ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Производная и её свойства

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (a, b) и x_0 — точка этого интервала. Пусть Δx — такая величина, что $x_0 \pm \Delta x \in (a, b)$, и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1}$$

то он называется *производной* функции f в точке x_0.

Если рассматривать предел (1) при $\Delta x \to 0+$, то говорят о производной *справа*, а при $\Delta x \to 0-$ — о производной *слева*.

Существует несколько способов обозначения производной:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad y', \quad f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0).$$

Последнее употребляется обычно в тех случаях, когда аргумент функции f имеет физический смысл времени.

Предложение 1 (формула для приращения). *Если функция имеет в точке x_0 конечную производную, то её приращение в этой точке может быть записано в виде*

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{2}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Предложение 2 (непрерывность). *Если функция имеет в точке конечную производную, то она непрерывна в этой точке.*

Механический смысл производной. Если материальная точка за время t проходит путь $s = s(t)$, то её *скорость* в момент времени t_0 есть $\dot{s}(t_0)$. Если зависимость скорости точки от времени описывается функцией $v = v(t)$, то её *ускорение* в момент t_0 есть $\dot{v}(t_0)$.

Геометрический смысл производной. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна *тангенсу угла наклона касательной* к графику функции в этой точке.

Основные свойства производной.

Предложение 3 (производные арифметических выражений). *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют конечные производные в точке x_0. Тогда функции $f \pm g$ и $f \cdot g$ также имеют конечные производные в этой точке и*

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \tag{3}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \tag{4}$$

Если производная функции g отлична от нуля, то отношение $\frac{f}{g}$ также имеет конечную производную и

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \tag{5}$$

Предложение 4 (производная сложной функции). *Пусть:*

1) *функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0;*

2) *функция* $z = \varphi(y)$ *имеет конечную производную в точке* $y_0 = f(x_0)$.

Тогда сложная функция $z = \varphi(f(x))$ *также имеет конечную производную в этой точке и*

$$\frac{dz(x_0)}{dx} = \frac{dz(y_0)}{dy} \cdot \frac{dy(x_0)}{dx}. \tag{6}$$

Предложение 5 (производная обратной функции). *Пусть*:

1) *функция* $y = f(x)$ *обладает обратной* $x = g(y)$ *на некотором интервале* (a, b);
2) *существует отличная от нуля конечная производная этой функции в точке* $x_0 \in (a, b)$.

Тогда обратная функция имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ *и*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{7}$$

Говорят, что функция $y = f(x)$ задана *неявно*, если она тождественно удовлетворяет соотношению

$$F(x, y(x)) = 0, \tag{8}$$

где $F(x, y)$ — некоторая функция двух аргументов[1].

Предложение 6 (производная неявной функции). *Если функция* $y = f(x)$ *задана неявно равенством* (8), *то её производная находится из условия*

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{9}$$

Пусть переменные x и y являются функциями некоторой третьей переменной t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \tag{10}$$

и исключением t из соотношений (10) переменную y можно выразить как функцию $y = f(x)$ переменной x. В этом случае говорят, что функция f задаётся *параметрически*.

Предложение 7 (производная функции, заданной параметрически). *Если функция* $y = f(x)$ *задана параметрически с помощью соотношений* (10), *то её производная находится из условия*

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}. \tag{11}$$

2. Производные элементарных функций

Имеют место следующие равенства:

$$y = c = \text{const}, \qquad y' = 0; \tag{12}$$

$$y = x^\mu, \qquad y' = \mu x^{\mu - 1}; \tag{13}$$

(в частности,

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y' = -\frac{1}{x^2}; \tag{14}$$

$$y = \sqrt{x}, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}); \tag{15}$$

$$y = a^x, \qquad y' = a^x \cdot \ln a; \tag{16}$$

[1] Более точный смысл этого определения и последующего предложения разъяснится при изучении вещественных функций многих аргументов.

(в частности,

$$y = \mathrm{e}^x, \qquad y' = \mathrm{e}^x); \tag{17}$$

$$y = \log_a x, \qquad y' = \frac{1}{x \ln a}; \tag{18}$$

(в частности,

$$y = \ln x, \qquad y' = \frac{1}{x}); \tag{19}$$

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x; \tag{20}$$

$$y = \cos x, \qquad y' = -\sin x; \tag{21}$$

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{22}$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \qquad y' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{23}$$

$$y = \arcsin x, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{24}$$

$$y = \arccos x, \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{25}$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}; \tag{26}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{27}$$

3. Дифференциал

Определение 2. Функция $y = f(x)$, определённая в интервале (a, b), называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in (a, b)$, если её приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ выражается формулой

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \qquad A = \mathrm{const}. \tag{28}$$

При этом выражение $A \cdot \Delta x$ называется *дифференциалом* функции f и обозначается через df.

Теорема 1. *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет конечную производную в этой точке. При этом постоянная A из формулы* (28) *совпадает со значением производной функции f в точке x_0: $A = f'(x_0)$.*

Предложение 8 (дифференциалы арифметических выражений). *Имеют место следующие равенства*:

$$d(f \pm g) = df \pm dg, \tag{29}$$

$$d(f \cdot g) = f\,dg + g\,df, \tag{30}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}. \tag{31}$$

Упражнение 1. Пользуясь теоремой 1 и равенствами (12)–(27), выпишите формулы для дифференциалов элементарных функций.

Инвариантность дифференциала. Пусть заданы такие функции $y = f(x)$ и $z = \varphi(y)$, что определена их суперпозиция $z = \varphi(f(x))$. Тогда дифференциал сложной функции можно вычислить двумя способами:

1) как функции переменной x непосредственно;
2) сначала как функции переменной y, а затем подставить дифференциал y как функции переменной x.

Из предложения 4 следует, что результат будет одним и тем же. Этот факт называется *инвариантностью дифференциала.*

4. Производные высших порядков

Предположим, что производная функции $y = f(x)$ определена во всех точках некоторого интервала (a, b). Значит, на этом интервале определена функция $y' = \frac{df}{dx}$. Если эта функция тоже дифференцируема, то её производная называется *второй производной* функции f и обозначается через $\frac{d^2 f}{dx^2}$ или через y''. Если эта функция тоже обладает производной, то можно определить *третью производную*, и т.д. Таким образом, *производная порядка* n (или n*-я производная*) определяется как производная производной предыдущего порядка:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{32}$$

или

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{33}$$

Определение 3. Если функция $y = f(x)$ обладает производными до порядка n в точке x_0, то говорят, что она n *раз дифференцируема* в этой точке. Если она обладает производными всех порядков, то она называется *бесконечно дифференцируемой.*

Предложение 9 (формула Лейбница). *Производная порядка n функции $f \cdot g$ вычисляется по следующей формуле*:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} \cdot g^{(n-i)} = f \cdot g^{(n)} + n f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + \dots + \frac{n!}{i!(n-i)!} f^{(i)} \cdot g^{(n-i)} + \dots + f \cdot g^{(n)}, \tag{34}$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ *— число сочетаний из n по i.*

В частности,

$$(f \cdot g)'' = f \cdot g'' + 2f' \cdot g' + f'' \cdot g, \tag{35}$$

$$(f \cdot g)''' = f \cdot g''' + 3f' \cdot g'' + 3f'' \cdot g' + f''' \cdot g \tag{36}$$

и т.д.

5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы о средних.

Теорема 2 (теорема Ферма). *Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (a, b) и принимает в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ наибольшее (наименьшее) значение. Тогда, если эта функция дифференцируема в рассматриваемой точке, то её производная равна нулю.*

Теорема 3 (теорема Ролля). *Пусть функция $y = f(x)$:*

1) *определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$;*
2) *дифференцируема во всех точках интервала (a, b);*
3) *принимает равные значения на концах отрезка: $f(a) = f(b)$.*

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Теорема 4 (теорема Лагранжа). *Пусть функция $y = f(x)$:*

1) *определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$;*
2) *дифференцируема во всех точках интервала (a, b).*

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, *что выполнено равенство*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{37}$$

Теорема 5 (теорема Коши). *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$:

1) *определены и непрерывны на отрезке* $[a, b]$;
2) *дифференцируемы во всех точках интервала* (a, b);
3) $g'(x) \neq 0$ *для любой точки* $x \in (a, b)$.

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, *что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{38}$$

Равенство (38) называется *формулой Коши*.

Теоремы Лопиталя. [2]

Теорема 6 (первое правило Лопиталя). *Пусть*:

1) *функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *определены в полуинтервале* $(a, b]$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
3) *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *в рассматриваемом полуинтервале, причём* $g'(x) \neq 0$;
4) *существует (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда

$$\lim_{x\to a} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{39}$$

Этой теореме аналогична другая:

Теорема 7. *Пусть*:

1) *функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *определены в полуинтервале* $[a, +\infty)$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
3) *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *в рассматриваемом полуинтервале, причём* $g'(x) \neq 0$;
4) *существует (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{40}$$

Теорема 8 (второе правило Лопиталя). *Пусть*:

1) *функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *определены в полуинтервале* $(a, b]$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
3) *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *в рассматриваемом полуинтервале, причём* $g'(x) \neq 0$;
4) *существует (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда

$$\lim_{x\to a} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{41}$$

Этой теореме аналогична другая:

Теорема 9. *Пусть*:

1) *функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *определены в полуинтервале* $[a, +\infty)$;

[2]На самом деле, эти теоремы принадлежат Иоганну Бернулли!

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$;
3) *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *в рассматриваемом полуинтервале, причём* $g'(x) \neq 0$;
4) *существует (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{42}$$

Конечно, в теоремах 7 и 9 полуинтервал $[a, +\infty)$ можно заменить на $(-\infty, a]$.

6. Формула Тейлора

Теорема 10. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и* $n+1$ *раз дифференцируема на интервале* (a, b). *Рассмотрим точку* $x_0 \in (a, b)$ *и такое приращение* Δx *переменной* x, *что* $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. *Тогда приращение* $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *функции* f *в точке* x_0 *имеет вид*

$$\Delta f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o(\Delta x^n). \tag{43}$$

Равенство (43) называется *формулой Тейлора*, а его последнее слагаемое — остаточным членом (в *форме Пеано*). Существует более точное представление остаточного члена — в *форме Лагранжа*. Оно имеет вид

$$o(\Delta x^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}, \tag{44}$$

где c — некоторая точка, лежащая внутри интервала (a, b).

Формула Тейлора для некоторых элементарных функций. Имеют место следующие равенства:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{45}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \tag{46}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \tag{47}$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \tag{48}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \tag{49}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}). \tag{50}$$

Эти формулы позволяют приближённо вычислять значения указанных функций[3], а представление (44) остаточного члена в форме Лагранжа — оценивать погрешность вычисления.

[3]Именно так их вычисляют компьютеры.

7. Исследование функций и построение графиков

Для исследование произвольной[4] функции и построения её графика рекомендуется выполнить следующие шаги:

1) Найти область определения и область допустимых значений функции.
2) Исследовать функцию на чётность и нечётность[5].
3) Исследовать функцию на периодичность[6].
4) Найти узловые точки графика.
5) Исследовать поведение функции вблизи узловых точек, а также при стремлении аргумента к плюс и минус бесконечности.
6) Исследовать поведение функции между узловыми точками.

Узловые точки. К узловым точкам графика функции относятся:

1) Точки пересечения графика с осью абсцисс[7].
2) Точки разрывов.
3) Точки экстремумов.
4) Точки перегиба.

Пересечение с осью абсцисс. Точки пересечения графика функции с осью абсцисс (нули функции) находятся из условия

$$f(x) = 0.$$

Для каждой такой точки необходимо определить, меняет в ней функция знак или нет.

Пересечение с осью ординат — это точка $(0, f(0))$.

Точки разрывов. Для каждой точки разрыва x_0 необходимо выяснить:

1) Определена ли функция в этой точке.
2) Существуют ли пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ (то есть относится разрыв к первому или второму роду) и, если существуют, вычислить их.
3) Меняет ли функция знак при переходе через точку разрыва, если этот вопрос имеет смысл для данной точки.

Замечание 1. Такой вопрос, например, не имеет смысла для функции $y = \sin\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$.

Для некоторых точек разрыва второго рода можно ввести понятие *вертикальной асимтоты*[8].

Определение 4. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)$ равен плюс или минус бесконечности.

Экстремумы.

Определение 5. Говорят, что функция $y = f(x)$ достигает в точке x_0 *локального минимума* (*максимума*), если существует такой интервал $(a, b) \ni x_0$, что $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0) > f(x))$ для любой точки $x \in (b, c)$.

Точки локальных минимумов или максимумов называются *экстремумами*[9].

Для нахождения экстремальных точек пользуются следующим результатом.

---

[4]На самом деле, функции, встречающиеся в заданиях, являются бесконечно дифференцируемыми всюду, кроме конечного числа точек.

[5]Напомним, что функция $y = f(x)$ называется чётной, если $f(-x) = f(x)$, и нечётной, если $f(-x) = -f(x)$ для любой точки x из области определения.

[6]Напомним, что функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, что $f(x+T) = f(x)$ для любого x.

[7]Полезно также найти точку пересечения с осью ординат.

[8]В слове «аси́мптота» ударение ставится на втором слоге.

[9]Экстре́мум — ударение на втором слоге.

Предложение 10 (условия существования экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Тогда:*

Необходимое условие: *Если $x_0 \in (a, b)$ — точка экстремума, то производная $f'(x_0)$ либо не существует, либо равна нулю.*

Первое достаточное условие: *Если производная $f'(x)$ меняет знак в точке x_0, то x_0 — точка экстремума. При этом, если знак меняется с «плюса» на «минус», то это локальный максимум, а если с «минуса» на «плюс» — локальный минимум.*

Второе достаточное условие: *Если в точке x_0 первая производная функции обращается в нуль, а $f''(x_0) > 0$, то x_0 — локальный минимум. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — локальный максимум.*

Третье достаточное условие: *Пусть*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) *если n — чётное число, то x_0 — локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.*
2) *Если n нечётно, то рассматриваемой точке экстремума нет.*

Точки перегиба.

Определение 6. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *точкой перегиба*, если на интервале (a, x_0) функция выпукла, а на интервале (x_0, a) — вогнута или наоборот (см. определение 8).

Предложение 11 (условия существования точки перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Тогда:*

Необходимое условие: *Если x_0 — точка перегиба функции $y = f(x)$, то либо вторая производная не существует $f''(x_0)$, либо равна нулю.*

Первое достаточное условие: *Если вторая производная меняет знак в точке (x_0, a), то это точка перегиба.*

Второе достаточное условие: *Если*

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

то

1) *если n нечётно, то x_0 — точка перегиба,*
2) *если n чётно, то x_0 не является точкой перегиба.*

Поведение на бесконечности. Исследование поведения функции на бесконечности включает в себя

1) определение существования пределов $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ и их вычисление, если они существуют,
2) нахождение наклонных и горизонтальных асимптот если они существуют.

Определение 7. Прямая $y = Ax + B$ называется *асимптотой* функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax - B) = 0.$$

Если угловой коэффициент A равен нулю, то асимптота называется *горизонтальной*, в противном случае она называется *наклонной*.

Поведение функции между узловыми точками.

Интервалы знакопостоянства: Интервалами знакопостоянства называются множества вида

$$D_+ = \{\, x \in D \mid f(x) > 0 \,\}$$

или

$$D_- = \{\, x \in D \mid f(x) < 0 \,\},$$

где D — область определения функции.

Граничными точками интервалов знакопостоянства могут служить нули функции и точки её разрыва.

Интервалы монотонности: Интервалом монотонности функции называется интервал, лежащий в области её определения, на котором функция возрастает (убывает).

Предложение 12. *Если $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то найдётся интервал $(a, b) \ni x_0$, на котором функция возрастает (убывает).*

Граничными точками интервалов монотонности могут служить экстремумы функции и точки её разрыва.

Выпуклость и вогнутость:

Определение 8. Функция называется *вогнутой* (или *выпуклой вверх*) в точке x_0, если существует интервал $(a, b) \ni x_0$, во всех точках которого касательная к графику в точке (x_0, y_0) лежит выше точек самого графика. Функция называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*) в точке x_0, если существует интервал $(a, b) \ni x_0$, во всех точках которого касательная к графику в точке (x_0, y_0) лежит ниже точек самого графика.

Предложение 13. *Если $f''(x_0) < 0$, то функция вогнута в точке x_0. Если $f''(x_0) > 0$, то функция выпукла в этой точке.*

Граничными точками интервалов выпуклости и вогнутости могут служить точки перегиба функции и точки её разрывов.