ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. Числовые последовательности

Определение 1. Отображение $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ множества натуральных, принимающее свои значения в множестве действительных чисел, называется *числовой последовательностью.* Обычно числовые последовательности записывают в виде $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, и a_n называется *общим членом* последовательности.

Пример 1. Вот несколько примеров, показывающих, каким образом можно задавать последовательности.

1) Общий член можно задать явной формулой, например: $a_n = 2n$ (последовательность всех чётных чисел положительных чисел), $a_n = 2n - 1$ (нечётные числа) и т.п.
2) Другой способ определения — это описание очередного члена через предыдущие (такой способ называется *рекуррентным*). Например, определение *арифметической прогрессии* является рекуррентным: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$. Аналогично определяется *геометрическая прогрессия*: $b_1 = b$, $b_{n+1} = qb_n$. Вот более сложный пример: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Полученная таким образом последовательность называется *последовательностью* (или *рядом*) *Фибоначчи*, а её члены — числами Фибоначчи.
3) Иногда описание последовательности, будучи вполне строгим, в принципе не позволяет получить формулу для общего члена. Такова например последовательность цифр в десятичном представлении числа π или последовательность всех простых чисел.

Определение 2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность.

1) Число A называется её *пределом* ($A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$)[1], если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого натурального числа $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.
2) Говорят, что последовательность *стремится к бесконечности* ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), если для любого числа M найдётся такой номер $N = N(M)$, что для любого натурального числа $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$.
3) Последовательность *стремится к плюс бесконечности* ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$), если для любого числа M найдётся такой номер $N = N(M)$, что для любого натурального числа $n > N$ выполняется неравенство $a_n > M$.
4) Последовательность *стремится к минус бесконечности* ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), если для любого числа M найдётся такой номер $N = N(M)$, что для любого натурального числа $n > N$ выполняется неравенство $a_n < M$.

В последних трёх случаях последовательность называется *бесконечно большой величиной.* Если же имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность называется *бесконечно малой.*

Свойства бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей, а также свойства пределов последовательностей аналогичны соответствующим свойствам функций (см. ниже §§ 4, 5 и 6).

Пример 2. Предел последовательность с общим членом $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$ равен 2. Это доказывается следующим образом. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Исходя из определения нам нужно

[1] Говорят также, что последовательность *сходится* (или *стремится*) к A.

найти такой $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого для любых n будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{2n^2-1}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

или

$$-\varepsilon < \frac{3}{n^2} < \varepsilon. \tag{2}$$

Поскольку n — натуральное (а значит, положительное) число, левая часть неравенства (2) выполняется всегда, а из правой следует, что

$$n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Значит, если положить

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\right] + 1,$$

то при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ неравенство (1) выполнится.

Квадратные скобки в последней формуле обозначают *целую часть*.

Определение 3. *Целой частью* вещественного числа $r \in \mathbb{R}$ называется наибольшее целое, не превосходящее это число:

$$[r] = \max\{l \in \mathbb{Z} \mid l \leqslant r\}.$$

Пример 3. Рассмотрим последовательности

$$a_n = n^2, \qquad b_n = -n^2, \qquad c_n = (-1)^n n^2.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \infty,$$

т.е. все эти последовательности определяют бесконечно большие величины. Наоборот, последовательности

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = -\frac{1}{n^2}, \qquad c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

являются бесконечно малыми.

Пример 4. Последовательность

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

не имеет предела. Чтобы установить этот факт, нужно доказать следующее утверждение:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N\colon |a_n - a| \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Замечание 1. Доказательство утверждения (3) обычно бывает кропотливым, а иногда и трудным. Более простое доказательство основывается на следующем свойстве пределов.

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность и $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — возрастающее отображение, т.е. $\varphi(n) < \varphi(n+1)$. Тогда последовательность $b_n = a_{\varphi(n)}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Например, если $a_n = (-1)^n n^2$ и $\varphi(n) = 2n$, то

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n}(2n^2) = 4n^2$$

— подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$.

Предложение 1. *Путь $\{a_n\}$ — последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда у любой её подпоследовательности b_n также существует предел, причём $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

Теперь легко доказать, что последовательность из примера 4 не имеет предела. Действительно, рассмотрим две подпоследовательности

$$b_n = a_{2n-1} = -1, \qquad c_n = a_{2n} = 1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1$, последовательность $\{a_n\}$ предела иметь не может.

2. Функции

Определение 4. Пусть $D \subset \mathbb{R}$ — подмножество множества действительных чисел. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}$ называется *функцией вещественного аргумента* x. При этом множество D называется *областью определения* функции f, а множество

$$V = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \,\}$$

— *областью допустимых значений. Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество

$$\{\, (x, y) \mid y = f(x) \,\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Пусть $y = f(x)$ и $z = \varphi(y)$ – две функции и область допустимых значений функции f содержится в области определения функции φ. Тогда функция $z = \varphi(f(x))$ называется *суперпозицией* функций f и φ, или *сложной функцией*.

Функция $x = \varphi(y)$ называется *обратной* к функции f, если $\varphi(f(x)) = x$ и $f(\varphi(y)) = y$ при всех допустимых значениях x и y.

3. Некоторые классы функций

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если из $x < x'$ следует, что

$$f(x) \leqslant f(x') \qquad (f(x) \geqslant f(x')). \tag{4}$$

Возрастающие и убывающие функции называются также *монотонными*. Если в (4) неравенства строгие, то функция называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), или *строго монотонной*.

Определение 6. Пусть область определения функции $y = f(x)$ такова, что вместе с каждой точкой x в ней содержится и точка $-x$. Функция называется *чётной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Заметим, что любую функцию, область определения которой симметрична относительно точки 0, можно представить в виде суммы чётной и нечётной, полагая

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Следующие функции по традиции называются *элементарными*:

1) *Целая рациональная функция* (или *полиномиальная функция*, или *многочлен*) $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.
2) *Дробная рациональная функция* $y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$.
3) *Степенная функция* $y = x^\mu$.
4) *Показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$.
5) *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
6) *Тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ и $y = \csc x$.
7) *Обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

К элементарным относят также функции, получаемые из перечисленных с помощью арифметических операций и суперпозиции.

Пример 5 (гиперболические функции). Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

не входят в указанный список, но выражаются через перечисленные. Они называются, соответственно, *гиперболическим синусом* и *гиперболическим косинусом.*

4. Пределы функций

Определение 7. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и функция $y = f(x)$ определена во всех точках интервала $(b, c) \ni a$, кроме, возможно, самой точки a. Тогда число A называется:

1) *пределом функции f при x, стремящемся к a*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in (b, c)$, удовлетворяющей неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (в этом случае используется обозначение $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$);
2) *пределом функции f при x, стремящемся к a справа*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in (a, c)$, удовлетворяющей неравенству $0 < x - a < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (в этом случае используется обозначение $A = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$)[2];
3) *пределом функции f при x, стремящемся к a слева*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in (b, a)$, удовлетворяющей неравенству $0 < a - x < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (в этом случае используется обозначение $A = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$)[3].

Определение 8. Пусть $c \in \mathbb{R}$ и функция $y = f(x)$ определена во всех точках бесконечного интервала $(b, +\infty)$. Число A называется *пределом функции f при x, стремящемся к плюс бесконечности*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $X > 0$, что выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ при всех $x > X$ (в этом случае используется обозначение $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$).

Аналогичным образом определяется предел *при x, стремящемся к минус бесконечности* (в этом случае используется обозначение $A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$).

Замечание 2. Все эти очень похожие друг на друга определения можно объединить в одно, если ввести понятие *окрестности.* Именно, для точки $a \in \mathbb{R}$ её окрестностью[4] является множество

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\},$$

а окрестностью «точки» ∞ — множество

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| > \varepsilon\}.$$

Тогда все определения пределов вида $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где a и b могут быть либо «настоящими» точками, либо бесконечностью, сводятся к следующему.

Определение 9. Величина b называется пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к величине a, если для любой окрестности $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ найдётся такая окрестность $\mathcal{U}_\delta(b)$, что

$$f(x) \in \mathcal{U}_\delta(b) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a).$$

Если ввести *левые* и *правые* окрестности, то с их помощью можно определить пределы при $x \to a+$ и т.п.

[2] В этом случае достаточно, чтобы функция была определена на интервале (a, c).

[3] В этом случае достаточно, чтобы функция была определена на интервале (b, a).

[4] Такие окрестности называют *проколотыми.*

Определение 10. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$), то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке a (соответственно, в плюс или минус бесконечности).

Лемма 1 (первая лемма о бесконечно малых). *Сумма любого конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой величиной.*

Лемма 2 (вторая лемма о бесконечно малых). *Произведение ограниченной функции на бесконечно малую является бесконечно малой.*

5. Бесконечно большие величины

Определение 11. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке a, если она определена во всех точках некоторого интервала $(b, c) \ni a$, кроме, возможно, самой точки a, и для любого числа M найдётся такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x)| > M \tag{5}$$

для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Если неравенство (5) заменить на $f(x) > M$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если же его заменить на $f(x) < M$, то этот факт записывается в виде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Аналогичным образом определяются бесконечно большие функции в *плюс и минус бесконечности*, а также функции, бесконечные *справа или слева* в точке a.

Предложение 2 (связь между бесконечно большими и бесконечно малыми). *Если функция $y = f(x)$ является бесконечно большой в точке a (в плюс бесконечности, в минус бесконечности), то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой, и наоборот.*

Предложение 3 (свойства бесконечно больших величин). *Бесконечно большие величины обладают следующими свойствами*:

1) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A < \infty$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \infty$;
2) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$;
3) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \infty$;
4) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *и* $g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;
5) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

6. Основные теоремы о пределах

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие существования предела). *Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке a, тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех x и x', удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < |x' - a| < \delta,$$

выполнено неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Аналогичные условия можно сформулировать для существования конечного предела в плюс и минус бесконечности.

Предложение 4. *Если функция имеет предел в точке a и $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — такая последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Теорема 2 (теорема о двух милиционерах). *Пусть заданы три функции и известно, что:*

1) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *и*
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *и он также равен* A.

Теорема 3 (существование предела монотонной функции). *Пусть функция* $y = f(x)$ *возрастает на интервале* (a, b) *(в частности, возможен случай* $b = +\infty$*). Тогда, если эта функция ограничена сверху, то существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$. *В противном случае этот предел равен* $+\infty$.

Аналогичное утверждение справедливо для убывающих функций.

Пример 6 (второй замечательный предел). Имеют место равенства

$$\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}. \tag{6}$$

и

$$\lim_{x\to +\infty} (1+\tfrac{1}{x})^x = \mathrm{e} \tag{7}$$

Предложение 5. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq \infty$ *и* $A > p$ $(A < q)$, *то для достаточно близких (но не равных* a*), к* a *значениях* x *и сама функция удовлетворяет неравенству*

$$f(x) > p \quad (f(x) < q).$$

Следствие 1. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет конечный положительный (отрицательный) предел в точке* a, *то и сама функция положительна (отрицательна) во всех достаточно близких к* a *точках, кроме, возможно, самой точки* a.

Следствие 2. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет конечный предел в точке* a, *то она ограничена в достаточно близких к* a *точках, то есть существуют такие числа* m *и* M, *что*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

для всех x, *удовлетворяющих неравенству* $0 < |x - a| < \delta$.

Предложение 6. *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *имеют конечные пределы в точке* a. *Тогда из неравенства* $f(x) \leqslant g(x)$ *следует неравенство*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Аналогичное утверждение справедливо для противоположных неравенств.

Предложение 7. *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *имеют конечные пределы в точке* a. *Тогда имеют место равенства*

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \tag{8}$$

и

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x). \tag{9}$$

Если при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то справедливо также равенство*

$$\lim_{x\to a} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

7. Неопределённости и эквивалентность

Определение 12. Различают следующие типы *неопределённостей*:

1) неопределённостью *типа* $\left[\frac{0}{0}\right]$ в точке a называется отношение вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
2) неопределённостью *типа* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в точке a называется отношение вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
3) неопределённостью *типа* $0\cdot\infty$ в точке a называется произведение вида $f(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
4) неопределённостью *типа* $\infty-\infty$ в точке a называется разность вида $f(x)-g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

Вычисление пределов выражений $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)g(x)$ и $f(x)-g(x)$ в указанных выше случаях называется *раскрытием неопределённости.*

Аналогичным образом определяются неопределённости в плюс бесконечности и минус бесконечности.

Пример 7. Отношение $\frac{\sin x}{x}$ является неопределённостью типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ в точке 0. Она раскрывается следующим образом

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{11}$$

Это — так называемый *первый замечательный предел.*

Пример 8. Отношение $\frac{a^x}{x^\alpha}$, $a>1$, $\alpha>0$, является неопределённостью типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в плюс бесконечности. Имеет место равенство

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty. \tag{12}$$

Поэтому говорят, что показательная функция *растёт быстрее* в бесконечности, чем любая степенная.

Пример 9. Отношение $\frac{\log_a x}{x^\alpha}$, $a>1$, $\alpha>0$, является неопределённостью типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в плюс бесконечности. Имеет место равенство

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0. \tag{13}$$

Поэтому говорят, что логарифмическая функция *растёт медленнее* в бесконечности, чем любая степенная.

Замечание 3. Если рассматривать выражения вида $f(x)^{g(x)}$, то возникают также неопределённости типа 1^∞, 0^0 и ∞^0. Однако они сводятся к уже известным преобразованием

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}. \tag{14}$$

Определение 13. Две бесконечно малые в точке a (в плюс бесконечности, в минус бесконечности) величины $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен 1. Эквивалентность обозначается через

$$f(x) \sim_a g(x). \tag{15}$$

Если понятно, в какой точке рассматривается эквивалентность, то пишут просто $f(x)\sim g(x)$.

Пример 10. Следующие функции эквивалентны в нуле:

$$\sin x \sim x, \tag{16}$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\arcsin x &\sim x, && (19)\\
\operatorname{arctg} x &\sim x, && (20)\\
\mathrm{e}^x - 1 &\sim x, && (21)\\
a^x - 1 &\sim x\ln a, && (22)\\
\ln(1+x) &\sim x, && (23)\\
\log_a(1+x) &\sim \frac{x}{\ln a}, && (24)\\
(1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x. && (25)
\end{aligned}$$

Определение 14. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет *порядок малости* k, $k > 0$, если имеет место эквивалентность

$$f(x) \sim_a \alpha(x-a)^k, \qquad \alpha \neq 0. \tag{26}$$

В этом случае пишут

$$f(x) = O((x-a)^k). \tag{27}$$

Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = 0$, то пишут

$$f(x) = o((x-a)^k) \tag{28}$$

и говорят, что порядок её малости *меньше* k.

8. Непрерывность

Определение 15. Функция $y = f(x)$, определённая в интервале (b,c), называется *непрерывной в точке* $a \in (b,c)$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{29}$$

Функция называется *непрерывной справа* (*слева*), если $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ ($\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$). Если условие (29) не выполняется, то говорят, что функция *имеет разрыв* в точке a.

Предложение 8. *Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда непрерывна в этой точке и справа, и слева.*

Предложение 9. *Пусть $\Delta x = x - a$ и $\Delta y = f(x) - f(a)$. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.*

Теорема 4 (непрерывность монотонных функций). *Пусть функция $y = f(x)$ определена и монотонна в интервале (b,c). Тогда она непрерывна, если множество её значений содержится в некотором интервале и заполняет его сплошь.*

Теорема 5 (непрерывность сложной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (b,c) и непрерывна в некоторой точке $a \in (b,c)$. Тогда, если функция $z = \varphi(y)$ определена на некотором интервале, содержащем точку $a' = f(a)$ и непрерывна в точке a', то функция $\varphi(f(y))$ также непрерывна в точке a.*

Теорема 6 (арифметические операции над непрерывными функциями). *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в общем интервале и непрерывны в некоторой точке a этого интервала, то в этой же точке непрерывны и функции*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(*последнее справедливо, если $g(a) \neq 0$*).

Следствие 3 (непрерывность элементарных функций). *Следующие функции непрерывны*:

1) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *на* $(-\infty, +\infty)$;
2) $y = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}$ *во всех точках, где знаменатель не обращается в нуль*;

3) $y = a^x$, $a > 0$, *на* $(-\infty, +\infty)$;
4) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *на* $(0, +\infty)$;
5) $y = x^\mu$ *на* $[0, +\infty)$ *при* $\mu > 0$ *и на* $(0, +\infty)$ *при* $\mu < 0$;
6) $y = \sin x$ *и* $y = \cos x$ *на* $(-\infty, +\infty)$;
7) $y = \operatorname{tg} x$ *и* $y = \sec x$ *всюду, кроме* $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
8) $y = \operatorname{ctg} x$ *и* $y = \csc x$ *всюду, кроме* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
9) $y = \arcsin x$ *и* $y = \arccos x$ *на* $[-1, 1]$;
10) $y = \operatorname{arctg} x$ *и* $y = \operatorname{arcctg} x$ *на* $(-\infty, +\infty)$;

9. Классификация точек разрыва

Определение 16. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке a и существует предел $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq f(a)$ (или $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$), то говорят, что функция терпит в точке a *разрыв первого рода*. Если же предела не существует или он равен бесконечности, то это — *разрыв второго рода*.

10. Функции, непрерывные на отрезке

Определение 17. Функция $y = f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной на этом отрезке*, если она непрерывна справа в точке a, непрерывна слева в точке b и непрерывна в любой внутренней точке этого отрезка.

Теорема 7 (первая теорема Больцано–Коши). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то есть*

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Тогда между a и b найдётся точка c, в которой эта функция обращается в нуль:

$$f(c) = 0, \qquad a < c < b.$$

Теорема 8 (вторая теорема Больцано–Коши). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения*:

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \qquad A \neq B.$$

Тогда, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдётся такая точка $c \in [a, b]$, что

$$f(c) = C.$$

Следствие 4. *Если функция непрерывна на отрезке, то множество её значений также заполняет некоторый отрезок.*

Замечание 4 (метод половинного деления). Первая теорема Больцано–Коши означает, что любое уравнение

$$f(x) = 0$$

имеет хотя бы один корень отрезке $[a, b]$, если $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$ и принимающая значения противоположных знаков на его концах. Если известно, что этот корень — единственный[5], то, воспользовавшись той же теоремой, можно приближённо вычислить этот корень с любой, наперёд заданной точностью. Именно, предположим для определённости, что $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$. Пусть $c = \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка. Тогда можно считать, что искомый корень x_0 приблизительно равен c. При этом

$$|x_0 - c| \leqslant \varepsilon_1 = \frac{b-a}{2},$$

т.е. ε_1 — точность оценки значения корня.

[5]В этом случае (a, b) называется *интервалом отделимости* корня.

Возможны три случая:

$$(1)\quad f(c)=0,\qquad (2)\quad f(c)<0,\qquad (2)\quad f(c)>0.$$

В первом из них c — точное значение корня, т.е. задача решена. Во втором случае, в силу теоремы 7, корень лежит в интервале (c,b), а в третьем — в интервале (a,c). Значит, мы можем повторить процедуру и вычислить корень с точностью $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{2}$. Таким образом, за n шагов мы либо узнаем корень точно, либо вычислим его с точностью $\varepsilon_n=\frac{b-a}{2^n}$. Значит, что бы вычислить приближённое значение корня с заданной точностью ε, достаточно проделать

$$n=\left[\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}\right]+1$$

шагов, где, как и раньше, квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Теорема 9 (существование обратной функции). *Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на некотором отрезке. Тогда на соответствующем отрезке её значений существует однозначная обратная к ней функция $x=g(y)$, которая также непрерывна является строго возрастающей (убывающей).*

Теорема 10 (первая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда её значения на этом отрезке ограничены сверху и снизу, то есть такие числа m и M, что*

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

для любой точки $x\in[a,b]$.

Теорема 11 (вторая теорема Вейерштрасса). *Любая функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, достигает своего максимального и минимального значений.*