ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

Понятие *кривой* на (или *линии*) плоскости является обобщением понятия графика функции, а кривые в пространстве — это объекты, обобщающие кривые на плоскости. Например, множество точек на плоскости с координатами x и y, удовлетворяющих уравнению

$$y^2 - x = 0,$$

«ничем не хуже» хорошо известной из школьного курса математики параболы, но не является графиком никакой функции (оно «склеено» из двух графиков — $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$). Мы начнём изучение кривых с одного из важного класса, поскольку эти кривые играют чрезвычайно важную роль в геометрии, алгебре и даже в астрономии.

1. Кривые второго порядка

Гипербола — это единица на икс.
Из ответа на экзамене

Определение 1. Пусть на плоскости задана прямая L и точка f, не лежащая на этой прямой. Множество точек плоскости, равноудалённых от L и f, называется *параболой*. При этом прямая L называется *директрисой* параболы, а точка f — её *фокусом*. Перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус прямая называется *фокальной осью*. Точка пересечения параболы с фокальной осью называется *вершиной* этой параболы.

Расстояние p от фокуса до директрисы называется фокальным параметром параболы, а число $\frac{p}{2}$ — фокусным расстоянием.

Пример 1. Подмножество точек плоскости, задаваемое уравнением

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0, \tag{1}$$

является параболой с фокусом в точке $f = (\frac{p}{2}, 0)$. Директриса этой параболы — вертикальная прямая, заданная уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокальная ось — прямая $y = 0$.

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением параболы*.

Замечание 1. Если допустить, что фокус лежит на директрисе, то множество, описываемое определением 1, превратится в прямую, перпендикулярную директрисе и проходящую через фокус.

Определение 2. Пусть f_1 и f_2 — точки плоскости. Множество точек, сумма расстояний от которых до точек f_1 и f_2 постоянна и равна некоторому числу $2a$, $a > 0$, называется *эллипсом*. Точки f_1 и f_2 называются *фокусами* эллипса. Прямая, проходящая через фокусы, а также перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего фокусы, называются *фокальными осями* эллипса.

Если $2c$ — расстояние между фокусами, то число c называется *эксцентриситетом*[1] эллипса, а числа a и $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ — его *полуосями*.

Пример 2. Подмножество точек плоскости, задаваемое уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0, \tag{2}$$

является эллипсом. Его полуоси — это a и b, а эксцентриситет равен $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Если $a \neq b$, то фокальными осями являются оси координат, а при $a = b$ — любые пары взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через начало координат.

[1] Эксцентриситéт — ударение на последнем слоге.

Уравнение (2) называется *каноническим уравнением эллипса.*

Замечание 2. Если фокусы эллипса совпадают, то он превращается в окружность радиуса a и тогда его фокальные оси не определены (см. пример 2). В случае, когда $a = c$, эллипс вырождается в отрезок, соединяющий фокусы[2], а если $a < c$, то множество точек эллипса пусто.

Определение 3. Пусть f_1 и f_2 — две не совпадающие между собой точки плоскости. Множество точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до точек f_1 и f_2 постоянна и равна некоторому числу $2a$, $a > 0$, называется *гиперболой*. Точки f_1 и f_2 называются *фокусами* гиперболы. Прямая, проходящая через фокусы, называется *фокальной осью*, а перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка (эта середина называется *центром* гиперболы), соединяющего фокусы, *мнимой осью* гиперболы. Точки пересечения гиперболы с фокальной осью называются *вершинами* этой гиперболы.

Если $2c$ — расстояние между фокусами, то число c называется *эксцентриситетом* гиперболы, а числа a и $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ — её *действительной* и *мнимой полуосями* соответственно.

Прямые, проходящие через центр гиперболы и образующие с фокальной осью углы, для которых $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{b}{a}$, называются *асимптотами* этой гиперболы.

Пример 3. Подмножество точек плоскости, задаваемое уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0, \tag{3}$$

является гиперболой. Её фокальная ось совпадает с осью абсцисс, а мнимая — с осью ординат. Действительная полуось этой гиперболы равна a, а мнимая — b. Фокусы гиперболы находятся в точках $(\pm c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а вершины — в точках $(\pm a, 0)$. Уравнениями асимптот являются $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Уравнение (3) называется *каноническим уравнением гиперболы.*

Замечание 3. Если $a = 0$, то гипербола вырождается в два экземпляра прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего фокусы, и перпендикулярной этому отрезку.

Оказывается, все перечисленные фигуры (парабола, эллипс и гипербола) можно задать в общем и единообразном виде.

Определение 4. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{4}$$

где a_{ij}, b_i и c — действительные числа и хотя бы одно из чисел a_{ij} отлично от нуля, называется *кривой второго порядка.*

Как мы убедимся, перечисленными в определениях 1—3 фигурами исчерпываются все «интересные» кривые второго порядка.

Инварианты кривых второго порядка. О том, какую кривую задаёт уравнение (4), можно судить по коэффициентам, находящимся в правой части этого уравнения.

Определение 5. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

называется *характеристической матрицей* кривой (4). Матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \tag{6}$$

называется расширенной характеристической матрицей.

[2]Точнее было бы сказать, что он вырождается в две копии этого отрезка.

Рассмотрим матрицу $A - \lambda\mathbf{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и её определитель

$$\|A - \lambda\mathbf{E}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{7}$$

Таким образом, рассматриваемый определитель является многочленом второй степени по переменной λ.

Определение 6. Многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ называется *характеристическим многочленом* кривой (4). Числа

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta_A, \quad \Delta_B, \tag{8}$$

где Δ_A и Δ_B — определители матриц A и B соответственно, называются *инвариантами* этой кривой.

Инварианты почти полностью определяют форму любой кривой второго порядка.

Лемма 1. *Пусть $P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ — характеристический многочлен кривой второго порядка. Тогда:*

1) *Его дискриминант неотрицателен.*
2) *Хотя бы один из его корней отличен от нуля.*

Доказательство. 1) Действительно, дискриминант характеристического многочлена равен

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0.$$

Значит, характеристический многочлен имеет два действительных корня λ_1 и λ_2.

2) Если оба корня равны нулю, то по теореме Виета

$$\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 = 0$$

и

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

откуда следует, что все коэффициенты a_{ij} равны нулю. Но по определению 4 на противоположной странице этого не может быть. □

Введём также величину

$$K_A = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}, \tag{9}$$

называемую *полуинвариантом.*

Теорема 1. *Пусть задана кривая второго порядка, заданная уравнением* (4). *Тогда:*

1) *Если $\Delta_A > 0$, то*
   а) *при $\operatorname{tr} A \cdot \Delta_B < 0$ эта кривая является эллипсом (в частности, при $\lambda_1 = \lambda_2$ этот эллипс является окружностью);*
   б) *при $\operatorname{tr} A \cdot \Delta_B > 0$ эта кривая является пустым множеством (называемым в данном случае мнимым эллипсом);*
   в) *при $\Delta_B = 0$ эта кривая состоит из одной точки (называемой в данном случае вырожденным эллипсом).*
2) *Если $\Delta_A < 0$, то*
   а) *при $\Delta_B \neq 0$ эта кривая является гиперболой;*
   б) *при $\Delta_B = 0$ эта кривая является является парой пересекающихся прямых.*
3) *Если $\Delta_A = 0$, то*
   а) *при $\Delta_B \neq 0$ эта кривая является параболой;*
   б) *при $\Delta_B = 0$ и $K_A < 0$ эта кривая является парой параллельных прямых;*
   в) *при $\Delta_B = 0$ и $K_A > 0$ эта кривая является пустым множеством (называемым в данном случае парой мнимых прямых);*
   г) *при $\Delta_B = 0$ и $K_A = 0$ эта кривая является парой совпадающих прямых.*

2. Кривые на плоскости

Рассмотрим теперь кривые общего вида.

Определение 7. *Кривой на плоскости* (или *плоской кривой*) называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0, \tag{10}$$

где функция F такова, что хотя бы одна из производных F'_x и F'_y отлична от нуля в каждой точке кривой.

Очевидно, рассмотренные в предыдущем параграфе кривые второго порядка являются плоскими кривым кривыми в смысле определения 7.

Пусть (x_0, y_0) — точка кривой. Прямая, задаваемая уравнением

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \tag{11}$$

называется *касательной* к этой кривой в рассматриваемой точке. Прямая, задаваемая уравнением

$$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \tag{12}$$

называется *нормалью* к кривой в точке (x_0, y_0).

Пример 4. Рассмотрим параболу

$$y^2 = 2px,$$

заданную каноническим уравнением (1). Тогда в силу (11) имеем

$$y_0(y - y_0) = p(x - x_0).$$

Соответственно, уравнением нормали к параболе является

$$p(y - y_0) + y_0(x - x_0) = 0.$$

Пример 5. Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

заданный каноническим уравнением (2). Тогда

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

— уравнение касательной. Но точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе. Поэтому уравнение касательной приобретает вид

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

При этом нормаль задаётся уравнением

$$\frac{y_0}{b^2}x - \frac{x_0}{a^2}y = \Big(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\Big)x_0y_0.$$

Пример 6. Аналогично для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

заданной каноническим уравнением (3), касательная задаётся уравнением

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1,$$

а нормаль — уравнением

$$\frac{y_0}{b^2}x + \frac{x_0}{a^2}y = \Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\Big)x_0y_0.$$

Параметрическое задание кривой. При описании кривых часто бывает удобным ввести дополнительную переменную (например, t — её обозначение, конечно, не играет роли) таким образом, что переменные x и y становятся функциями, зависящими от t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{13}$$

а уравнение $F(x(t), y(t)) = 0$ выполняется тождественно при любых допустимых значениях t. Такое задание кривой называется *параметрическим*, а переменная t называется *параметром* кривой.

Пример 7. Чтобы задать параметрически эллипс (2), положим

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t. \tag{14}$$

В частности, при $a = b$ мы получаем параметрическое уравнение окружности радиуса a и с центром в начале координат.

Пример 8. Для параметрического задания гиперболы тригонометрические функции $\cos t$ и $\sin t$, как легко убедиться, не подходят. Вместо них рассматривают функции

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{15}$$

и

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{16}$$

Тогда уравнения

$$x = a\operatorname{ch} t, \qquad y = b\operatorname{sh} t \tag{17}$$

являются параметрическими уравнениями гиперболы. По понятным причинам функции (15) и (16) называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом* соответственно.

Замечание 4 (о гиперболических функциях). *Гиперболический тангенс*

$$\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{18}$$

и *гиперболический котангенс*

$$\operatorname{cth} = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{19}$$

определяются по аналогии с соответствующими тригонометрическими функциями.

Гиперболические функции обладают свойствами, очень похожими на свойства тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{20}$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1, \tag{21}$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{22}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{23}$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \tag{24}$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\frac{x \pm y}{2}\operatorname{ch}\frac{x \mp y}{2}, \tag{25}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2\operatorname{ch}\frac{x + y}{2}\operatorname{ch}\frac{x - y}{2}, \tag{26}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2\operatorname{sh}\frac{x + y}{2}\operatorname{sh}\frac{x - y}{2}, \tag{27}$$

а также ещё одним замечательным свойством

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx, \tag{28}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Обратные гиперболические функции имеют вид

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad \infty < x < +\infty, \tag{29}$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm, \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \qquad 1 \leqslant x, \tag{30}$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1, \tag{31}$$

$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \qquad 1 < |x|. \tag{32}$$

Введя в рассмотрение комплексные числа, можно установить связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями. Именно, имеют место равенства

$$\sin x = -i \operatorname{sh} ix, \qquad \cos x = \operatorname{ch} ix,$$
$$\operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix, \qquad \operatorname{ctg} x = i \operatorname{cth} ix.$$

Кроме того, гиперболические функции являются периодическими в комплексном смысле:

$$\operatorname{sh}(x + 2\pi i) = \operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{ch}(x + 2\pi i) = \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{th}(x + \pi i) = \operatorname{th} x, \qquad \operatorname{cth}(x + \pi i) = \operatorname{cth} x.$$

Заметим, что одна и та же кривая как подмножество точек плоскости может иметь разные параметризации. Например, уравнения

$$x = a \cos 2t, \qquad y = b \sin 2t$$

определяют тот же эллипс, что и в примере 7. В общем виде переход от одной параметризации к другой выглядит следующим образом. Пусть кривая задана уравнениями (13) и параметр t, в свою очередь, является функцией некоторой новой переменной τ: $t = \varphi(\tau)$. Тогда уравнения той же самой кривой в параметризации τ имеют вид

$$x(\tau) = x(\varphi(\tau)), \qquad y(\tau) = y(\varphi(\tau)). \tag{33}$$

Скорость и ускорение. Параметрическое задание кривой равенствами (13) можно понимать как *уравнения движения* точки на плоскости, причём сама кривая — это *траектория* рассматриваемого движения. Пусть (x_0, y_0), где $x_0 = x(t_0)$ и $y_0 = y(t_0)$, — точка кривой. Вектор

$$\mathbf{v} = (\dot{x}_t, \dot{y}_t) \text{ при } t = t_0, \tag{34}$$

где

$$\dot{x}_t = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y}_t = \frac{dy}{dt},$$

приложенный к точке (x_0, y_0), называется *вектором скорости* в этой точке. Вектор скорости лежит на касательной к кривой в рассматриваемой точке. Точка кривой называется *неособой* (или *точкой общего положения*), если

$$\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2 \neq 0,$$

т.е. если вектор скорости в этой точке отличен от нулевого.

Замечание 5. Если из контекста понятно, по какому параметру дифференцируются координаты x и y, то мы будем писать $\dot{x}$ и $\dot{y}$ вместо $\dot{x}_t$ и $\dot{y}_t$.

Аналогично вектор

$$\mathbf{a} = (\ddot{x}_t, \ddot{y}_t) \text{ при } t = t_0, \tag{35}$$

где

$$\ddot{x}_t = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \ddot{y}_t = \frac{d^2y}{dt^2},$$

приложенный к точке (x_0, y_0), называется *вектором ускорения* в этой точке.

Пусть (x_0, y_0) — неособая точка. Тогда в этой точке можно рассмотреть два вектора —

$$\mathbf{v}_e = \left(\frac{\dot{x}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\dot{y}}{|\mathbf{v}|}\right), \qquad \mathbf{n}_e = \left(\frac{-\dot{y}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\dot{x}}{|\mathbf{v}|}\right),$$

где $|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ — длина вектора скорости. Первый из них имеет единичную длину и сонаправлен вектору скорости, а второй также имеет единичную длину, но перпендикулярен первому (т.е. направлен вдоль нормали к кривой). Поэтому любой вектор, приложенный к рассматриваемой точке, можно единственным образом представить в виде $\alpha\mathbf{v}_e + \beta\mathbf{n}_e$. В частности, так можно представить вектор ускорения:

$$\mathbf{a} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}_e + \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{|\mathbf{v}|}\mathbf{n}_e. \tag{36}$$

Первое слагаемое в представлении (36) называется *тангенциальным* (или *касательным*) *ускорением*, а второе — *нормальным* (или *центробежным*). Таким образом, касательное ускорение по величине равно

$$|\mathbf{a}_v| = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \tag{37}$$

а нормальное —

$$|\mathbf{a}_n| = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \tag{38}$$

Пример 9. Вновь рассмотрим эллипс, заданный параметрически уравнениями (14). Тогда в каждый момент t его скорость есть

$$\dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{y} = b\cos t,$$

а ускорение —

$$\ddot{x} = -a\cos t, \qquad \ddot{y} = -b\sin t$$

(заметим, что ускорение направлено от рассматриваемой точки к началу координат). Поэтому, в силу равенств (37) и (38), касательное и нормальное ускорения равны

$$|\mathbf{a}_v| = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\sin t\cos t$$

и

$$|\mathbf{a}_n| = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

соответственно. В частности, для произвольной окружности радиуса R имеем

$$|\mathbf{a}_v| = 0, \qquad |\mathbf{a}_n| = R,$$

т.е. в этом случае тангенциальное ускорение всегда равно нулю, а нормальное постоянно и равно радиусу окружности.

Замечание 6. Рассмотренные выше скорость и ускорение являются характеристиками не только кривой (как геометрического места точек плоскости), но и её параметризации. Например, уравнения

$$x = a\cos 2t, \qquad y = b\sin 2t,$$

как уже отмечалось, задают тот же самый эллипс, что и (14), но, как легко убедиться, векторы скорости и ускорения будут для этой параметризации отличаться от тех, которые были получены в примере 9.

Кривизна. Как измерить степень искривлённости плоской линии? Один из способов — вычислить, с какой скоростью меняется угол наклона касательной к этой кривой. Пусть кривая задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Тогда тангенс угла α между касательной и осью абсцисс есть отношение $\dot{y}$ и $\dot{x}$ и поэтому

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Следовательно, в каждый текущий момент t угол α меняется со скоростью

$$\dot{\alpha} = \frac{d}{dt}\Big(\operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Big) = \frac{\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}}{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \tag{39}$$

Величину (39) можно было бы принять за меру кривизны, однако в геометрии принято соотносить скорость поворота касательной со скоростью роста длины кривой в рассматриваемой точке. Иначе говоря, делают следующее: в каждой точке рассматривают бесконечно малое приращение, т.е. дифференциал угла α как функции параметра t:

$$d\alpha = \dot{\alpha}\, dt. \tag{40}$$

С другой стороны, бесконечно малое приращение длины дуги кривой[3] есть

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \tag{41}$$

Определение 8. Отношение

$$k = \frac{d\alpha}{ds} \tag{42}$$

Называется *кривизной кривой* в точке $x = x(t)$, $y = y(t)$. Величина

$$\rho = \frac{1}{k}, \tag{43}$$

обратная к кривизне, называется *радиусом кривизны*.

Из определений (42) и (43) и равенств (39) и (41) следует, что

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{44}$$

а

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}. \tag{45}$$

Пример 10. У окружности радиуса R кривизна равна $\frac{1}{R}$, а радиус кривизны есть $\rho = R$.

Замечание 7. В любой неособой точке кривой можно построить окружность, которая «наиболее близка» к этой кривой в рассматриваемой точке (так же, как касательная — это «наиболее близкая» прямая). Тогда радиус кривизны является радиусом такой окружности.

Замечание 8. Если кривая имеет вид графика функции $y = f(x)$, то её можно задать параметрически, полагая

$$x = t, \qquad y = f(t).$$

Тогда

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \frac{d^n y}{dx^n}, \qquad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3 x}{dt^3} = 0, \dots$$

Поэтому векторы скорости и ускорения примут вид

$$\mathbf{v} = (1, f'(x)), \qquad \mathbf{a} = (0, f''(x)), \tag{46}$$

[3] Что такое сама длина дуги, мы узнаем позже, когда будем изучать определённый интеграл.

а формулы (37), (38), (44) и (45) примут соответственно вид

$$|\mathbf{a}_v| = \frac{y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}}, \qquad |\mathbf{a}_n| = \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}}; \tag{47}$$

$$k = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \rho = \frac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{48}$$

Замечание 9 (о пространственных кривых). Понятие кривой можно обобщить на пространственный случай. Такие кривые наиболее удобно описывать в параметрической форме:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Например, равенства

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

описывают бесконечную спираль, которая «разматывается» вдоль оси Z над единичной окружностью, лежащей в плоскости XY.

Естественно, пространственные кривые, как и плоские, являются объектом математического анализа, однако их изучение выходит за рамки настоящего курса.

3. Полярные координаты

До сих пор мы задавали положение точки на плоскости, указывая её проекции на оси абсцисс и ординат. Эти проекции называются *декартовыми*, или *прямоугольными координатами* точки. Однако однозначно определить положение точки можно не только с помощью её декартовых координат. Например, если указать длину r отрезка, соединяющего точку с началом координат, и величину угла φ, который этот отрезок образует осью абсцисс, то мы также однозначно определим положение точки[4]. Такие координаты называются *полярными*. Переход от декартовых координат к полярным описывается формулами

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{49}$$

а обратный — формулами

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{50}$$

Замечание 10. Очевидно, в качестве начала полярных координат можно выбрать любую точку плоскости — скажем, с декартовыми координатами (x_0, y_0). В этом случае замена координат (50) будет иметь вид

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \qquad y = y_0 + r\sin\varphi. \tag{51}$$

Пример 11. В качестве примера выведем полярных координатах уравнения кривых второго порядка, используя их канонические уравнения в декартовых координатах.

Парабола. Выберем начало полярных координат в фокусе параболы, т.е. положим

$$x = \frac{p}{2} + r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Подставляя эти выражения в каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px,$$

получаем

$$\sin^2\varphi \cdot r^2 - 2p\cos\varphi \cdot r - p^2 = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно полярного радиуса. Решая его и принимая во внимание, что $r \geqslant 0$, получает

$$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}. \tag{52}$$

[4]Величина r называется *полярным радиусом*, а φ — *полярным углом*.

Эллипс. В случае эллипса рассмотрим полярные координаты с центром в одном из фокусов — скажем, в левом, т.е. положим

$$x = -c + r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — эксцентриситет. Подставляя эти равенства в каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0,$$

мы после несложных вычислений получим

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \tag{53}$$

где $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{c}{a} < 1$.

Гипербола. Точно такие же вычисления приводят к уравнению гиперболы, если поместить центр полярных координат в правый её фокус:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{54}$$

Здесь также $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{c}{a} > 1$.

Итак, справедлива

Теорема 2. *Любая невырожденная плоская кривая второго порядка (т.е. парбола, эллипс или гипербола) описывается уравнением*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \tag{55}$$

где

$$0 \leqslant e \begin{cases} < 1 & \text{для эллипса,} \\ = 1 & \text{для параболы,} \\ > 1 & \text{для гиперболы.} \end{cases}$$

Наша конечная цель — выписать важнейшие характеристики плоских кривых (скорость, ускорение, кривизну) в полярных координатах. Для этого нам понадобятся общие факты о преобразовании производных при заменах координат (мы вернёмся к ним при изучении функций многих переменных).

Преобразование производных при замене координат. Пусть x и y — координаты на плоскости.

Определение 9. *Невырожденной заменой координат* $(x, y) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$ называется такое их преобразование

$$x = f(\tilde{x}, \tilde{y}), \qquad y = g(\tilde{x}, \tilde{y}), \tag{56}$$

что определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{57}$$

отличен от нуля. Этот определитель называется *якобианом.*

Замечание 11. В формуле для якобиана обозначения типа $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}$ понимаются как производная функции f по переменной $\tilde{x}$ при фиксированном значении переменной $\tilde{y}$. Это — так называемая *частная производная.* Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}$ функции f по переменной $\tilde{y}$. Нам также понадобятся частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}\Big).$$

Строгое определение и общая теория частных производных будут рассмотрены позже при изучении функций многих переменных.

Пример 12. Рассмотрим полярные координаты $\tilde{x} = \varphi$ и $\tilde{y} = r$. Поскольку

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

якобианом этой замены является

$$\begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r.$$

Таким образом, переход к полярным координатам является невырожденной заменой во всех точках плоскости, кроме начала координат.

Предложение 1. *Пусть $y = F(x)$ — дифференцируемая функция. Предположим, что после замены координат* (56) *она перейдёт в функцию $\tilde{y} = \tilde{F}(\tilde{x})$. Тогда*

$$y' = \frac{\frac{\partial g}{\partial \tilde{y}} \cdot \tilde{y}' + \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}}{\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \cdot \tilde{y}' + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}}, \tag{58}$$

где $y' = \frac{dy}{dx}$ и $\tilde{y}' = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$.

Пример 13. При переходе к полярным координатам первые производные преобразуются по правилу

$$y' = \frac{\sin\varphi \cdot \dot{r} + r\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot \dot{r} - r\sin\varphi}, \tag{59}$$

где $\dot{r} = \frac{r}{\varphi}$.

Пусть

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}') = \frac{\frac{\partial g}{\partial \tilde{y}} \cdot \tilde{y}' + \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}}{\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \cdot \tilde{y}' + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}} \tag{60}$$

— правая часть равенства (58).

Предложение 2. *Пусть $y = F(x)$ — дифференцируемая функция. Предположим, что после замены координат* (56) *она перейдёт в функцию $\tilde{y} = \tilde{F}(\tilde{x})$. Тогда*

$$y'' = \frac{\frac{\partial h}{\partial \tilde{y}'} \cdot \tilde{y}'' + \frac{\partial h}{\partial \tilde{y}} \cdot \tilde{y}' + \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}}}{\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \cdot \tilde{y}' + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}}, \tag{61}$$

где $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ и $\tilde{y}'' = \frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{x}^2}$.

Замечание 12. Пользуясь равенством (60), можно вычислить явный вид частных производных функции h, входящих в выражение (61). Однако, поскольку полученные формулы оказываются весьма громоздкими, при конкретных вычислениях удобней сначала получить вид функции h, а потом найти её частные производные.

Пример 14. В случае перехода к полярным координатам имеем

$$h = \frac{\sin\varphi \cdot \dot{r} + r\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot \dot{r} - r\sin\varphi}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{r}} = -\frac{r}{(\cos\varphi \cdot \dot{r} - r\sin\varphi)^2},$$
$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\dot{r}}{(\cos\varphi \cdot \dot{r} - r\sin\varphi)^2},$$
$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = \frac{\dot{r}^2 + r^2}{(\cos\varphi \cdot \dot{r} - r\sin\varphi)^2}$$

и, значит,

$$y'' = \frac{-r\ddot{r} + 2\dot{r}^2 + r^2}{(\cos\varphi \cdot \dot{r} - r\sin\varphi)^3}. \tag{62}$$

Пользуясь равенствами (59) и (62), можно вычислять необходимые характеристики кривых, заданных в полярных координатах. Например, для кривизны имеем

$$k = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{63}$$

Пример 15. Для невырожденных кривых второго порядка, заданных уравнением (55), получаем

$$\dot{r} = -pe \cdot \frac{\sin\varphi}{(1 - e\cos\varphi)^2}$$

и

$$\ddot{r} = pe \cdot \frac{2e - \cos\varphi - e\cos^2\varphi}{(1 - e\cos\varphi)^3}.$$

Отсюда следует, что кривизна равна

$$k = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1 - e\cos\varphi)^3}{(1 + e^2 - 2e\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \tag{64}$$