МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

**А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев**

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению лабораторных работ

*для студентов I курса*
*направления 23.03.01*
*очной формы обучения*

**Москва-2016**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА**
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ**
**БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

---

**Кафедра высшей математики**
А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению лабораторных работ

*для студентов I курса*
*направления 23.03.01*
*очной формы обучения*

**Москва-2016**

ББК 518
С17

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. О.Г. Илларионова

Самохин А.В., Дементьев Ю.И.
С17 Математика. Пособие по выполнению лабораторных работ. - М.: МГТУ ГА, 2016. - 20 с.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Прикладная математика» по учебному плану направления 23.03.01 для студентов I курса очной формы обучения.

Пособие содержит образцы выполнения лабораторных работ по дисциплине «Прикладная математика» и необходимые для этого сведения по математической программе maple.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 14.09.2016 г. и методического совета 13.10.2016 г.

Подписано в печать 10.11.2016 г.

| | | |
|---|---|---|
| Печать офсетная | Формат 60x84/16 | 0,87 уч.-изд. л. |
| 1,16 усл.печ.л. | Заказ № 120 | Тираж 70 экз. |

Московский государственный технический университет ГА
*125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20*
Редакционно-издательский отдел

# Лабораторная работа №1
# Первичная обработка данных и проверка статистических гипотез

```
> restart
with(Statistics)
Digits := 4; N := 5; n := 25
                        4      5      25
X := vector(n) : Y := vector(n) :
```

Чтение данных из файла

```
A := readdata("0", 1);
    #чтение данных из файла. Надо прописать путь к своему
    файлу. Обратите внимание на формат имени файла!!!
```

[25.43, 38.63, 34.23, 38.53, 47.62, 48.93, 53.28, 64.76, 51.09, 68.37, 69.57, 65.57, 81.95, 79.03, 71.80, 82.68, 83.97, 87.92, 89.93, 91.60, 99.13, 95.14, 98.98, 101.6, 102.8, 107.7, 112.7, 106.1, 107.8, 117.4, 119.3, 116.4, 123.5, 121.6, 118.6, 119.9, 119.5, 121.7, 125.0, 116.4, 122.8, 124.0, 131.4, 139.2, 128.4, 137.1, 133.3, 131.6, 130.7, 143.4, 131.2, 131.1, 128.2, 157.6, 148.6, 147.4, 137.6, 146.8, 145.2, 152.5, 137.5, 141.8, 146.6, 150.6, 154.1, 143.8, 148.7, 151.1, 151.6, 149.0, 144.5, 145.8, 140.3, 152.7, 157.4, 142.8, 150.7, 159.8, 153.0, 148.5, 167.9, 153.8, 163.1, 155.4, 148.7, 154.6, 149.9, 155.7, 156.2, 172.1, 159.0, 162.2, 138.0, 151.1, 144.5, 155.0, 151.8, 152.8, 161.5, 154.3, 148.9, 157.2, 148.1, 151.9, 159.5, 154.6, 161.1, 164.1, 140.6, 168.5, 155.5, 150.5, 153.0, 162.2, 158.9, 151.8, 155.4, 166.0, 156.8, 146.9, 158.6, 155.4, 165.4, 157.3, 168.8, 158.6, 148.8, 153.2, 161.8, 161.4, 157.1, 164.0, 160.6, 165.3, 156.1, 154.4, 159.6, 161.8, 168.1, 156.4, 164.8, 161.2, 160.5, 158.5, 162.8, 165.2, 157.2, 166.7, 157.4, 162.1, 159.8, 152.1, 157.9, 166.2, 160.1, 168.6, 161.6, 157.4, 159.0, 156.4, 150.4, 148.7, 154.9, 159.4, 155.9, 171.3, 154.1, 153.3, 166.5, 153.7, 151.4, 165.1, 166.3, 153.4, 145.3, 163.2, 170.4, 162.3, 164.6, 154.2, 154.6, 152.6, 170.4, 158.5, 160.3, 163.7, 164.8, 152.8, 167.7, 166.3, 164.0, 161.1, 155.8, 167.6, 169.9, 164.4, 158.9, 157.5, 171.0, 172.1]

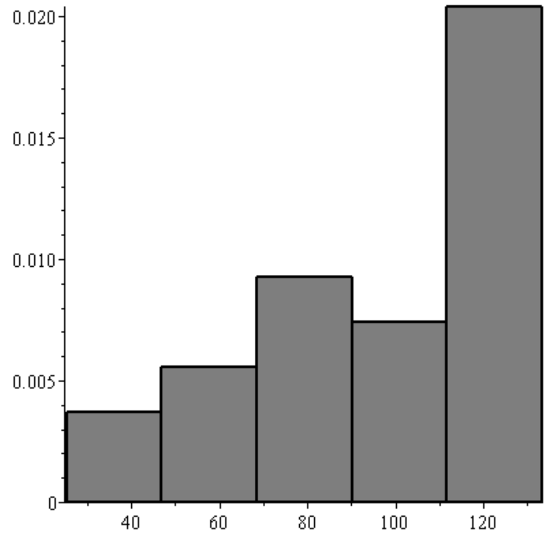
for i to 25 do $X[i] := A_{2\,i-1}$ :  $Y[i] := A_{2\,i}$ : end do:

convert(X, list); a := min(%); b := max(%%); convert(Y, list); c := min(%); d := max(%%);

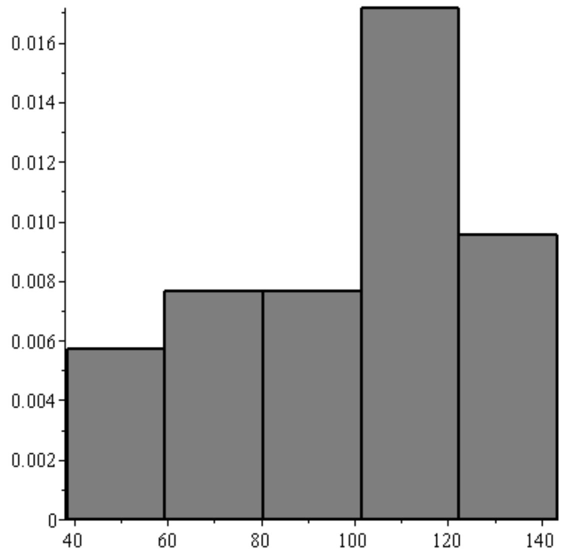
Графическое представление данных: гистограммы и облако точек

143.4

> Histogram(X, bincount = N); H := Histogram(X, bincount = N)




Histogram(Y, bincount = N); Y := Histogram(Y, bincount = N)




P := ScatterPlot(X, Y); plots[display](P)

Точечные оценки средних и среднеквадратичных отклонений X и Y

$$mX := \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{n};\ mY := \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)}{n};\ i := 'i' : \mathrm{Mean}(X);$$

Mean(Y);

95.24 98.60 95.31 98.61

$$sigmaX := \sqrt{\frac{\left(\sum_{m=1}^{n} \left(X_m - mX\right)^2\right)}{n-1}};$$

32.89

$$sigmaY := \sqrt{\frac{\left(\sum_{l=1}^{n} \left(Y_l - mY\right)^2\right)}{n-1}};$$

31.06

$StandardDeviation(X);$

32.87

$s_1 = \sqrt{Variance(X)};$

Корреляция и прямая линейной регрессии

$s_1 = 32.86$

$$rXY := \frac{\sum_{i=1}^{25} \frac{\left(X_i - mX\right)\cdot\left(Y_i - mY\right)}{sigmaX \cdot sigmaY}}{n};$$

0.9408

$$Ax := \frac{rXY \cdot sigmaY}{sigmaX}$$

0.8884

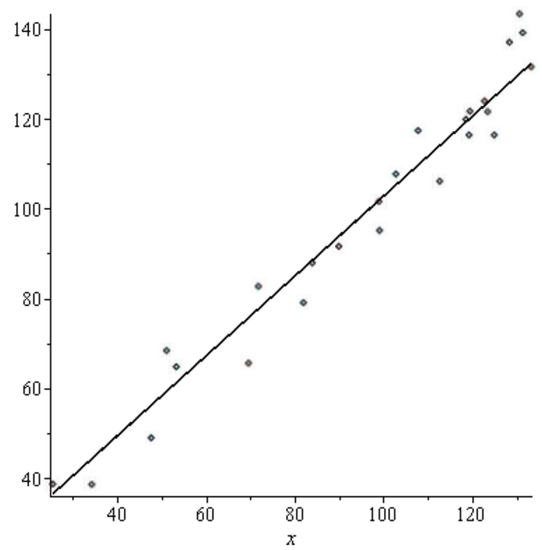
$cov := Covariance(X, Y);$

1000.

$$r_{XY} := \frac{cov}{sigmaX \cdot sigmaY}$$

0.9788

$S := plot(Ax \cdot (x - mX) + mY, x = a..b);$
$> plots[display](P, S);$



Доверительные интервалы для средних и среднеквадратичных отклонений X и Y (α= значимость)

$\alpha := 0.05;$

$$0.05$$

$$t := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{StudentT}(n-1),\, 1-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$2.064$$

$$M_{min} := \mathrm{evalf}\left(mX - \frac{sigmaX \cdot t}{\sqrt{n}}\right);$$

$$81.66$$

$$M_{max} := \mathrm{evalf}\left(mX + \frac{sigmaX \cdot t}{\sqrt{n}}\right);$$

$$108.8$$

$$m(X) \in \left(M_{min}, M_{max}\right)$$

$$\mathrm{in}(m(X), 81.66, 108.8)$$

$$\varkappa := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{ChiSquare}(n-1),\, 1-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$39.36$$

$$\Delta_{min} := \sqrt{\frac{(n-1)sigmaX^2}{\varkappa}};$$

$$25.69$$

$$\chi := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{ChiSquare}(n-1),\, \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$12.40$$

$$\Delta_{max} := \sqrt{\frac{(n-1)sigmaX^2}{\chi}};$$

$$45.76$$

$$\sigma(X) \in \left(\Delta_{min}, \Delta_{max}\right);$$

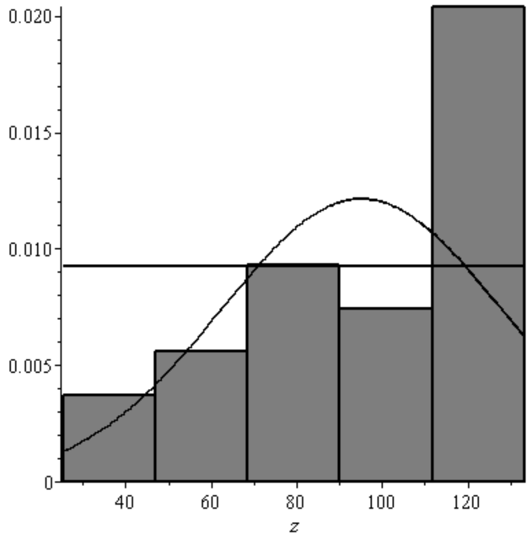
$$\mathrm{in}\left(\sigma(X), 25.69, 45.76\right)$$

Проверка гипотезе о нормальном и равномерном законе распределения X

$$\mathrm{in}\left(\sigma(X), 25.69, 45.76\right)$$

$$R := \mathrm{plot}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, sigmaX} e^{-\frac{(z-mX)^2}{2\cdot(sigmaX)^2}},\, z = a..b\right); L$$
$$:= \mathrm{plot}\left(\frac{1}{b-a},\, z = a..b,\, color = green\right)$$

> plots[display](L, R, H)#` `Визуализация гипотез




> convert(X, set); # x-координаты в порядке возрастания

{25.43, 34.23, 47.62, 51.09, 53.28, 69.57, 71.80, 81.95, 83.97, 89.93, 98.98, 99.13, 102.8, 107.8, 112.7, 118.6, 119.3, 119.5, 122.8, 123.5, 125.0, 128.4, 130.7, 131.4, 133.3}

> $h := \frac{(b - a)}{N}$

$$h := 21.58$$

for k from 0 to N − 1 do print(a + k·h, a + (k + 1)·h) end do
# Расчет границ интервалов на гистограмме X

25.43, 47.01

47.01, 68.59

68.59, 90.17

90.17, 111.8

111.8, 133.3

>

$$\text{for k from 0 to N} - 1 \text{ do } V_{k+1} := \text{evalf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{(a + h\cdot k - mX)}{sigmaX}}^{\frac{(a + h\cdot(k+1) - mX)}{sigmaX}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\right) \text{ end do;}$$

# Теоретические вероятности нормального распределения

$V_1 := 0.05443 \quad V_2 := 0.1375 \quad V_3 := 0.2297 \quad V_4 := 0.2538 \quad V_5 := 0.1841$

Эмпирические частоты статистики на интервалах гистограммы X

$$PP := \left[\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right]$$

# В числителе i-той дроби- число точек, попавших в i-тый интервал, знаменатель равен n

$$\left[\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right]$$

$$X_V := n\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(PP_i - V_i\right)^2}{V_i}; \text{Quantile}\left(\text{ChiSquare}(N-2-1), 1-\alpha\right);$$

5.122 5.991

$X_V > \text{Quantile} \Rightarrow$ гипотеза нормальности отвергается

$$X_U := n\cdot N\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\left(PP_i - \frac{1}{N}\right)^2\right); \text{evalf}(\%); \text{Quantile}\left(\text{ChiSquare}(N-2-1), 1-\alpha\right);$$

$X_U > \text{Quantile} \Rightarrow$ гипотеза равномерности отвергается

$\frac{16}{5}$ 3.200 5.991

Проверка гипотезе о показательном законе распределения Y

$$P := \text{plot}\left(\frac{1}{mY-c}e^{\frac{-z+c}{mY-c}}, z = c..d\right);$$

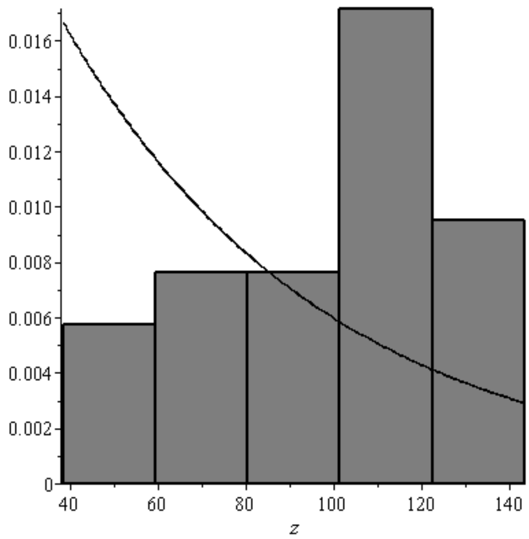
> plots[display](P, Y) #` `Визуализация гипотезы

> convert(Y, set); # y-координаты в порядке возрастания

{38.53, 38.63, 48.93, 64.76, 65.57, 68.37, 79.03, 82.68, 87.92, 91.60, 95.14, 101.6, 106.1, 107.7, 116.4, 117.4, 119.9, 121.6, 121.7, 124.0, 131.6, 137.1, 139.2, 143.4}

$$\eta := \frac{(d-c)}{N}$$

20.98




for k from 0 to $N-1$ do print$\left(c+k\cdot\eta,\ c+(k+1)\cdot\eta\right)$end do
# Расчет границ интервалов на гистограмме X

Эмпирические частоты статистики на интервалах гистограммы Y

38.53, 59.51

59.51, 80.49

80.49, 101.5

101.5, 122.4

122.4, 143.4

$QQ := \left[\frac{16}{25}, \frac{4}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{2}{25}\right]$

# В числителе i-той дроби- число точек, попавших в i-тый интервал, знаменатель равен n

$$\left[\frac{16}{25}, \frac{4}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{2}{25}\right]$$

for k from 0 to $N-1$ do $W_{k+1} := e^{-\frac{k\cdot\eta}{-c+mY}} - e^{-\frac{(k+1)\cdot\eta}{-c+mY}}$ end do

# Теоретические вероятности показательного распределения

0.2948 0.2079 0.1467 0.1033 0.0728

$X_W := n\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(QQ_i-W_i\right)^2}{W_i}$; Quantile$\left(\text{ChiSquare}(N-1-1), 1-\alpha\right)$;

12.13 7.815

$X_W >$ Quantile $\Rightarrow$ гипотеза отвергается

Statistics:-Quantile $< 12.13 \Rightarrow$ гипотеза отвергается

Проверка гипотезе о равенстве средних X и Y

$$Q := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{StudentT}(2\,n-2),\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

2.011

$$K := \frac{|mX - mY|}{\sqrt{\dfrac{(sigmaX)^2}{n} + \dfrac{(sigmaY)^2}{n}}}$$

0.3714

$K > Q \Rightarrow m(X) \neq m(Y)$; verify(K, Q, greater_than);

$$2.011 < 0.3714 \Rightarrow m(X) \neq m(Y)$$

false

Проверка гипотезе о равенстве среднеквадратичных отклонений X и Y
(дробь Q составляется таким образом, что в числителе стоит большее число!)

$$F := \frac{(sigmaX)^2}{(sigmaY)^2}$$

1.122

$$Q := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{FRatio}(n-1,\ n-1),\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

2.269

$F > Q \Rightarrow \sigma(X) \neq \sigma(Y)$; verify(F, Q, greater_than)

$$2.269 < 1.122 \Rightarrow \sigma(X) \neq \sigma(Y)$$

false

Проверка гипотезе о равенстве нулю коэффициента корреляции

$$G := \frac{\mathrm{Quantile}\left(\mathrm{StudentT}(n-2),\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n-2+\left(\mathrm{Quantile}\left(\mathrm{StudentT}(n-2),\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}};\ r_{XY}$$

0.3961

0.9788

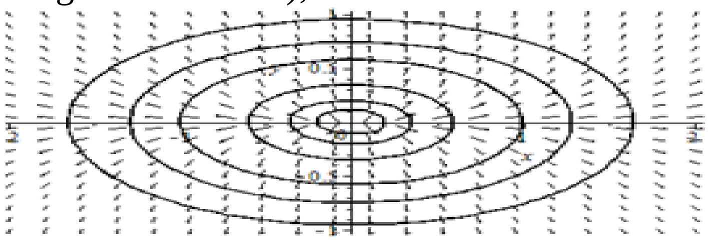
$|r_{XY}| > G \Rightarrow r_{xy} \neq 0$; verify$\left(|r_{XY}|, G, \text{greater_than}\right)$;

$$0.3961 < 0.9788 \Rightarrow r[xy] \neq 0$$

true

# Лабораторная работа №2
# Методы оптимизации: линейное и нелинейное программирование

restart; with(plots)
animate3d({h, ln(x^2+3*y^2+0.1e-1)}, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, h = -5 .. 1, color = [x, y, z]);
p1 := implicitplot([ln(x^2+3*y^2+0.1e-1) = -4, ln(x^2+3*y^2+0.1e-1) = .51, ln(x^2+3*y^2+0.1e-1) = -3, ln(x^2+3*y^2+0.1e-1) = -2, ln(x^2+3*y^2+0.1e-1) = -1, ln(x^2+3*y^2+0.1e-1) = 0, ln(x^2+3*y^2+0.1e-1) = 1], x = -2 .. 2, y = -1 .. 1);
Поле градиента
p2 := fieldplot([diff(ln(x^2+3*y^2+0.1e-1), x), diff(ln(x^2+3*y^2+0.1e-1), y)], x = -2 .. 2, y = -1 .. 1, fieldstrength = log);
display(p1, p2, scaling = constrained);



with(Optimization);
Функция и ограничения
NLPSolve(x-2*y+99*exp(-.1*(x-1.8)^2-.2*(y-2.1)^2), {(x-2)^2+(.1*y+.2)^2 <= 1}, initialpoint = [x = 2, y = 5]);

$[-13.9289311799253674, [x = 1.95524810896165, y = 7.98998132256855]]$

NLPSolve(x-2*y+99*exp(-.1*(x-1.8)^2-.2*(y-2.1)^2), {(x-2)^2+(.1*y+.2)^2 <= 1}, initialpoint = [x = 2, y = 2], maximize);

$[96.6757865987056278, [x = 1.85054377251886, y = 2.04945622750062]]$

NLPSolve(x-2*y+99*exp(-.1*(x-1.8)^2-.2*(y-2.1)^2), {(x-2)^2+(.1*y+.2)^2 = 1}, maximize);

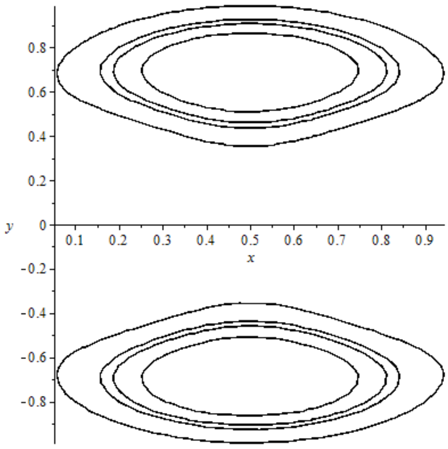
$[91.0175223868711782, [x = 1.08630009859662, y = 2.06389579314574]]$

a := plot3d(x-2*y+99*exp(-.1*(x-1.8)^2-.2*(y-2.1)^2), x = 0 .. 4, y = -15 .. 10);b := implicitplot3d({(x-2)^2+(.1*y+.2)^2 = 1}, x = 0 .. 4, y = -15 .. 10, z = -20 .. 90, style = surface);display(a, b);

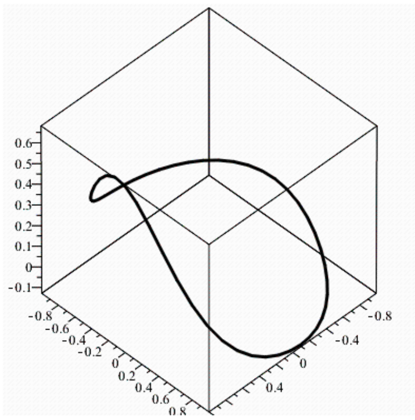
restart; with(Optimization); with(plots);
Решение оптимизационной задачи без ограничений
F := proc (x, y) options operator, arrow; (x^2+y^2)^2+1/(x^2+y^2+.1)+(x^2-2*x+1+y^2)^2+1/(x^2-2*x+1+y^2+.1) end proc;
plot3d(F(x, y), x = .4 .. .6, y = -.95 .. .95, axes = boxed);
minimize(F(x, y), location);

$$3.475425703, \{[\{x = 0.5000000000, y = -0.6917173514\}, 3.475425703], [\{x = 0.5000000000, y = 0.6917173514\}, 3.475425703]\}$$

a := implicitplot(F(x, y) = 4.5, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, numpoints = 10000);
b := implicitplot(F(x, y) = 3.81, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, numpoints = 10000);
c := implicitplot(F(x, y) = 4.1, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, numpoints = 10000);
d := implicitplot(F(x, y) = 4, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, numpoints = 10000);
Линии уровня
display(a, b, c, d);




restart; with(Optimization); with(plots);
p1 := plot3d((x^2+sin(x-y))*exp(-x^2-2*y^2), x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, axes = boxed);
plot3d((x^2+sin(x-y))*exp(-x^2-2*y^2), x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, axes = boxed);
a := cos(t); b := sin(t); c := (a^2+sin(a-b))*exp(-a^2-2*b^2);
spacecurve([a, b, c], t = 0 .. 2*Pi, color = green, thickness = 3, axes = boxed); p2 := spacecurve([a, b, c], t = 0 .. 2*Pi, color = green, thickness = 3);




display(p1, p2);
S := NLPSolve((x^2+sin(x-y))*exp(-x^2-2*y^2), {x^2+y^2 = 1}, initialpoint = [x = -1, y = .1]); [ −0.128307137415174326, [x = −0.392198311519012, y = 0.919880690329817]]

T := NLPSolve((x^2+sin(x-y))*exp(-x^2-2*y^2), {x^2+y^2 = 1}, initialpoint = [x = -1, y = .1], maximize); [0.113300017393712649, [x = −0.810934077611816, y = −0.585137523807798]]

p3 := pointplot3d([[rhs(S[2][1]), rhs(S[2][2]), S[1]]], color = red, symbolsize = 20, symbol = solidsphere);
p4 := pointplot3d([[rhs(T[2][1]), rhs(T[2][2]), T[1]]], color = blue, symbolsize = 20, symbol = solidsphere);
display(p1, p2, p3, p4);
R := NLPSolve((x^2+sin(x-y))*exp(-x^2-2*y^2), {x^2+y^2 <= 1}, initialpoint = [x = -1, y = .1]); $[-0.370824993365210909, [x = -0.262106409735669, y = 0.378717617292232]]$

p5 := pointplot3d([[rhs(R[2][1]), rhs(R[2][2]), R[1]]], color = magenta, symbolsize = 20, symbol = solidsphere);
display(p1, p2, p3, p4, p5);
e := 2*t+.1; f := (t^2+sin(t-e))*exp(-2*e^2-t^2);
p6 := spacecurve([t, e, f], t = -1 .. 1, color = green, thickness = 3);
display(p1, p6);
U := NLPSolve((x^2+sin(x-y))*exp(-x^2-2*y^2), {y = 2*x+.1, -3 <= x, -3 <= y, x <= 3, y <= 3}, initialpoint = [x = -1, y = .1]);

$$[-0.160269803297701047, [x = 0.136110154100295, y = 0.372220308200591]]$$

p7 := pointplot3d([[rhs(U[2][1]), rhs(U[2][2]), U[1]]], color = red, symbolsize = 20, symbol = solidsphere); display(p1, p6, p7);
Линейное программирование
restart;with(plots);
a := inequal({y <= 2+.1*x, x-y <= 1, 0 < x, 0 < y}, x = -4 .. 4, y = -4 .. 4, optionsfeasible = (color = magenta), optionsopen = (color = blue), optionsclosed = (color = black, thickness = 2), optionsexcluded = (color = grey));
b := animate(implicitplot, [y-2*x = C, x = -4 .. 4, y = -4 .. 4, color = red, thickness = 3], C = -5 .. 2);
display(a, b);
S := solve({y = 2+.1*x, x-y = 1}); $S := \{x = 3.333333333, y = 2.333333333\}$
assign(S);
C := evalf(y-2*x); $C := -4.333333333$
Симплекс-метод
restart;with(Student); with(LinearAlgebra);with(simplex);
initial := {x1+x2+x3+4*x4-x6 = 5, 2*x1+x2+4*x3+x4-x5 = 8};
Введем балансовые переменные и перепишем систему с целевой функцией
cnsts := {x1+x2+x3+4*x4-x6 = 5, 2*x1+x2+4*x3+x4-x5 = 8};
obj := 10*x1+12*x2+8*x3+10*x4; $10\,x1 + 12\,x2 + 8\,x3 + 10\,x4$
Применим симплекс-метод в пакете
minimize(obj, cnsts, NONNEGATIVE);

$$\left\{x1 = 0, x2 = 0, x3 = \frac{9}{5}, x4 = \frac{4}{5}, x5 = 0, x6 = 0\right\}$$

eval(obj, [x1 = 0, x2 = 0, x3 = 9/5, x4 = 4/5, x5 = 0, x6 = 0]); $\frac{112}{5}$

Теперь решение вручную (пошагово)
Допустимое решение (начальная опорная точка): x1=3, x2=2, прочие равны 0.
Запишем матрицу исходных коэффициентов
A := Matrix(3, 7, {(1, 1) = 8, (1, 2) = 2, (1, 3) = 1, (1, 4) = 4, (1, 5) = 1, (1, 6) = -1, (1, 7) = 0, (2, 1) = 5, (2, 2) = 1, (2, 3) = 1, (2, 4) = 1, (2, 5) = 4, (2, 6) = 0, (2, 7) = -1, (3, 1) = 0, (3, 2) = 10, (3, 3) = 12, (3, 4) = 8, (3, 5) = 10, (3, 6) = 0, (3, 7) = 0});
Pivot(%, 1, 2);
MultiplyRow(%, 1, 1/2);
Pivot(%, 2, 3);
MultiplyRow(%, 2, 2);
Pivot(%, 2, 5); MultiplyRow(%, 2, 1/7);
Pivot(%, 1, 4); MultiplyRow(%, 1, 7/15);
Симплекс-метод в теории игр
restart;with(Student);
Вручную
with(LinearAlgebra);
N := Matrix(3, 4, {(1, 1) = 25, (1, 2) = 40, (1, 3) = 113, (1, 4) = 129, (2, 1) = 65, (2, 2) = 115, (2, 3) = 56, (2, 4) = 76, (3, 1) = 142, (3, 2) = 74, (3, 3) = 96, (3, 4) = 65});
Пишем ограничения для первого игрока, пользуясь столбцами платежной матрицы, L--->max
sys := {25*x1+65*x2+142*x3 >= L, 40*x1+115*x2+74*x3 >= L, 113*x1+56*x2+96*x3 >= L, 129*x1+76*x2+65*x3 >= L};
Вводим переменные невязки
syst := {25*x1+65*x2+142*x3-z1 = L, 40*x1+115*x2+74*x3-z2 = L, 113*x1+56*x2+96*x3-z3 = L, 129*x1+76*x2+65*x3-z4 = L};
Используем, что сумма вероятностей распределения в стратегии равна 1
subs(x3 = 1-x1-x2, syst); display(%);
Переписываем систему в стандартной форме (свободные члены - слева)
syste := {65 = -64*x1-11*x2+z4+L, 74 = 34*x1-41*x2+z2+L, 96 = -17*x1+40*x2+z3+L, 142 = 117*x1+77*x2+z1+L}; display(syste);
Записываем коэффициенты в матрицу
M := Matrix(4, 8, {(1, 1) = 142, (1, 2) = 117, (1, 3) = 77, (1, 4) = 1, (1, 5) = 0, (1, 6) = 0, (1, 7) = 0, (1, 8) = 1, (2, 1) = 74, (2, 2) = 34, (2, 3) = -41, (2, 4) = 0, (2, 5) = 1, (2, 6) = 0, (2, 7) = 0, (2, 8) = 1, (3, 1) = 96, (3, 2) = -17, (3, 3) = 40, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (3, 6) = 1, (3, 7) = 0, (3, 8) = 1, (4, 1) = 65, (4, 2) = -64, (4, 3) = -11, (4, 4) = 1, (4, 5) = 0, (4, 6) = 0, (4, 7) = 1, (4, 8) = 1});
Оставляем L только в последней строке
Pivot(M, 4, 8);
Удаляем последний столбец, получаем стандартную симплекс-матрицу
%[1 .. 4, [1 .. 7]];
Pivot(%, 1, 2);
MultiplyRow(%, 1, 1/181);
Pivot(%, 2, 3);
MultiplyRow(%, 2, -181/14054);
Pivot(%, 3, 4);

MultiplyRow(%, 3, -14054/19149);
x1, x2 ,z1 - базисные переменные, z2,z3,z4 свободные,
L=Typesetting[delayDotProduct](40899/491.За, счет, true) свободных переменных увеличение L невозможно. Стратегия(x1, x2, x3); средний выигрыш L;
x1 := evalf(4301/19149); x2 := evalf(7909/19149); x3 := 1-x1-x2; L := evalf(40899/491);

$$x1 := 0.2246070291 \quad x2 := 0.4130241788 \quad x3 := 0.3623687921 \quad L := 83.29735234$$

Симплекс-метод
Для второго игрока пишем неравенства по строкам
sys1 := {25*y1+40*y2+113*y3+129*y4 <= K, 65*y1+115*y2+56*y3+76*y4 <= K, 142*y1+74*y2+96*y3+65*y4 <= K};
Вводим невязки
syst1 := {25*y1+40*y2+113*y3+129*y4+v1 = K,
65*y1+115*y2+56*y3+76*y4+v2 = K, 142*y1+74*y2+96*y3+65*y4+v3 = K};
Подставляем К, пользуясь 3-имуравнением в первые 2 уравнения (они составляют syst2;) ; подставляем в syst3; формулу полной вероятности y4 := 1-y1-y2-y3;
syst2 := {25*y1+40*y2+113*y3+129*y4+v1 = K,
65*y1+115*y2+56*y3+76*y4+v2 = K}; syst3 := subs(K = 142*y1+74*y2+96*y3+65*y4+v3, syst2); syst4 := subs(y4 = 1-y1-y2-y3, syst3);
Пишем обращение к симплекс-методу
cnstr := syst4; Obj := subs(y4 = 1-y1-y2-y3, 142*y1+74*y2+96*y3+65*y4+v3);
with(simplex);
minimize(Obj, cnstr, NONNEGATIVE); evalf(%); y1;

$$\left\{v1 = 0,\ v2 = 0,\ v3 = 0,\ y1 = 0,\ y2 = \frac{2747}{6408},\ y3 = \frac{1499}{3204}\right\}$$

$$\{v1 = 0.,\ v2 = 0.,\ v3 = 0.,\ y1 = 0.,\ y2 = 0.4286828964,\ y3 = 0.4678526841\}$$

$$y1$$

ОТВЕТ
Оптимальная стратегия второго игрока
y1 := 0; y2 := .4286828964; y3 := .4678526841; y4 := 1-y1-y2-y3;

$$y1 := 0 \qquad y2 := 0.4286828964 \quad y3 := 0.4678526841 \quad y4 := 0.1034644195$$

Средний проигрыш второго игрока
K := 9*(2747/6408)+31*(1499/3204)+65;

$$K := \frac{534181}{6408}$$

evalf(%); $83.36157928$

# Лабораторная работа №3
# Анализ и прогнозирование временных рядов

restart; with(Statistics);
Число значащих цифр в результатах
Digits := 4;
Число групп и их объемы
l := 3; n[1] := 10; n[2] := 7; n[3] := 5; N := n[1]+n[2]+n[3]; N := 22
Подготовка к вычислению средних и дисперсий
S[3] := sum(C[i], i = 1 .. n[3]); S[2] := sum(B[i], i = 1 .. n[2]); S[1] := sum(A[i], i = 1 .. n[1]);
Q[1] := sum(n[k]*(m[x][k]-M[x])^2, k = 1 .. 3); Q[2] := sum((A[i]-m[x][1])^2, i = 1 .. n[1])+sum((B[i]-m[x][2])^2, i = 1 .. n[2])+sum((C[i]-m[x][3])^2, i = 1 .. n[3]);
sigma := sum((A[i]-M[x])^2, i = 1 .. n[1])+sum((B[i]-M[x])^2, i = 1 .. n[2])+sum((C[i]-M[x])^2, i = 1 .. n[3]);
Генерация выборок нормальных распределений
X := RandomVariable(Normal(3, 2)); A := Sample(X, n[1]); X := _R

A := [0.855151744003462, 2.34184425890587, 1.76581612618042, 3.42893349049058, 2.94914374391523, 6.45764256835566, −0.269713508687809, 6.14234434350860, 3.34071684282082, 5.01295681750362]

Y := RandomVariable(Normal(4.8, 2)); B := Sample(Y, n[2]); Y := _R0

B := [5.79004876376379, 4.75991380520483, 4.13527798315511, 4.77710255441167, 4.36693150588280, 6.25690482652265, 2.63819778677393]

Z := RandomVariable(Normal(2.4, 2)); C := Sample(Z, n[3]); Z := _R1

C := [2.27917373115491, 2.36312213221584, 1.65791935349530, −0.114779837348045, 5.17781483484001]

Групповые и межгрупповые средние и дисперсии
M[x] := (S[1]+S[2]+S[3])/N; $M_x := 3.45965744850315$

m[x][1] := S[1]/n[1]; m[x][2] := S[2]/n[2]; m[x][3] := S[3]/n[3];

$m_{x_1} := 3.20248364269965$ $m_{x_2} := 4.67491103224497$ $m_{x_3} := 2.27265004287160$

Q[1]; Q[2]; sigma; 18.04 65.84 83.87
sigma = Q[1]+Q[2]; 83.87 = 83.88
Выборочное значение критерия Фишера
F := Q[1]*(N-l)/((l-1)*Q[2]);
Надежность и квантиль распределения Фишера
p := .95; Quantile(FRatio(l-1, N-l), p);
Если F>Quantile, групповые средние различны с надежностью p
Анализ и прогноз временного ряда
restart; with(Statistics); with(plots);

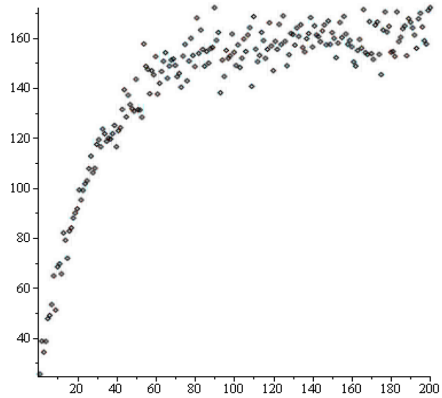
Вводим X и Y, содержащих значения независимой x и зависимой y переменных. Имя файла выбирается по последней цифре зачетной книжки.

N := 200; X := [seq(1 .. N)]; convert(X, Vector[row]);                N := 200

Y := readdata("0", 1);

Y := [25.42856576, 38.63363654, 34.22720736, 38.53422314, 47.62351242, 48.93450991, 53.28482218, 64.75859231, 51.09017726, 68.37442223, 69.57000579, 65.56761729, 81.95477991, 79.03283891, 71.80068272, 82.68271468, 83.97381672, 87.91570122, 89.93209014, 91.60310834, 99.12740638, 95.13821652, 98.97898613, 101.5898265, 102.811253, 107.6980335, 112.654263, 106.0608131, 107.8114101, 117.3650579, 119.2521526, 116.4061356, 123.4924915, 121.6248723, 118.5963393, 119.8512507, 119.5445173, 121.6654246, 124.9883706, 116.404637, 122.798424, 124.0429363, 131.3853189, 139.2293169, 128.3541265, 137.0502765, 133.2842355, 131.6137889, 130.6813469, 143.4213684, 131.2260291, 131.1425652, 128.2183926, 157.5801422, 148.6156434, 147.4097702, 137.6308052, 146.8436727, 145.1756934, 152.5258386, 137.4923754, 141.8216936, 146.5711797, 150.6237636, 154.0733118, 143.8279006, 148.7213145, 151.0734, 151.5693694, 148.9910619, 144.4721765, 145.7872896, 140.276063, 152.6900302, 157.3657664, 142.819702, 150.6950271, 159.8249799, 152.9569243, 148.516783, 167.9439853, 153.8113218, 163.1494078, 155.3912524, 148.674717, 154.6044845, 149.9014154, 155.7102766, 156.1680764, 172.0839903, 159.0158631, 162.1735015, 138.0081869, 151.0904288, 144.5482378, 154.9974827, 151.7860602, 152.7980561, 161.5302036, 154.2561974, 148.9393108, 157.1985547, 148.1249044, 151.8503903, 159.5139889, 154.5634985, 161.1423293, 164.0906836, 140.5870973, 168.5085782, 155.5003883, 150.4729804, 152.9770754, 162.2218615, 158.9199859, 151.7969277, 155.4345877, 166.0432254, 156.7758378, 146.8705731, 158.5980367, 155.4076904, 165.3892861, 157.3417378, 168.7750179, 158.5944571, 148.8393897, 153.2239735, 161.8089195, 161.3633316, 157.0831884, 163.994491, 160.5989419, 165.2539056, 156.1151457, 154.3850802, 159.648648, 161.751875, 168.1035827, 156.3640034, 164.8163082, 161.1689071, 160.5101427, 158.4839808, 162.7979032, 165.1732631, 157.2343402, 166.7226912, 157.3745801, 162.1038993, 159.8168956, 152.0744054, 157.8861302, 166.1578489, 160.147754, 168.5854038, 161.5524327, 157.4115376, 158.9769148, 156.4410047, 150.3864222, 148.7380762, 154.9483261, 159.3765253, 155.9362147, 171.290533, 154.1053873, 153.3360427, 166.521627, 153.6800308, 151.3922345, 165.1192616, 166.3485951, 153.3952156, 145.2844599, 163.1547946, 170.3923592, 162.3480396, 164.6247301, 154.2477642, 154.559919, 152.5788783, 170.3971929, 158.5269593, 160.259158, 163.6626861, 164.7942261, 152.8498141, 167.704645, 166.2530504, 164.0182499, 161.1135161, 155.8247555, 167.5949098, 169.8766518, 164.3737886, 158.8673525, 157.511881, 170.9575558, 172.1017484]

ScatterPlot(X, Y);



Здесь позвать преподавателя и посоветоваться о виде возможной регрессии.

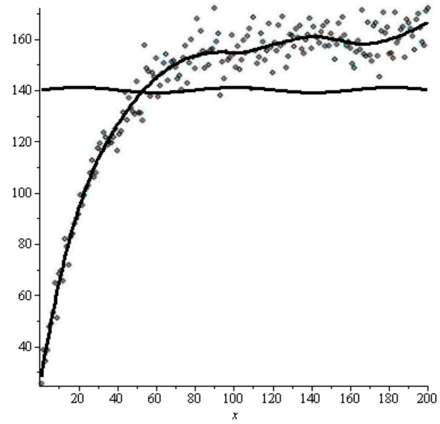
Нелинейная регрессия. Остаточная дисперсия
NonlinearFit(a*x+c*exp(b*x), X, Y, x, initialvalues = [a = 2, b = -.1, c = -2]); a := 'a'; b := 'b'; c := 'c'; NonlinearFit(ax+c*exp(b*x), X, Y, x, output = [residualsumofsquares]);

$1.16123242220411\,x + 1186.06479881083\,e^{-1.00008571315053\,10^5\,x}$ $\quad [1.895998778\,10^5]$

Сглаживающая кривая
P := ScatterPlot(X, Y, lowess, degree = 3, thickness = 3);
NonlinearFit(a+sin(b*x), X, Y, x, initialvalues = [a = 0, b = 2*Pi*(1/200)], output = [residualsumofsquares]); $\quad [1.944317799\,10^5]$
NonlinearFit(a+sin(b*x), X, Y, x, initialvalues = [a = 0, b = 2*Pi*(1/200)]);

$$140.111800790775 + \sin(0.0778562307699539\,x)$$

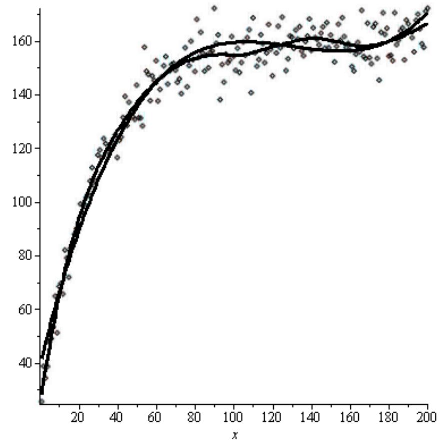
Q := plot(%, x = 1 .. N, thickness = 3, color = red);plots[display](P, Q);



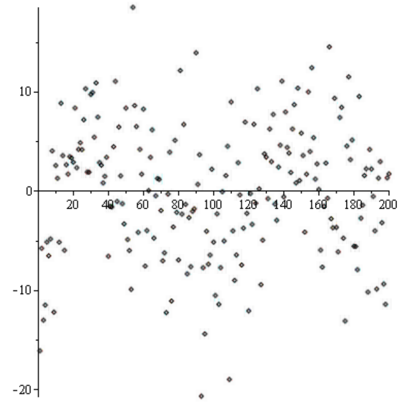
PolynomialFit(3, X, Y, x, output = [residualsumofsquares]); $\quad [9003.44977661310]$
PolynomialFit(3, X, Y, x);

$$38.6216032895871 + 2.94888304449808\,x - 0.0233668075761352\,x^2 + 0.0000595847204221021\,x^3$$

S := plot(%, x = 1 .. N, thickness = 3, color = blue);plots[display](P, S);




y := Vector(200);
Расчет отклонений от тренда
for i from 1 by 1 to 200 do y[i]:=Y[i]-(38.6216032895871210+2.94888304449808202*X[i]-0.233668075761351534e-1*X[i]^2+0.595847204221020644e-4*X[i]^3); od:
convert(y, Vector[row]); ScatterPlot(X, y);




Расчет автокорреляций на один и два шага назад
m := Mean(y); s := StandardDeviation(y);

$m := 9.72749998606748\ 10^{-8}$ $s := 6.72632634717367$

i := 'i'; rho[1] := 0; for i to 199 do rho[1] := rho[1]+(y[i]-m)*(y[i+1]-m) end do;
rho[1] := rho[1]/(199*s^2); $i := i$ $\rho_1 := 0.193186026191468$

rho[2] := 0; for i to 198 do rho[2] := rho[2]+(y[i]-m)*(y[i+2]-m) end do; rho[2] := rho[2]/(198*s^2); $\rho_2 := 0.133582465263147$

Расчет модели автокорреляции АР(2)
fsolve({alpha[2]*rho[1]+alpha[1]+rho[1] = 0, alpha[1]*rho[1]+alpha[2]+rho[2] = 0}); $\{\alpha_1 = -0.173868686097713, \alpha_2 = -0.0999934647167985\}$
assign(alpha[1] = -.1738686864, alpha[2] = -0.9999346521e-1);

Сглаженный прогноз, начиная с двух значений

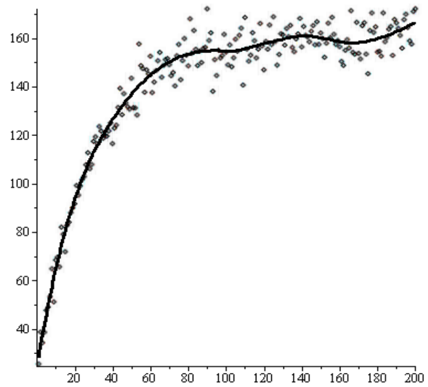
V := Vector(200);
V[1] := Y[1]; V[2] := Y[2]; for i from 3 to 200 do V[i] := evalf(38.6216032895871210+2.94888304449808202*X[i]-0.233668075761351534e-1*X[i]^2+0.595847204221020644e-4*X[i]^3-alpha[1]*y[i-1]-alpha[2]*y[i-2]) end do; $V_1 := 25.42856576$ $V_2 := 38.63363654$

Прогноз вперед на шаг
i := 201; Prognoz[201] := evalf(38.6216032895871210+2.94888304449808202*i-0.233668075761351534e-1*i^2+0.595847204221020644e-4*i^3-alpha[1]*y[i-1]-alpha[2]*y[i-2]);   i := 201   $Prognoz_{201} := 171.5930647$

Модель авторегрессии на фоне облака данных
convert(V, Vector[row]);
Q := ScatterPlot(X, V, color = green);plots[display](P, Q, S);

Критерии случайности
Критерий поворотных точек
eta := 0; for i from 2 to N-1 do if `or`(y[i] > max(y[i-1], y[i+1]), y[i] < min(y[i-1], y[i+1])) then eta := eta+1 else eta := eta+0 end if end do;%;
eta; `Mη` := 2/3*(N-2); `Dη` := (16*N-29)*(1/90); evalf((eta-`Mη`)/sqrt(`Dη`));

Критерий Кэндела
P:=0   for i from 1 by 1 to  N-1 do   if ( y[i]> y[i+1]) then P:=P+1 else end if od: ;
P;




nu := 4*P/N(N-1)-1; `Mν` = 0;   $M\nu = 0$

`Dν` := (2*(2*N+5))/(9*N(N-1));   $\frac{9}{20}$

evalf(nu/sqrt(`Dν`));
То же для исходного ряда
eta := 0; for i from 2 to N-1 do if `or`(Y[i] > max(Y[i-1], Y[i+1]), Y[i] < min(Y[i-1], Y[i+1])) then eta := eta+1 else eta := eta+0 end if end do;%;
eta; `Mη` := 2/3*(N-2); `Dη` := (16*N-29)*(1/90); evalf((eta-`Mη`)/sqrt(`Dη`));
P := 0; for i to N-1 do if Y[i] > Y[i+1] then P := P+1 else  end if end do;   0
P;   92

nu := 4*P/N(N-1)-1; `Mν` = 0;   $\frac{21}{25}$   $M\nu = 0$

`Dν` := (2*(2*N+5))/(9*N(N-1));   $\frac{9}{20}$

evalf(nu/sqrt(`Dν`));