, имеем, полагая $\sin x = t$,

$$\int \sin^m x\cos x\,dx = \int \sin^m x\,d\sin x = \int t^m\,dt = \frac{t^{m+1}}{m+1} + c = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1} + c.$$

2) Вычислим $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Положим $x = a\sin t$. Тогда

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t, \qquad dx = a\cos t.$$

Поэтому

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\Big(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\Big) + c.$$

Но

$$a^2\frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2},$$

и поэтому

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

3) Ещё один пример:

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + c.$$

4) Вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Положим $t = \sqrt{x^2+a^2} + x$. Тогда

$$x = \frac{t^2 - a}{2t}, \quad \sqrt{x^2+a^2} = \frac{t^2+a}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+a}{2t}\,dt.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c.$$

Теорема 4 (интегрирование по частям). *Для любых дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют место равенства*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx, \tag{15}$$

или

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x). \tag{16}$$

Равенство (15) (или (16), что то же самое) называется правилом *интегрирования по частям.*

Пример 4. Проиллюстрируем на примерах, как правило интегрирования по частям может использоваться при вычислении интегралов.

1) Вычислим $\int \ln x\,dx$:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c.$$

2) Вычислим $\int \operatorname{arctg} x\,dx$:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int x\,d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Аналогичным образом вычисляются $\int \arcsin x\,dx$ и $\int \arccos x\,dx$.

3) Пусть требуется вычислить $\int x\cos x\,dx$. Имеем

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c. \tag{17}$$

Аналогично

$$\int x\sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c. \tag{18}$$

Похожим образом вычисляется интеграл $\int x^2\cos x\,dx$:

$$\int x^2\cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2\sin x - \int \sin x\,dx^2 = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx.$$

Но последнее слагаемое уже вычислено в (18). Точно также вычисление $\int x^2 \sin x\,dx$ сводится интегрированием по частям к (17).

Рассмотрим интегралы

$$S_n = \int x^n \sin x\,dx, \qquad C_n = \int x^n\cos x\,dx. \tag{19}$$

Тогда

$$S_n = \int x^n\sin x\,dx = -\int x^n\,d\cos x = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx = nC_{n-1} - x^n\cos x$$

и

$$C_n = \int x^n \cos x\,dx = \int x^n\,d\sin x = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx = x^n\sin x - nS_{n-1},$$

или

$$S_n = nC_{n-1} - x^n\cos x, \qquad C_n = x^n\sin x - nS_{n-1}. \tag{20}$$

Таким образом, любой интеграл вида (19) можно вычислить, применив n раз формулу интегрирования по частям.

Такой же приём используется для интегрирования некоторых других выражений общего вида. Вот ещё два примера.

4) Рассмотрим интеграл

$$E_n = \int x^n \mathrm{e}^x\,dx. \tag{21}$$

Тогда

$$E_n = \int x^n\,d\mathrm{e}^x = x^n - nE_{n-1}. \tag{22}$$

5) Пусть

$$L_{n,m} = \int x^n \ln^m x\,dx. \tag{23}$$

Тогда

$$L_{n,m} = \frac{1}{n+1}\int \ln^m x\,dx^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - \int x^{n+1}\,d\ln^m x\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - m\int x^{n+1}\ln^{m-1} x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right),$$

или

$$L_{n,m} = \frac{x^{n+1}\ln^m x - mL_{n,m-1}}{n+1}. \tag{24}$$

Замечание 1. Очевидно, с помощью тождеств (20), (22) и (24) можно вычислить любые интегралы вида

$$\int P(x)\sin x\,dx, \quad \int P(x)\cos x\,dx, \quad \int P(x)\mathrm{e}^x\,dx, \quad \int P(x)\ln^m x\,dx,$$

где $P(x)$ — произвольный полином.

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 5. Рассмотрим интеграл

$$R_k = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}, \qquad k \geqslant 1.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^k} - \int x\,d\Big(\frac{1}{(x^2+a^2)^k}\Big) = \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{k+1}}.$$

С другой стороны,

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{k+1}} = \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\,dx = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^k} - a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{k+1}} = R_k - a^2R_{k+1},$$

и, значит,

$$R_{k+1} = \frac{1}{ka^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}R_k. \tag{25}$$

Поскольку $R_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, мы, пользуясь равенством (25), можем вычислить R_k для любого k. Например,

$$R_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \tag{26}$$

$$R_3 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \tag{27}$$

и т.д.

2. Интегрирование некоторых классов функций

Рациональные выражения. К числу выражений, которые можно проинтегрировать в общем виде, относятся так называемые *рациональные функции*, которые имеют вид

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}, \qquad n, m \geqslant 0, \tag{28}$$

т.е. являются отношением двух полиномов.

Во-первых, напомним, что из основной теоремы алгебры вытекает следующий результат: любой многочлен с действительными коэффициентами однозначно представляется в виде

$$Q_m(x) = b_m(x-r_1)^{n_1}\dots(x-r_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}, \tag{29}$$

где все показатели $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_s$ больше нуля, $r_1, \dots, r_k$ — вещественные корни многочлена $Q_m(x)$, а пары коэффициентов $p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ таковы, что

$$p_i^2 - 4q_i < 0, \qquad i = 1, \dots, s.$$

Во-вторых, заметим, что, разделив при необходимости $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ с остатком и сократив общие множители в числителе и знаменателе, выражение (29) всегда можно привести к виду

$$R(x) = S_k(x) + \frac{T_l(x)}{Q_m(x)}, \tag{30}$$

где $S_k(x)$ и $T_l(x)$ — также полиномы, а дробь $\frac{T_l(x)}{Q_m(x)}$ — *правильная*, т.е. несократима и $l < m$.

Третий факт, который нам понадобится, формулируется следующим образом:

Теорема 5. *Каждая правильная дробь представима в виде*

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j}\frac{A_{ij}}{(x-r_j)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_j}\frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^j}, \tag{31}$$

если известно разложение её знаменателя в виде (29).

Назовём слагаемые в (31) *элементарными дробями*.

Таким образом, чтобы проинтегрировать рациональное выражение, нужно представить его в виде (30), а второе слагаемое — в виде (31) и отдельно проинтегрировать полиномиальное слагаемое (что не представляет труда), а также слагаемые четырёх типов:

$$R_{11} = \frac{A}{x-r}, \qquad R_{1k} = \frac{A}{(x-r)^k},$$

$$R_{21} = \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \qquad R_{2k} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

где $k > 1$ $d = q - \frac{p^2}{4} > 0$.

В первых двух случаях имеем

$$\int\frac{A\,dx}{x-r} = A\ln|x-r| + c \tag{32}$$

и
$$\int \frac{A\,dx}{(x-r)^k} = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-r)^{k-1}} + c. \tag{33}$$

Чтобы проинтегрировать дроби R_{21} и R_{2k}, заметим, что
$$x^2 + px + q = \Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2 + \Big(q - \frac{p^2}{4}\Big)$$
и положим
$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \qquad x + \frac{p}{2} = t. \tag{34}$$
Тогда
$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt + (N - \frac{Mp}{2})}{t^2+a^2}\,dt = \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \Big(N - \frac{Mp}{2}\Big)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}\Big(N - \frac{Mp}{2}\Big)\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + c.$$
Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем
$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{4q-p^2} + c. \tag{35}$$
Во втором случае имеем
$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{Mt + (N - \frac{Mp}{2})}{(t^2+a^2)^k}\,dt = \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \Big(N - \frac{Mp}{2}\Big)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$
Но первое слагаемое в правой части есть
$$-\frac{M}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + c,$$
а второе вычисляется по формуле (25) из примера 5.

Таким образом, чтобы проинтегрировать произвольное рациональное выражение, остаётся решить две задачи:

1) представить знаменатель в виде (29);
2) найти представление (31).

К сожалению, первая из них при $m > 4$, *вообще говоря*, не разрешима. Чтобы решить вторую, пользуются *методом неопределённых коэффициентов*. Проиллюстрируем этот метод примером.

Пример 6. Разложим дробь
$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$$
в сумму элементарных. Для этого положим
$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$
где A, B, C, D и E — неизвестные числа. Из этого равенства следует, что
$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева, получаем
$$\begin{array}{r|l} x^4 & A + B = 0, \\ x^3 & -2B + C = 0, \\ x^2 & 2A + B - 2C + D = 2, \\ x^1 & -2B + C - 2D + E = 2, \\ x^0 & A - 2C - 2E = 13. \end{array}$$
Решая полученную систему уравнений (например, методом Гаусса), получаем, что
$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -2, \quad D = -3, \quad E = -4,$$

или

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Значит,

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

Выражения, содержащие радикалы. Выражения, содержащие *радикалы*, т.е. корни различных степеней, в отличие от рациональных дробей, проинтегрировать в элементарных функциях можно уже не всегда. Есть, однако, некоторые специальные случаи, где интегралы вычисляются.

Радикалы в рациональных дробях. Рассмотрим выражения вида $R\Big(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\Big)$, где R — рациональная функция от двух аргументов, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, и замену переменных

$$t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}. \tag{36}$$

Тогда

$$x = \frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{m(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{m-1}}{(\alpha-\gamma t^m)^2}. \tag{37}$$

Значит,

$$\int R\Big(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\Big)\,dx = \int R\Big(\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}, t\Big)\cdot\frac{m(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{m-1}}{(\alpha-\gamma t^m)^2}\,dt, \tag{38}$$

т.е. после сделанной замены переменных подынтегральное выражение стало рациональной функцией относительно t. Следовательно, его можно проинтегрировать.

Пример 7. Рассмотрим интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}$$

и положим

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \tag{39}$$

Тогда

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \qquad dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}.$$

Поэтому

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1} = -3\int\frac{dt}{t^3-1} = \int\Big(\frac{t+2}{t^2+t+1}-\frac{1}{t-1}\Big)\,dt = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + c.$$

Осталось вместо переменной t подставить её выражение через x (см. равенство (39)).

Биномиальные выражения. Рассмотрим интегралы вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{40}$$

где a и b — постоянные, а m, n и p — рациональные числа (можно считать, что они представлены *несократимыми* дробями). Следующий результат принадлежит П.Л. Чебышёву[2]:

[2]Пафнутий Львович Чебышёв — русский математик XIX в.

Теорема 6. *Интеграл (40) выражается через элементарные функции тогда и только тогда, когда одно из чисел*
$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p$$
является целым.

Доказательство. Мы докажем, что в перечисленных случая интегрирование возможно, сведя наш интеграл подходящей заменой переменных к уже известным. Обратное утверждение сложно, и мы его опустим.

Если число p — целое, то, обозначая через r наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n, мы получим по интегралом выражение вида $R(\sqrt[r]{x})$, где R — рациональная функция. Такие выражения мы интегрировать умеем — нужно сделать замену $t = \sqrt[r]{x}$.

В противном случае сделаем замену переменных $z = x^n$ и получим
$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz.$$
Вводя обозначение $\frac{m+1}{n} - 1 = q$, получаем
$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q\,dz. \tag{41}$$
Если q — целое число, то мы приходим к подынтегральному выражению вида $R(z, \sqrt[s]{a+bz})$, где s — знаменатель дроби p, а R — рациональная функция. Для этого используется подстановка
$$t = \sqrt[s]{a+bz} = \sqrt[s]{a+bx^n}.$$

Кроме того, заметим, что интеграл, стоящий в правой части равенства (41), можно переписать в виде
$$\int \Big(\frac{a+bz}{z}\Big) z^{p+q}\,dx.$$
Если $p+q$ — целое число, то подынтегральное выражение можно привести к рациональному виду, сделав подстановку
$$t = \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[s]{ax^{-n}+b}.$$

Таким образом, мы рассмотрели все случаи, перечисленные в формулировке теоремы. □

Пример 8. Рассмотрим интеграл
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx == \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx.$$
Имеем
$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n} = 2,$$
т.е. мы приходим ко второму случаю интегрируемости из теоремы 6. В рассматриваемом случае $s = 3$ и, значит, нужно сделать замену
$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt.$$
Следовательно,
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int (t^6 - t^3)\,dt = \frac{3}{7}(4t^3-7)t^4\,dt + c,$$
и нам остаётся подставить вместо переменной t её выражение через x.

Пример 9. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx.$$

В этом случае

$$m=0, \quad n=4, \quad p=-\frac{1}{4}, \quad \frac{m+1}{n}+p=0,$$

т.е. рассмативаемы интеграл относится к третьему случаю теоремы 6. Поэтому положим

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, \quad x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \quad dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt,$$

откуда следует, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int\Big(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\Big)\,dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1)+c.$$

Выражения вида $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$. Этот важный для приложений случай интегрируется всегда. Для этого используются так называемые *подстановки Эйлера.*

Теорема 7. *Интеграл*

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{42}$$

где R — рациональная функция, всегда может быть вычислен через элементарные функции.

Доказательство. Во-первых, заметим, что можно исключить из рассмотрения случаи, когда $a=0$ или когда многочлен, стоящий под радикалом, имеет два одинаковых корня — первый из них сводится к интегралу (38), а во втором подкоренное выражение является полным квадратом и мы приходим к интегрированию рациональной функции.

Пусть $a>0$. Рассмотрим замену переменных

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x.$$

Тогда

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \qquad dx=2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt,$$

и после подстановки в подынтегральное выражение мы получим рациональную относительно t функцию.

Пусть многочлен ax^2+bx+c имеет два различных корня — скажем, x_1 и x_2. Тогда

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

и мы положим

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

Тогда

$$x=\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}, \quad dx=\frac{2a(x_2-x_1)}{(t^2-a)^2}\,dt,$$

и после подстановки в подынтегральное выражение мы вновь придём к рациональной функции.

Покажем, что рассмотренными случаями исчерпываются все возможности. Действительно,

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{a}\Big(x-\frac{b}{2a}\Big)+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Если $a<0$ и корней нет, т.е. $c-\frac{b^2}{4a}>0$, то выражение, стоящее под радикалом строго отрицательно и не представляет интереса. $\square$

Пример 10. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

В этом случае можно воспользоваться первой подстановкой из теоремы 7:

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \qquad dx = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\,dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right) dt =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| + c =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1} - \frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1| + 2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}| + c.$$

Пример 11. В качестве второго примера рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

который мы уже вычисляли, теперь вычислим по-другому, воспользовавшись второй подстановкой Эйлера. Положим

$$t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a-x}.$$

Тогда

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2-1}, \qquad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + c = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + c.$$

Выражения, содержащие тригонометрические и показательные функции. Рассмотрим несколько таких интегралов.

Выражения вида $R(\sin x, \cos x)$. Для вычисления интегралов

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx, \tag{43}$$

где R — рациональная функция, существует *стандартная замена переменных*, сводящая эти интегралы к рациональным функциям новой переменной. Именно, полагая $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, имеем

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Значит,

$$x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

и интеграл (43) преобразуется к виду

$$2\int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 12. Имеем

$$\int \frac{(1-a^2)\,dx}{1-2a\cos x + a^2} = (1-a^2)\int \frac{dt}{(1-a)^2+(1+a)^2t^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\cdot t\right) + c = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c.$$

Замечание 2. Описанная замена переменных универсальна, но может приводить к очень громоздким выражениям, которые проинтегрировать нелегко. В некоторых специальных случаях интегралы вида (43) удаётся вычислить с помощью других замен переменных.

Пример 13. Для вычисления интеграла

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$$

можно воспользоваться заменой $t = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \, d \sin x = \int t^2(1-t^2)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c.$$

Пример 14. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

и положим $t = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, d \operatorname{tg} x = \int (1+t^2)\, dt = t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + c.$$

Пример 15. Чтобы вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x},$$

сделаем замену $t = \cos x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{d \cos x}{\sin^2 x (2\cos^2 x - 1)} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\, t}{1-\sqrt{2}\, t} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$$

Другие случаи. Выше мы показали, что интегралы вида

$$\int P(x) \mathrm{e}^x \, dx, \quad \int P(x) \sin x \, dx, \quad \int P(x) \cos x \, dx,$$

где $P(x)$ — полином, можно вычислить методом интегрирования по частям. Рассмотрим теперь интегралы

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, dx, \qquad J_n = \int x^n \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, dx.$$

Начнём со случая $n = 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} \int \sin bx \, d\mathrm{e}^{ax} = \frac{1}{a} \Big(\mathrm{e}^{ax} \sin bx - b \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, dx \Big)$$

и

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} \int \cos bx \, d\mathrm{e}^{ax} = \frac{1}{a} \Big(\mathrm{e}^{ax} \cos bx + b \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, dx \Big),$$

т.е.

$$\begin{cases} aI_0 + bJ_0 = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} \sin bx, \\ -bI_0 + aJ_0 = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} \cos bx. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$I_0 = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \, \mathrm{e}^{ax}, \qquad J_0 = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2+b^2} \, \mathrm{e}^{ax}. \tag{44}$$

Используя эти равенства, получаем

$$\int x^n \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, dx = x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} \, \mathrm{e}^{ax} - \frac{na}{a^2+b^2} \int x^{n-1} \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, dx + \frac{nb}{a^2+b^2} \int x^n \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, dx$$

и
$$\int x^n \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,dx = x^n\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,dx - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,dx,$$
т.е.
$$I_n = x^n\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{na}{a^2+b^2}I_{n-1} + \frac{nb}{a^2+b^2}J_{n-1},$$
$$J_n = x^n\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{nb}{a^2+b^2}I_{n-1} - \frac{na}{a^2+b^2}J_{n-1},$$
и любой рассматриваемый интеграл можно вычислить, последовательно применяя полученные равенства.

3. Определённый интеграл

Как уже отмечалось, понятие интеграла возникло как формализация понятия *площади*. Дадим точные определения.

Рассмотрим отрезок $[a,b]$ и функцию $y = f(x)$, определённую на этом отрезке[3]. Пусть $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$ — точки этого отрезка. Выбор таких точек называется *разбиением* рассматриваемого отрезка. Рассмотрим также произвольные точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1\dots, n-1$. Пусть $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Выражение вида
$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{45}$$
называется *интегральной*, (или *римановой*) *суммой*. Пусть $\lambda = \min\limits_i \Delta x_i$.

Определение 2. Конечный предел при $\lambda \to 0$ сумм вида (45), если он существует, называется *определённым интегралом* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается через
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$
При этом функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на рассматриваемом отрезке, а числа a и b — *нижним и верхним пределами интегрирования.*

Замечание 3. Поясним, как в определении 2 следует понимать, что некоторое число является пределом интегральных сумм:
$$I = \lim_{\lambda\to 0} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$
Именно, это означает, что любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения, у которого $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i < \delta$, выполняется неравенство
$$|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i - I| < \varepsilon.$$

Суммы Дарбу. Рассмотрим некоторое разбиение отрезка $[a,b]$ и положим
$$m_i = \min_{[x_i,x_{i+1}]} f(x), \qquad M_i = \max_{[x_i,x_{i+1}]} f(x).$$
Числа
$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$$
называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*.

[3]Мы будем всегда предполагать, что интегрируемая функция *ограничена* на рассматриваемом отрезке.

Предложение 3. *Суммы Дарбу обладают следующими свойствами*:

1) *Любая нижняя сумма Дарбу, независимо от разбиения отрезка, не превосходит верней.*
2) *Для любых сумм Дарбу и интегральных сумм выполняются неравенства*

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

3) *Если к точкам деления отрезка добавить новые, то нижняя сумма Дарбу может только увеличиться, а верхняя — уменьшиться.*

Теорема 8 (условие существования интеграла). *Для существования определённого интеграла необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0.$$

Опишем важнейшие классы интегрируемых функций (напомним, что мы рассматриваем только ограниченные функции).

Предложение 4. *Пусть задан отрезок* $[a, b]$.

1) *Любая непрерывная на этом отрезке функция интегрируема.*
2) *Любая функция, имеющая только конечное число точек разрыва, интегрируема*
3) *Любая монотонная на отрезке функция интегрируема.*

Свойства определённого интеграла. Начнём со свойств, связанных с отрезком интегрирования.

Предложение 5. *Имеют место равенства*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Кроме того, если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$ *и* $[b, c]$, *то она интегрируема на отрезке* $[a, c]$, *причём выполняется равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Следующая группа свойств связана с простейшими арифметическими операциями с интегрируемыми функциями.

Предложение 6. *Если функция* $y = f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$, *то и функция* $y = kf(x)$, *где* k *— постоянная, также интегрируема на этом отрезке, причём*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если задана ещё одна интегрируемая функция $y = g(x)$, *то и функция* $f(x) \pm g(x)$ *интегрируема и*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Опишем теперь свойства интегралов, выражаемые неравенствами.

Предложение 7. *Пусть на отрезке* $[a, b]$, $a \leqslant b$, *задана интегрируемая функция* $y = f(x)$. *Тогда*:

1) *Если* $f(x) \geqslant 0$ *на всём отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

2) *Функция* $y = |f(x)|$ *также интегрируема и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

3) *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *на всём отрезке, то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Из первого свойства также вытекает, что если $f(x) \leqslant g(x)$ и $g(x)$ — интегрируемая функция, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ещё одно свойство мы сформулируем в качестве отдельного утверждения:

Теорема 9 (теорема о среднем). *Пусть функция* $y = f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и* $m \leqslant f(x) \leqslant M$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

для некоторого числа μ, *удовлетворяющему неравенствам* $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Всюду выше мы предполагали, что пределы интегрирования в интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ являются фиксированными (постоянными) числами. Если, однако, один из этих пределов (например, верхний) изменить, то, вообще говоря, изменится и значение самого интеграла. Таким образом, определённый интеграл можно понимать как *функцию верхнего предела*:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{46}$$

(очевидно, что не имеет никакого значения, как мы обозначим аргумент функции f — через t, x или как-нибудь иначе). Изучим свойства функции $F(x)$.

Предложение 8. *Пусть функция* $y = f(t)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$. *Тогда*:

1) *Функция* $y = F(x)$, *заданная равенством* (46), *непрерывна во всех точках* $x \in [a, b]$.
2) *Если функция* $y = f(t)$ *непрерывна, то функция* $y = F(x)$ *дифференцируема и*

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \tag{47}$$

Второе утверждение является точной формулировкой *теоремы Ньютона–Лейбница*, обсуждавшейся выше на с. 2.

Следствие 1. *Всякая непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция обладает первообразной на этом отрезке. При этом любая первообразная имеет вид*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c, \tag{48}$$

где c — *произвольная постоянная.*

Следствие 2. *Пусть* $y = F(x)$ — *первообразная функции* $y = f(x)$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{49}$$

Формула (49) называется *основной формулой интегрального исчисления*, или *формулой Ньютона–Лейбница.*

Замечание 4. Формулу Ньютона–Лейбница часто записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b\,. \tag{50}$$

Следствием этих результатов, а также свойств неопределённого интеграла являются два важных приёма интегрирования.

Предложение 9 (замена переменных). *Рассмотрим интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$, *где* $y = f(x)$ — *непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция. Предположим, что* $x = \varphi(t)$ *и*

1) *функция* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна на некотором отрезке* $[\alpha,\beta]$;
2) $\varphi(t) \in [a,b]$ *для любого* $t \in [\alpha,\beta]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$;
4) *на отрезке* $[\alpha,\beta]$ *существует непрерывная производная* $\varphi'(t)$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{51}$$

Предложение 10 (интегрирование по частям). *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *определены и непрерывны вместе со своими первыми производными на отрезке* $[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{52}$$

4. Приложения определённого интеграла

Определённый интеграл находит широкое применение как в самой математике, так и её приложениях — физике, механике и др. Рассмотрим некоторые из них.

Вычисление площадей. Рассмотрим подмножество точек плоскости $M \subset \mathbb{R}^2$. Скажем, что это множество *ограничено*, если найдётся такой замкнутый многоугольник P, что $M \subset P$.

Пусть M — ограниченное множество (или, другими словами, *фигура*). Рассмотрим множество $\mathrm{Int}(M)$, состоящее из всех замкнутых многоугольников, содержащихся в M, и множество $\mathrm{Out}(M)$, элементами которого являются всевозможные замкнутые многооугольники, содержащие M. Обозначим через $S(P)$ площадь многоугольника P. Пусть

$$\underline{S}(M) = \sup_{P \in \mathrm{Int}(M)} S(P), \qquad \overline{S}(M) = \inf_{P \in \mathrm{Out}(M)} S(P).$$

Определение 3. Множество M называется *квадрируемым*, если

$$\underline{s}(M) = \overline{s}(M).$$

Число $S(M) = \underline{s}(M) = \overline{s}(M)$ называется *площадью* этого множества.

Отметим одно важное свойство площади, называемое *аддитивностью*:

Теорема 10. *Пусть* M_1 *и* M_2 — *квадрируемые множества. Тогда их объединение также квадрируемо, причём*

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2),$$

если $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

Не углубляясь в общую теорию квадрируемых множеств, сформулируем следующий результат:

Теорема 11. *Пусть* $y = f(x)$ — *функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *и* $f(x) \geqslant 0$ *в любой точке* $x \in [a,b]$. *Тогда криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком этой функции, снизу — осью абсцисс, а слева и справа — прямыми* $x = a$ *и* $x = b$, *является квадрируемым множеством и его площадь равна*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теоремы 10 и 11 позволяют вычислять площади любых фигур, которые можно разбить на криволинейные трапеции.

Пример 16 (площадь фигуры, ограниченной эллипсом). Рассмотрим эллипс, заданный каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В силу сказанного выше, площадь ограниченного им множества есть

$$S = 2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Воспользовавшись вычислениями из примера 3, получаем

$$S = (ab \arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2})\Big|_{-a}^{a} = \pi ab.$$

В частности, при $a = b = R$ получаем площадь круга радиуса R, равную πR^2.

Замечание 5. Если кривая, ограничивающая некоторую область, задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

то площадь соответствующей фигуры измеряется интегралом

$$S = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\,dt. \tag{53}$$

Если же рассматривать *криволинейный сектор*, ограниченный углами φ_0 и φ_1 и кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi),$$

то его площадь равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{54}$$

Пример 17. Если эллипс задан параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

то ограниченная им площадь вычисляется по формуле

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt = \pi ab,$$

и мы, естественно, приходим к тому же ответу, что и в примере 16.

Пример 18. Вычислим площадь первого витка *архимедовой спирали* $r = a\varphi$. По формуле (54) имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a^2\varphi^2\,d\varphi = \frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^a.$$

Объёмы тел вращения. Объёмы подмножеств трёхмерного пространства (то есть *тел*) определяются точно так же, как площади фигур, но вместо многоугольников нужно рассматривать *многогранники* и их объёмы. Тело, чей объём определён, называется *кубируемым*.

Мы рассмотрим частный случай тел — тела, получаемые путём вращения криволинейных трапеций вокруг оси абсцисс.

Теорема 12. *Пусть тело N получено вращением криволинейной трапеции, описанной в теореме* 11, *вокруг оси абсцисс. Это тело кубируемо и его объём равен*

$$V(N) = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)\,dx. \tag{55}$$

Пример 19 (эллипсоид вращения). Вращение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

вокруг оси абсцисс даёт тело, называемое *эллипсоидом вращения*. По формуле (55) его объём равен

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\big(a^2x-\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

В частности, при $a=b=R$ получаем объём шара радиуса R: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Длина дуги кривой. Рассмотрим на плоскости кривую, заданную параметрически уравнениями

$$x=x(t),\qquad y=y(t)$$

и некоторый интервал изменения параметра $[a,b]$. Участок кривой, отвечающий значениям параметра $t\in[a,b]$ называется *дугой*. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$

$$a=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n=b$$

и точки

$$M_0=(x(t_0),y(t_0)),\ M_1=(x(t_1),y(t_1)),\ldots,M_n=(x(t_n),y(t_n)),$$

лежащие на рассматриваемой дуге. Пусть

$$s_i=\sqrt{(x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1})-y(t_i))^2},\qquad i=0,\ldots,n-1,$$

— длина отрезка, соединяющего точку M_i с точкой M_{i+1} и $\lambda=\max s_i$.

Определение 4. Дуга кривой называется *спрямляемой*, если существует конечный предел

$$s=\lim_{\lambda\to0}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}s_i. \tag{56}$$

Этот предел называется *длиной дуги*.

Теорема 13. *Пусть дуга такова, что в каждой её точке функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ имеют непрерывные производные по t. Тогда она спрямляема и её длина равна*

$$s=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \tag{57}$$

Замечание 6. Если кривая задаётся уравнением

$$y=f(x),$$

то длина её дуги на участке от $x=a$ до $x=b$ вычисляется по формуле

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(f'_x(x))^2}\,dx, \tag{58}$$

а если она задана в полярных координатах уравнением

$$r=r(\varphi),$$

то длина дуги при изменении полярного угла от $\varphi=a$ до $\varphi=b$ есть

$$s=\int_a^b\sqrt{r^2(\varphi)+(r'_\varphi(\varphi))^2}\,d\varphi. \tag{59}$$

Пример 20. Пусть дано параметрическое уравнение прямой

$$x = At + \alpha, \quad y = Bt + \beta, \qquad A^2 + B^2 \neq 0.$$

Тогда длина отрезка, соответствующего значениям параметра $t = t_0$ и $t = t_1$, по формуле (57) есть

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{A^2 + B^2}\, dt = (t_1 - t_0)\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Если прямая задаётся уравнением

$$y = kx + b,$$

то по формуле (58)

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + k^2}\, dx = (x_1 - x_0)\sqrt{1 + k^2},$$

как и следовало ожидать.

Пример 21. Длина дуги параболы

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

при $x \in [0, a]$, $a > 0$, вычисляется по формуле

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p^2}{2}\ln(x + \sqrt{p^2 + x^2})\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a}{2p}\sqrt{p^2 + a^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{a + \sqrt{p^2 + a^2}}{p}.$$

Пример 22. Длина дуги архимедовой спирали $r = p\varphi$ при изменении полярного угла от нуля до значения $\varphi = a$ в силу формулы (59) равна

$$s = \int_0^a \sqrt{p^2 + p^2\varphi^2}\, d\varphi = \frac{p}{2}\big(a\sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})\big).$$

Пример 23. Рассмотрим задачу вычисления длины полной дуги эллипса, заданного параметрически уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \qquad a \geqslant b, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Поскольку

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = a^2(1 - \varepsilon^2\cos^2 t),$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, и, таким образом,

$$s = a\int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon^2\cos^2 t)\, dt.$$

Это — так называемый *эллиптический интеграл второго рода*. Вообще говоря, такие интегралы не вычисляются в элементарных функциях. Исключение составляет случай $a = b = R$ (т.е. $\varepsilon = 0$). Тогда, очевидно, $s = 2\pi R$, и мы приходим к известной из школы формуле длины окружности.

Замечание 7. Если есть пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то длина её дуги измеряется интегралом

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{60}$$

Физические и механические приложения. Из многочисленных приложений определённого интеграла в физике и механике мы рассмотрим три — нахождение центра тяжести и статических моментов и определение механической работы.

Статические моменты. Напомним, что *статическим моментом* системы из n точек с массами $m_1, \dots, m_n$ относительно некоторой прямой называется величина

$$K = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i, \tag{61}$$

где d_i — расстояние от i-й точки до прямой.

Пусть теперь на плоскости задана кривая с параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [a, b].$$

Будем считать, что на этой кривой распределена масса, причём её плотность равна единице, т.е. на единицу длины кривой приходится единица массы. Тогда статические моменты этой кривой относительно осей абсцисс и ординат будут измеряться интегралами

$$K_x = \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt, \qquad K_y = \int_a^b x(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt \tag{62}$$

соответственно.

Пусть теперь на плоскости задана криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = f(x)$ над отрезком $[a, b]$ оси абсцисс. Тогда статический момент этой фигуры относительно оси абсцисс есть

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx, \tag{63}$$

а относительно оси ординат —

$$K_y = \int_a^b x f(x)\,dx. \tag{64}$$

Центр тяжести. Зная статические моменты тела, легко определить его центр тяжести, если воспользоваться следующим свойством центра тяжести: *если сосредоточить всю массу тела в центре тяжести, то момент этой массы относительно любой оси совпадёт с моментом всего тела относительно этой оси.* Обозначим через ξ и η координаты центра тяжести. Тогда, в силу сказанного выше имеем для кривой

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\,dt}}, \qquad \eta = \frac{\int_a^b y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\,dt}} \tag{65}$$

и

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \eta = \frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \tag{66}$$

для криволинейной трапеции.

Механическая работа. Пусть точка движется по траектории

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

и в каждой точке этой траектории на неё действует сила $F = F(x, y)$, зависящая от положения точки. Поскольку при постоянной силе работа есть sF, где s — пройденный путь, имеем

$$W = \int_a^b F(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \tag{67}$$

при произвольной силе.

5. Несобственные интегралы

Всюду выше, говоря об определённом интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$, мы предполагали, что (a) интервал интегрирования конечен и (b) подынтегральная функция ограничена на этом интервале. Теорию интеграла можно развить и без этих ограничений. Такие интегралы называются *несобственными*.

Интегралы с бесконечными пределами.

Определение 5. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, $a \leqslant b$. Предел (конечный или бесконечный)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{68}$$

если он существует, называется (*несобственным*) *интегралом* функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке. Если предел конечен, то интеграл называется*сходящимся*.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл вида $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$. Кроме того, рассматривают интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{69}$$

Заметим, что определение (69) не зависит от выбора точки $a \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим основные свойства несобственных интегралов.

Предложение 11. *Пусть $F(x)$ — первообразная подынтегральной функции. Тогда несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ существует в том и только в том случае, если существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, причём*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a). \tag{70}$$

Аналогичные утверждения справедливы и для интегралов $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример 24. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} x^\mu\,dx. \tag{71}$$

В силу предложения 11

$$\int_a^{+\infty} x^\mu\,dx = \frac{1}{\mu+1}\Big(\lim_{b\to+\infty} b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\Big),$$

и поэтому интеграл (71) сходится тогда и только тогда, когда $\mu < -1$.

Рассмотрим простейшие свойства несобственных интегралов.

Предложение 12. *Пусть $y = f(x)$ — функция, определённая на полупрямой $[a, +\infty)$. Тогда:*

1) *Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то сходится и интеграл $\int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx$, $a' > a$, и наоборот. При этом*
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{a'} f(x)\,dx + \int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx.$$
2) *Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то*
$$\lim_{a'\to+\infty} \int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx = 0.$$
3) *Из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} c\cdot f(x)\,dx$, где c — постоянная, причём*
$$\int_a^{+\infty} c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

4) *Если интегралы* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходятся, то сходятся и интегралы* $\int_a^{+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx$, *причём*

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Если подынтегральная функция не произвольна, а неотрицательна на всей полупрямой $[a, +\infty)$, то выполняется следующий критерий сходимости:

Предложение 13. *Для сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *в случае неотрицательной функции* f *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \lambda \text{ для } \forall b \geqslant a.$$

Если это условие не выполнено, то рассматриваемый интеграл равен $+\infty$.

Для положительных функций справедливы также две важные *теоремы сравнения.*

Теорема 14. *Если на полупрямой* $[a, +\infty)$ *заданы функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *причём* $0 < f(x) \leqslant g(x)$, *то из сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *следует сходимость* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, *а из расходимости* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Теорема 15. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ — *две положительные функции, определённые на полупрямой* $[a, +\infty)$. *Если существует предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = K, \qquad 0 \leqslant K \leqslant +\infty.$$

В этом случае из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *при* $K < +\infty$ *следует сходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, *а из расходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *при* $K > 0$ *следует расходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. *В частности, при* $0 < K < +\infty$ *оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.*

Из этих утверждений и примера 24 вытекают полезные следствия.

Следствие 3. *Пусть на полупрямой* $[a, +\infty)$ *функция* $f(x)$ *представляется в виде*

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^\lambda}.$$

Тогда:

1) *если* $\lambda > 1$ *и* $g(x)$ — *ограниченная сверху функция, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится;*
2) *если* $\lambda \leqslant 1$ *и* $g(x) \geqslant c > 0$, *то этот интеграл расходится.*

Следствие 4. *Если при* $x \to +\infty$ *функция* $f(x)$ *эквивалентна функции* $\frac{1}{x^\lambda}$, *то несобственный интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится при* $\lambda > 1$ *и расходится* $\lambda \leqslant 1$.

Заметим, что из теоремы Больцано–Коши вытекает следующий общий критерий сходимости несобственных интегралов.

Предложение 14. *Для сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое число* $b_0 > a$, *чтобы при всех* b, $b' > b_0$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \int_b^{b'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Следствие 5. *Если сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, *то сходится и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Интегралы, удовлетворяющие условиям следствия 5, называются *абсолютно сходящимися.*

Интегралы от неограниченных функций. Рассмотрим теперь второй случай, когда возникают несобственные интегралы. Пусть дан отрезок $[a,b]$, и предположим, что функция $y=f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$.

Определение 6. Конечный или бесконечный предел

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{72}$$

если он существует, называется (*несобственным*) *интегралом* функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке. Если предел конечен, то интеграл называется*сходящимся*.

Замечание 8. То, что функция интегрируема на любом отрезке $[a,b-\varepsilon]$, но не интегрируема на всём отрезке $[a,b]$, означает, что $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\infty$. Такая точка называется *особой*.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл, если функция стремится к бесконечности на левом конце отрезка интегрирования или на обоих его концах. Теория несобственных интегралов от неограниченных функций вполне аналогична рассмотренной выше теории интегрирования на бесконечных промежутках. Приводимые ниже свойства, как легко заметить, почти дословно повторяют уже известные.

Предложение 15. *Пусть $F(x)$ — первообразная подынтегральной функции. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует в том и только в том случае, если существует предел $\lim\limits_{x\to b}F(x)$, причём*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{x\to b}F(x)-F(a). \tag{73}$$

Предложение 16. *Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в случае неотрицательной функции f необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}:\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\leqslant\lambda \text{ для } \forall\varepsilon\geqslant 0,\ \varepsilon<b-a.$$

Если это условие не выполнено, то рассматриваемый интеграл равен $+\infty$.

Следствие 6. *Пусть на отрезке $[a+\varepsilon,b]$ функция $f(x)$ представляется в виде*

$$f(x)=\frac{g(x)}{(x-b)^\lambda},\qquad \lambda>0.$$

Тогда:

1) *если $\lambda<1$ и $g(x)$ — ограниченная сверху функция, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится*;
2) *если $\lambda\geqslant 1$ $g(x)\geqslant c>0$, то этот интеграл расходится.*

Следствие 7. *Если при $x\to b$ функция $f(x)$ эквивалентна функции $\frac{1}{(x-b)^\lambda}$, $\lambda>0$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится при $\lambda<1$ и расходится $\lambda\geqslant 1$.*

Предложение 17. *Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ нашлось такое число $\delta>0$, чтобы при всех η, η', $0<\eta,\eta'<\delta$, выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Следствие 8. *Если сходится интеграл $\int_a^b|f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Как и выше, интегралы, удовлетворяющие условиям следствия 8, называются *абсолютно сходящимися.*

Примеры вычислений. Для вычисления несобственных интегралов используют формулу Ньютона–Лейбница, различные подстановки (замены переменных), интегрирование по частям и *искусственные приёмы.*

Формула Ньютона–Лейбница. Применение формулы Ньютона–Лейбница основывается на результатах предложения 11, и мы уже использовали этот приём в примере 24.

Пример 25.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 = \tfrac{\pi}{2}.$$

Пример 26. Из равенств (44) следует, что
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx\,dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax} + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2},$$
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\,dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax} + \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Пример 27.
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= (\lim_{x\to1} \arcsin x - \arcsin a) + (\arcsin a - \lim_{x\to-1} \arcsin x) = \pi$$
где a — произвольная точка, лежащая в интервале $(-1,1)$.

Интегрирование по частям. Формула интегрирования по частям в случае несобственных интегралов выглядит следующим образом:
$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{x\to b}(f(x)g(x)) - \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) - \int_a^b g(x)\,df(x). \tag{74}$$
Здесь и a, и b могут принимать бесконечные значения.

Пример 28.
$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{x\to1} x\ln x - \lim_{x\to0} x\ln x - \int_0^1 dx = -1.$$

Пример 29.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x - \lim_{x\to0} x\ln\sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x\,dx.$$
Таким образом, исходный интеграл свёлся к собственному и, значит, сходится.

Подстановки. Общее правило использования подстановок в несобственных интегралах таково: рассмотрим полуинтервал $[a,b)$, где b может принимать значение $+\infty$. Пусть $y=f(x)$ — функция, интегрируемая на любом конечном отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$. Пусть также на этом полуинтервале задана монотонно возрастающая функция $s=\varphi(t)$ с непрерывной первой производной и $\alpha=\varphi(a)$, $\beta=\lim_{t\to b}\varphi(t)$. Тогда имеет место равенство
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$
В частности, интегралы, стоящие в левой и правой части этого равенства, сходятся и расходятся одновременно.

Аналогичное утверждение справедливо для полуинтервала $(a,b]$, интервала (a,b), а также для монотонно убывающей функции $\varphi(t)$.

Пример 30. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

и подстановку $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$. Тогда $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, и мы получаем

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$$

Пример 31. Интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

вычисляется следующим образом. Во-первых, сделаем подстановку $x = \frac{1}{t}$:

$$I = -\int_{+\infty}^0 \frac{t^2\,dt}{1+t^4} = \int_{+\infty}^0 \frac{t^2\,dt}{1+t^4}.$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+\frac{1}{x^2})\,dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

В последнем интеграле сделаем замену $z = x - \frac{1}{x}$:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \tfrac{z}{\sqrt{2}} - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \tfrac{z}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Заметим, что в последнем примере были использованы не только подстановки, но и дополнительный приём. Такие приёмы называют *искусственными*, поскольку они выходят за рамки стандартных, регулярных методов. Рассмотрим другие примеры подобного рода.

Искусственные приёмы.

Пример 32. В примере 29 мы показали, что интеграл

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$$

сходится. Теперь мы его вычислим. Для этого сделаем замену переменных $x = 2t$ и получим

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt.$$

Сделав в последнем интеграле замену $t = \frac{\pi}{2} - u$, мы приведём его к виду $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt$. Таким образом,

$$J = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2J,$$

т.е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Пример 33. Рассмотрим интеграл

$$K = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx. \tag{75}$$

Этот интеграл играет чрезвычайно важную роль в теории вероятностей и математической статистике. Покажем, что он сходится. Для этого заметим, что функция $(1+t)\mathrm{e}^{-t}$ при $t \in (0, +\infty)$ строго меньше единицы. Полагая $t = x^2 + 1$, получаем

$$0 < \mathrm{e}^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Значит, как это следует из примера 25, $0 < K \leqslant \frac{\pi}{2}$. С помощью очень непростых искусственных приёмов, которые выходят за рамки нашего курса, можно показать, что

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{76}$$

6. Приближённые вычисления определённого интеграла

Поскольку далеко не все (а точнее, большинство) определённые интегралы можно вычислить, используя известные (элементарные) функции, для практических целей используют *приближённые методы.*

Итак, пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx; \tag{77}$$

мы будем предполагать, что (77) — собственный интеграл.

Метод трапеций. Этот метод основан на разбиении отрезка интегрирования $[a, b]$ на n равных частей,

$$a = x_0,\ x_1, \ldots, x_n = b, \qquad x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n},$$

и замене каждой «маленькой» криволинейной трапеции на участке $[x_i, x_{i+1}]$ «настоящей» прямолинейной. В силу определения 2, площадь получаемой фигуры *приблизительно* равна интегралу (77), так что мы имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n} \cdot \Big(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\Big). \tag{78}$$

Формула (78) называется *формулой трапеций.*

Поскольку формула трапеций даёт лишь *оценку*, *приближённое значение* искомого интеграла, важно оценить, какова её точность. Пусть ε — разность между левой и правой частями в соотношении (78). Тогда можно показать, что если подынтегральная функция имеет непрерывные первую и вторую производные на отрезке $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{|b-a|^3}{12n^2} \cdot \max_{[a,b]} |f''(x)|. \tag{79}$$

Это и есть оценка точности вычисления интеграла (77) по формуле трапеций.

Метод Симпсона. *Метод Симпсона* также основан на разбиении отрезка интегрирования на n равных частей, а затем каждого из полученных отрезков — пополам (в итоге весь отрезок разбивается на $2n$ частей). Интегрируемая функция заменяется в этом случае дугой параболы, проходящей через три соседних точки с номерами $2i$, $2i+1$ и $2i+2$. Получаемое при этом приблизительное значение интеграла имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{6n} \cdot \Big((f(a)+f(b)) + +2(f(x_2)+\cdots+f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1)+\cdots+f(x_{2n-1})\Big). \tag{80}$$

Это — так называемая *параболическая формула*, или *формула Симпсона.*

Если подынтегральная функция обладает первыми четырьмя непрерывными производными, то точность вычислений оценивается по формуле

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{|b-a|^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|. \tag{81}$$