МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

В. С. Козлова, В. М. Любимов

Обыкновенные

дифференциальные уравнения

Пособие

для студентов I, II курса
всех специальностей
дневного отделения

Москва – 2005

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра высшей математики

В. С. Козлова, В. М. Любимов

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пособие

для студентов I, II курса
всех специальностей
дневного отделения

Москва – 2005

Содержание

Введение

Настоящее пособие составлено для студентов дневного отделения всех специальностей. В нем кратко излагается теория дифференциальных уравнений, методы их решения, а также варианты контрольного домашнего задания. В пособие включены основные типы дифференциальных уравнений, допускающих точные решения. В целях более глубокого изучения материала по дифференциальным уравнениям можно использовать учебники.

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2. М.: Наука, 1976.

2. Шипачев В. С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1990.

Авторы выражают глубокую благодарность доценту кафедры Дементьеву Ю. И. за помощь в написании работы.

1. Основные понятия

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется равенство, связывающее неизвестную функцию, её производные и аргумент, от которого они зависят. При изучении многих физических, других явлений, исследования поведения различных технических объектов возникает необходимость составления и решения (интегрирования) таких уравнений. В общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

В нём слева стоит функция, зависящая от аргумента x, искомой функции $y(x)$ и её производных $y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)$. Порядок старшей производной определяет порядок уравнения. Уравнение (1) является уравнением n-го порядка.

Рассмотрим некоторые примеры:

1. Уравнение первого порядка

$$y' = \frac{y}{x}. \tag{$*$}$$

2. Уравнение второго порядка

$$y'' + 4y = 0. \tag{$**$}$$

Решением дифференциального уравнения является функция, которая при подстановке её в уравнение обращает его в тождество. Решением уравнения (*) будет функция $y = cx$, где c — произвольная постоянная. Подставив его в уравнение, получим тождество $c = c$. Решением уравнения (**) будет

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x.$$

Из этих примеров видно, что приведенные дифференциальные уравнения имеют бесчисленное множество решений, зависящее от значений входящих в них констант. Придавая константе c в решении уравнения (*) $y = cx$ конкретные решения, будем получать различные частные решения этого уравнения: при $c = 1 \quad y = x$, при $c = 3 \quad y = 3$. Решения уравнения (*) содержит одну константу c, решения уравнения (**) две константы c_1 и c_2. Это неслучайно и связано с тем, что уравнение (*) является уравнением первого порядка, а уравнение (**) — второго порядка. Можно показать, что общее решение уравнения n-го порядка имеет вид:

$$y = y(x, c_1, c_2 ... c_n) \tag{2}$$

т.е. зависит от n констант. Общее решение уравнения (1) часто получается в неявной форме

$$\Phi(x, y(x), c_1, c_2, ... c_n) = 0 \tag{3}$$

В этом случае оно называется общим интегралом уравнения (1).

При решении практических задач к составленным для их решения дифференциальным уравнениям добавляются дополнительные условия, учитывающие начальное состояние изучаемого объекта. Эти условия принято называть начальными условиями. Их учет позволяет найти значения констант в общих решениях (2) или (3) и, тем самым, соответствующее этим начальным условиям (начальному состоянию изучаемого объекта) частное решение. Число начальных условий соответствует порядку уравнения.

Для уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ можно поставить лишь одно начальное условие: в начальный момент $x = x_0 \quad y(x_0) = y_0$, где y_0 — заданное число. Для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ можно поставить два начальных условия: при $x = x_0 \quad y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, где y_0, y_0' — заданные числа. В общем случае для уравнения n-го порядка (1) n начальных условий запишутся в виде

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},$$

где $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа. Задача для уравнения (1) с начальными условиями (4) называется задачей Коши.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Можно показать, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x.$$

Подставляя в общее решение первое начальное условие, получим

$$y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Найдем производную

$$y'(x) = -2c_1 \cos 2x + 2c_2 \sin 2x.$$

Подставив сюда второе начальное условие, будем иметь

$$y'(0) = -2c_1 \cos 0 + 2c_2 \sin 0 = 2 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Решение задачи Коши исходного уравнения запишется в виде

$$y(x) = -\sin 2x.$$

Методы получения точных решений дифференциальных уравнений известны лишь для отдельных видов этих уравнений. Сначала рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка, допускающие точные решения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

или, после разрешения относительно производной,

$$y' = f(x, y). \tag{4}$$

Добавляя к уравнению (4) начальное условие, получим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y = y(x_0) \quad \text{при } x = x_0. \tag{5}$$

Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$ уравнение (4) можно записать в дифференциальной форме

$$dy = f(x, y)dx. \tag{6}$$

На вопрос о существовании и единственности решения задачи (5) отвечает следующая теорема.

Теорема. Если в уравнении (4) функция $f(x, y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D плоскости (xOy), то в любой точке этой области (x_0, y_0) существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (4), удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

Геометрически это означает, что существует и при том единственное решение $y(x)$ задачи (5), график которого проходит через точку (x_0, y_0). График $y(x)$ принято называть интегральной кривой. Как уже говорилось, общее решение уравнения (4) зависит от одной произвольной константы $y = y(x, c)$. Из теоремы вытекает, что подставляя начальное условие (x_0, y_0) в общее решение, получим уравнение $y(x_0, c) = y_0$, решая которое, найдем значение c_0, определяющее частное решения $y(x, c_0)$ задачи (5).

Само уравнение (4) также допускает геометрическую трактовку: оно задаёт на плоскости xOy поле направлений касательных к интегральным кривым, входящим в общее его решение. Если приравнивать правую часть уравнения (4) константе c, то получится уравнение кривой $f(x, y) = c$, называемой изоклиной. В каждой точке изоклины, как видно из уравнения (4), все интегральные кривые имеют одинаковый угол наклона с осью Ox. Иногда изоклины можно использовать для приближенного построения интегральных кривых.

3. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение

$$\varphi_1(x)\varphi_1(y)dx + \varphi_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Делением обеих частей этого уравнения на $\varphi_1(y)\varphi_2(x) \quad (\psi_1(y) \neq 0,\ \varphi_2(x) \neq 0)$ оно приводится к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}dy = 0.$$

Пример 1. Иногда дифференциальное уравнение уже задается с разделенными переменными

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0.$$

Общий интеграл его имеет вид

$$\int \varphi(x)dx + \int \psi(y)dy = c.$$

Пример 2. Решить уравнение $2x^2dx + ydy = 0$.

$$2\int x^2dx + \int y\,dy = c,$$

$$\frac{2}{3}x^3 + \frac{y^2}{2} = c \text{ — общий интеграл.}$$

Пример 3. Решить уравнение $x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0$.

Разделяя переменные, приведем его к виду

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \int\left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy = C, \quad \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - y + \ln|y+1| = C.$$

Заменяя C на $\ln|C|$, общий интеграл можно представить в виде

$$\frac{Ce^y}{y+1} = \sqrt{x^2+1}.$$

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной.

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{7}$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{8}$$

Дифференцируя обе части (8), получим

$$y'(x) = uv' + u'v. \tag{9}$$

Подставляем (9) в (7), будем иметь $uv' + u'v + p(x)uv = q(x)$ или

$$\left(\frac{dv}{dx} + pv\right) + v\frac{du}{dx} = q. \tag{10}$$

Пользуясь произвольностью функции $v(x)$, выберем ее такой, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + pv = 0. \tag{11}$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\ln|v| - \ln|c| = -\int p(x)dx \quad \text{или} \quad v = ce^{-\int p(x)dx}.$$

Нам достаточно иметь частное решение уравнения (11), поэтому положим

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляя найденное $v(x)$ в уравнение (10), получим

$$v(x)\frac{du}{dx} = q(x)$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v(x)}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + c.$$

Подставляя $u(x)$ и $v(x)$ в (8), получим общее решение исходного уравнения (7)

$$y(x) = \left(\int \frac{q(x)}{v(x)}dx + c\right)v(x). \tag{12}$$

Пример 1. Решить уравнение $y' - y = \sin x$.

Положив $y = uv$, после подстановки в уравнение, получим

$$u'v + v'u - uv = \sin x \quad \text{или} \quad u(v' - v) + u'v = \sin x.$$

Полагая $v' - v = 0$ и решая это уравнение, получим $\ln|v| = x + c$. Принимая $c = 0$, найдем $v = e^x$. Подставляя $v(x)$ в уравнение $u'v = \sin x$ и интегрируя его, получаем

$$u(x) = \int e^{-x} \sin x dx + c.$$

Тогда общее решение запишется в виде

$$y(x) = \left(\int e^{-x} \sin x dx + c \right) e^x.$$

После вычисления интеграла по частям решение примет вид

$$y(x) = ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Пример 2. Решить задачу Коши $y' + 3\frac{y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

Повторяя изложенный выше способ получения общего решения, будем иметь

$$y = uv, \quad u'v + v'u + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x^3},$$

$$v' + \frac{3}{x}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{3}{x}\,dx, \quad \ln v = -3\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x^3},$$

$$u'v = \frac{2}{x^3}, \quad u' = \frac{2x^3}{x^3}, \quad u' = 2, \quad u = 2x + c, \quad y(x) = (2x + c)\frac{1}{x^3}.$$

Подставляя в это общее решение начальное условие, получим

$$\frac{2 + c}{1} = 1 \Rightarrow c = -1$$

и решение задачи Коши запишется в виде

$$y = (2x - 1)\frac{1}{x^3}.$$

5. Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^n$$

называется уравнением Бернулли.

При $n = 0$ оно становится линейным уравнением, при $n = 1$ — уравнением с разделяющимися переменными. При других значениях n оно приводится к линейному уравнению с помощью следующего приема: обе части уравнения делим на y^n и делаем замену $z = y^{-n+1}$. В результате получаем линейное уравнение

$$z' + (-n+1)p(x)z = (-n+1)q(x).$$

Решив это линейное уравнения и возвращаясь от $z(x)$ к $y(x)$, получим решение исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $2(xy' + y) = xy^2$.

Разделив обе части уравнения на $2x$, приведем его к уравнению Бернулли

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{2}.$$

Деля обе его части на y^2, будем иметь

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}.$$

Сделаем в этом уравнении замену

$$z = y^{-2+1} = \frac{1}{y}, \quad \text{тогда} \quad z' = -\frac{y'}{y^2}$$

и относительно функции $z(x)$ получим уравнение

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}.$$

Решая это линейное уравнения описанным выше способом, получим

$$z = uv, \qquad u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -\frac{1}{2}, \qquad v' - \frac{1}{x}v = 0,$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \qquad \ln|v| = \ln|x|, \qquad v = x,$$
$$u'x = -\frac{1}{2}, \qquad u' = -\frac{1}{2x}, \qquad u = -\frac{1}{2}\ln|x| + c,$$
$$z(x) = \left(-\frac{1}{2}\ln|x| + c\right)x.$$

Учитывая сделанную замену $y(x) = \frac{1}{z(x)}$, общее решение исходного уравнения запишется в виде

$$y(x) = \frac{1}{(-\frac{1}{2}\ln|x| + c)}.$$

6. Однородные уравнения первого порядка

Сначала введем понятие однородной функции.

Определение 1. Функция $f(x,y)$ называется функцией измерения α, если $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x,y)$, где α — любое произвольное число.

Пример 1. $f(x,y) = 2x^4 - 3xy^3 + y^4$ — однородная функция четвертого измерения, т.к. $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4 f(x,y)$.

$f(x,y) = \frac{3xy^2 - 8x^2y + 4y^3}{y^2x}$ — однородная функция нулевого измерения, т.к. $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$.

Определение 2. Уравнение $y' = f(x,y)$ называется однородным уравнением первого порядка, если функция $f(x,y)$ — однородная функция нулевого измерения. В этом случае $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$ и положив $\alpha = \frac{1}{x}$ получим

$$f(x,y) = f(1, \frac{y}{x}).$$

Уравнение можно теперь записать в виде

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{13}$$

С помощью замены

$$u = \frac{y}{x}$$

это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u.$$

Подставляя в уравнение (13), получим

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Разделяя здесь переменные, будем иметь

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

и общий интеграл этого уравнения запишется

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

Возвращаясь после интегрирования к переменной $y = ux$, получим общий интеграл исходного однородного уравнения (13).

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

После деления числителя и знаменателя правой части на x^2, замены $y = ux$ и выполнения выкладок, получим

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u-u^2}{1-2u}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\frac{u^2}{1-2u}.$$

Разделяем переменные

$$\frac{1-2u}{u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования в обеих частях, получим

$$\frac{1}{u} + 2\ln|u| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \ln|c|$$

или

$$\ln(e^{\frac{1}{u}}u^2) = \ln\left|\frac{c}{x}\right|, \quad \text{откуда } u^2e^{\frac{1}{u}} = \frac{c}{x}.$$

Возвращаясь к переменой y, находим общий интеграл исходного уравнения

$$y^2e^{\frac{x}{y}} = cx.$$

7. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

Дифференциальные уравнения

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{14}$$

с помощью замены

$$x = u+\alpha, \quad y = y+\beta \tag{15}$$

после соответствующего подбора значений постоянных α, β приводятся к однородному уравнению относительно u, v. Заменяя $dx = du$, $dy = dv$ и подставляя (15) в уравнение (14), будем иметь

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2u+b_2v+a_1\alpha+b_2\beta+c_2}\right). \tag{16}$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1 = 0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Тогда уравнение (14) становится однородным.

Рассмотрим 2 случая.

1. Определитель системы (17) $\Delta = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| \neq 0$, тогда

$$\alpha = \frac{\left|\begin{smallmatrix} -c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right|}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\left|\begin{smallmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{smallmatrix}\right|}{\Delta}$$

и уравнение (16) становится однородным

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u_1 + b_1 v_1}{a_2 + b_2 v}\right). \tag{18}$$

Полагаем $w = \frac{v}{u}$ и подставляем в уравнение (18), получим уравнение с разделяющимися переменными относительно w

$$u\frac{dw}{du} = -w + f\left(\frac{a_1 + b_1 w}{a_2 + b_2 w}\right).$$

Заменяя $w(u)$ в решении этого уравнения на

$$w(u) = \frac{v}{u},$$

а затем u и v на $u = x + \beta$, $v = y + \alpha$ запишем решение исходного уравнения (14).

2. Определитель системы (17) $\Delta = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = 0$, тогда

$$\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} = k.$$

где k — число. Решение (14) в этом случае строится следующим образом. Вводится новая функция

$$t = a_1 x + b_1 y, \tag{19}$$

тогда

$$\frac{dt}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dt}{dx} - a_1}{b_1}.$$

После подстановки в уравнение (14) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dt}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{t + c_1}{kt + c_2}\right).$$

Интегрируя его, будем иметь

$$\int \frac{dt}{a_1 + b_1 f\left(\frac{t+c_1}{kt+c_2}\right)} = x + c.$$

Выражая после интегрирования t через x и y по формуле (19), запишем решение исходного уравнения.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y + 5}{2x - y + 4}.$$

Делаем замену $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$. После подстановки в уравнение получим

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - 3v + \alpha - 3\beta + 5}{2u - v + 2\alpha - \beta + 4}.$$

Выписываем систему

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 5 = 0, \\ 2\alpha - \beta + 4 = 0, \end{cases}$$

определитель которой $\Delta = \left|{1 - 3 \atop 2 - 1}\right| = 5 \neq 0$. Решая систему, получим $\alpha = -\frac{7}{5}$, $\beta = \frac{6}{5}$, тогда $x = u - \frac{7}{5}$, $y = v + \frac{6}{5}$ или

$$u = x + \frac{7}{5}, \quad v = y - \frac{6}{5}. \tag{$*$}$$

Уравнение в переменных u, v принимает вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - 3v}{2u - v}.$$

Делая в нем замену $s = \frac{v}{u}$, получим уравнение относительно s с разделенными переменными

$$\frac{(2 - s)ds}{s^2 - 5s + 1} = \frac{du}{u}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$2\int \frac{ds}{(s - \frac{5}{2})^2 + 1 - \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{2s - 5}{s^2 - 5s + 1}ds + \frac{5}{2}\int \frac{ds}{(s - \frac{5}{2})^2 - \frac{21}{4}} = \ln|u| + \ln|c|,$$

$$\frac{9}{2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{21}{4}}}\ln\left|\frac{5 - \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}}{5 - \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}}\right| - \frac{1}{2}\ln|s^2 - 5s + 1| = \ln|u| + \ln|c|.$$

После возвращения сначала к переменным u, v, а затем и к x, y по формулам (*), получим выражение для общего интеграла исходного уравнения

$$\left(\frac{y + \frac{6}{5} - \frac{5 + \sqrt{21}}{2}(x - \frac{7}{2})}{y + \frac{6}{5} - \frac{5 - \sqrt{21}}{2}(x - \frac{7}{5})}\right)^{\frac{9}{2}} \cdot \left(\left(\frac{y + \frac{6}{5}}{x - \frac{7}{5}}\right)^2 - \frac{y + \frac{6}{5}}{x - \frac{7}{5}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} = c\left(x - \frac{7}{5}\right).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 6y - 3}{x + 3y + 1}.$$

В этом случае замена $x = u + \alpha, y = v + \beta$ приводят к системе (5)

$$\begin{cases} 2\alpha + 6\beta - 3 = 0, \\ \alpha + 3\beta + 1 = 0 \end{cases}$$

с определителем $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right| = 0$, поэтому делаем замену

$$t = x + 3y. \quad (*)$$

Тогда

$$\frac{dt}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}.$$

После подстановки в уравнение получим

$$\frac{1}{3}\frac{dt}{dx} - \frac{1}{3} = \frac{2t-3}{t+1}$$

или

$$\frac{dt}{dx} = \frac{7t-8}{t+1}.$$

Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{(t+1)}{7t-8}dt = x + c.$$

Вычисляем интеграл

$$\frac{1}{7}t + \frac{15}{49}\ln|7t-8| = x + c.$$

Заменяя здесь t по формуле (*), запишем общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{7}(x+3y) + \frac{15}{49}\ln|7(x+3y)-8| = x + c.$$

8. Уравнение в полных дифференциалах

Определение 1. Уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{20}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — непрерывные, дифференцируемые функции и

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{21}$$

Покажем, что если левая часть (20) является полным дифференциалом некоторой функции, то выполняется условие (21). Пусть левая часть (20) есть полный дифференциал

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

тогда

$$P(x,y)dx = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (22)$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

т.е. равенство (21) является необходимым условием того, чтобы левая часть (20) была полным дифференциалом.

Покажем, что условие (21) является достаточным. Положим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y),$$

получим

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y). \tag{23}$$

При этом интегрировании переменная y играла роль параметра, поэтому имеем произвольную функцию $\varphi(y)$. Функцию $\varphi(y)$ подберем такой, чтобы выполнялось второе условие (22). Для этого продифференцируем обе части (23) по y и результат приравняем $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

С учетом (21) можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

откуда

$$\varphi'(y) = Q(x_0,y), \quad \varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + c.$$

Таким образом, функция $u(x,y)$ будет иметь вид

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + c_1.$$

Т.к. уравнение (20) можно в этом случае записать в виде $du = 0$, то его решением будет $u(x,y) = c$, т.е.

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = c.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{x}{y^2}dx + \frac{y - x^2}{y^3}dy = 0.$$

Справедливы соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x}{y^3}.$$

Таким образом, это уравнение в полных дифференциалах. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y^2}$, то

$$u = \int \frac{x}{y^2}dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2y^2} + \varphi(y).$$

Найдем $\frac{\partial u}{\partial y}$ и приравниваем $Q(x) = \frac{y-x^2}{y^3}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x^2}{2y^3} + \varphi'(y) = \frac{y - x^2}{y^3}.$$

Откуда

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$$

и

$$\varphi(y) = -\frac{1}{y} + c_1.$$

Таким образом,

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \frac{1}{y} + c_1$$

и общий интеграл уравнения запишется в виде

$$u(x,y) = c, \quad \frac{x^2}{2y^2} - \frac{1}{y} = c.$$

9. Дифференциальные уравнения высших порядков

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{1}$$

По сказанному выше, общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n), \tag{2}$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ — произвольные постоянные, т.е. имеется бесчисленное множество решений уравнения (1), зависящих от значений этих постоянных. Чтобы сформулировать теорему существования и единственности решения уравнения (1), будем считать, что правая часть его является функцией независимых переменных $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$.

Теорема 1. (Существования и единственности решения уравнения (1).) Если правая часть $f(x, y, y, ..., y^{(n-1)})$ непрерывна вместе с частными производными от нее $f_x, f_y, ..., f_{y^{(n)}}, f_{y^{(n-1)}}$ в некоторой области, содержащей точку $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, y' = {y'}_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Находя $y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}$, подставляя в них $x = x_0$ и приравнивая их начальным условиям, получим систему n уравнений для определения значений $c_1, c_2, ..., c_n$.

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0, c_1, c_2, ..., c_n), \\ y'_0 = y'(x_0, c_1, c_2, ..., c_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, ..., c_n). \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя найденные после решения системы (3) значения постоянных в (2), получим частное решение уравнения. Также как и в случае уравнения первого порядка, методы получения точных решений для уравнений более высокого порядка известны лишь для некоторых частных типов этих уравнений.

10. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Общий интеграл этого уравнения получается последовательным интегрированием n раз этого уравнения. После n интегрирований, получим

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} \ldots \int\limits_{x_0}^{x}}_{n} f(x)dx \ldots dx + \frac{c_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + ... + c_n.$$

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y'' = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Интегрируя, получим

$$y' = \int\limits_0^x x^2 dx + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_1, \quad y = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2.$$

Определяем из начальных условий значения констант.
1. Из условия $y'(0) = 1$, получим $c_1 = 1$.
2. Из условия $y(0) = 0$, $c_2 = 0$.
Подставляя их в общее решение, найдем частное решение

$$y = \frac{x^4}{12} + x.$$

11. Дифференциальные уравнения второго порядка, приводимые к уравнениям первого порядка

11.1. Уравнение не содержит явным образом искомой функции

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right). \tag{4}$$

Обозначим производную $\frac{dy}{dx}$ через p:

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4), получим уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p) \tag{5}$$

относительно $p(x)$. Решая эти уравнения, найдем его общее решение $p = p(x, c_1)$. Тогда из соотношения $\frac{dy}{dx} = p$, интегрируя, получим общее решение уравнения (4),

$$y = \int p(x, c_1)dx + c_2.$$

Пример 1. Решить уравнение $(x-3)y'' + y' = 0$.

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}, \quad (x-3)\frac{dp}{dx} + p = 0,$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x-3}, \quad \ln|p| = -\ln|x-3| + \ln|c_1|, \quad p = \frac{c_1}{x-3},$$

$$y = \int \frac{c_1}{x-3}dx + c_2, \quad y = c_1 \ln|x-3| + c_2.$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + \frac{y'}{x} = x$.

После подстановки $y' = p$, $y'' = p'$ уравнение принимает вид

$$p' + \frac{p}{x} = x.$$

Это линейное уравнение первого порядка. Как обычно в этом случае полагаем $p = uv$ и решаем это уравнение

$$u'v + v'u + \frac{1}{x}uv = x, \quad v' + \frac{1}{x}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x},$$

$$u'\frac{1}{x} = x, \quad u' = x^2, \quad u = \frac{x^3}{3} + c_1, \quad p = \frac{\frac{x^3}{3} + c_1}{x}.$$

Интегрируя это выражение, получаем решение исходного уравнения

$$y(x) = \frac{x^3}{9} + c_1 \ln|x| + c_2.$$

11.2. Правая часть уравнения не содержит x

Рассмотрим уравнение вида

$$y'' = f(y, y'). \tag{6}$$

Положим $y' = p$, будем считать p функцией от y тогда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Подставляя в (6) выражение для $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим

$$p\frac{dp}{dy} = f(y,p),$$

т.е. уравнение первого порядка относительно p. Интегрируя его, найдем p как функцию от y и произвольного постоянного c_1:

$$p = p(y,c_1) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = p(y,c_1).$$

Разделяя переменные в последнем уравнении

$$\frac{dy}{p(y,c_1)} = dx$$

и интегрируя, получим общий интеграл исходного уравнения

$$\int \frac{dy}{p(y,c_1)} = x + c_2.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Делаем замену $y'(x) = p(y)$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$p^2 + 2yp\frac{dp}{dy} = 0 \quad \text{или} \quad p\left(p + 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0. \tag{7}$$

Полагая теперь $p + 2y\frac{dp}{dy} = 0$, разделяя переменные в нем и интегрируя, будем иметь

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{y}, \quad \ln p = -\frac{1}{2}\ln y + \ln c_1,$$

$$p = \frac{c_1}{\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{\sqrt{y_1}}, \quad \sqrt{y}dy = c_1 dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1 x + c_2.$$

Полагая в (7) $p = 0$, т.е. $y' = 0$, получим $y = c$ — еще одно решение уравнения (7).

Пример 4. Решить задачу Коши

$$y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

После замены $p = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение

$$p\frac{dp}{dy} = -18\cos^3 y \sin y.$$

Интегрируя его и удовлетворяя начальным условиям, будем иметь

$$\frac{p^2}{2} = 18\frac{\cos^4 y}{4} + c_1,$$

$$\frac{9}{2} = \frac{18}{4} + c_1 \Rightarrow c_1 = 0,$$

откуда

$$p^2 = 9\cos^4 y \quad \text{или} \quad p = \pm 3\cos^2 y.$$

Заменяя p на $\frac{dy}{dx}$, интегрируя и удовлетворяя первому начальному условию, получим два решения исходного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \pm 3\cos^2 y,$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \pm 3dx,$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \pm x + c_2,$$

$$\operatorname{tg} y = \pm x + c_2,$$

$$\operatorname{tg} 0 = \pm 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} y = \pm x, \quad y = \pm \operatorname{arctg} x.$$

12. Определение линейного уравнения n-ого порядка

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям (ЛДУ).

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейное относительно искомой функции и ее производных, т.е. имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \varphi(x); \tag{1}$$

при $n = 2$ имеем: $$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x). \tag{1'}$$

Функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$ $a_n(x)$, $\varphi(x)$ заданы на некотором интервале $(a; b)$. Если $a_0(x) \neq 0$ на $(a; b)$, то делим на $a_0(x)$ и получаем:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{2}$$

при $n = 2$, имеем: $$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{2'}$$

Если $\varphi(x) \equiv 0$ ($f(x) \equiv 0$), то ЛДУ (1) ((2)) называется однородным. Если $\varphi \not\equiv 0$ ($f(x) \not\equiv 0$), то ЛДУ (1) ((2)) — неоднородное.

Теорема 1 (существования и единственности). *Если функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывны на $(a;b)$, то для любых чисел $x_0 \in (a;b)$, y_0, y'_0 существует единственное решение уравнения $(2')$, удовлетворяющее начальным условиям:* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Замечание (геометрический смысл теоремы). Если выполнены условия теоремы, то для любых чисел $x_0 \in (a;b)$; y_0, y'_0 существует единственное решение (кривая), проходящее через точку (x_0, y_0) и образующее с осью Ox в этой точке угол α, $\operatorname{tg}\alpha = y'_0$.

Аналогичная теорема имеет место при любом n.

13. Линейно зависимые и независимые функции

Определение. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, определенные на (a,b), называются линейно зависимыми на (a,b), если существуют такие числа α_1, α_2, …, α_n, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для любого $x \in (a,b)$ имеет место равенство:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Определение. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, называются линейно независимыми на (a,b) если тождество:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad \text{на} \quad (a,b)$$

($\alpha_i = \text{const}$) имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Пример 1. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ линейно независимы на любом $(a;b)$.

Действительно, допустим, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ и хотя бы одно из чисел α_1 или α_2, например α_1, отлично от нуля. Тогда $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$, т.е. $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{const}$. Получили противоречие. Таким образом, если $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, т.е. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы.

Пример 2. $y_1(x) = 4x^2$, $y_2(x) = x^2$.

Для $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -4$ имеем: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$ на любом (a,b), т.е. $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы.

Замечание. Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство $\dfrac{y_1}{y_2} = \lambda = \text{const}$.

Определение. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ — функции, определенные на

(a, b) и имеющие производные до $(n-1)$-ого порядка, то определитель:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом (Юзеф Вронский (1778–1853) — польский математик) ($W(x)$ — функция, определенная на (a, b)). Если $n = 2$, то

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы на (a, b), то определитель Вронского, составленный для них, равен нулю на (a, b).*

Доказательство проведем для $n = 2$. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы. Тогда существует $\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha_2 \neq 0$ такое, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $y_1(x) = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2(x)$, $y_1'(x) = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2'(x)$. Подставим в $W(x)$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0,$$

т.к. столбцы пропорциональны.

Пример. $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \sin^2 x$, $y_3(x) = \cos 2x$.

Легко показать, что

$$-y_1(x) + 2y_2(x) + y_3(x) \equiv 0,$$

т.е. $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ линейно зависимы. Находим определитель Вронского и убеждаемся, что он равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos 2x \\ 0 & \sin 2x & -2\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = -4\sin 2x \cos 2x + 4\cos 2x \sin 2x = 0.$$

Следствие. Если $W(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$, т.е. $W(x_0) \neq 0$, то функции линейно независимы.

Замечание. Если $W(x) \equiv 0$ на (a, b), то функции могут быть линейно зависимыми и могут быть линейно независимыми.

14. Структура общего решения однородного уравнения

Теорема 3. *Если* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_k(x)$ *являются решениями однородного ЛДУ*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

то $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x)$ *с произвольными постоянными* c_1, c_2, $\ldots$, c_k *является решением этого уравнения.*

Доказательство этой теоремы основано на свойствах производной.

Теорема 4. *Если коэффициенты* $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ *однородного ЛДУ:*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (3)$$

непрерывны на $(a;b)$ *и его решения* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ *линейно независимы на* $(a;b)$, *то определитель Вронского, составленный из них, отличен от нуля на* $(a;b)$.

Замечание 1. Теорема 4 справедлива только для функций y_1, y_2, $\ldots$, y_n, являющихся решениями однородного ЛДУ. Для произвольных функций y_1, $\ldots$, y_n из линейной независимости не следует, что определитель Вронского, составленный из них, отличен от нуля.

Замечание 2. Пусть $y_1(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ — решения уравнения (3) с непрерывными на (a,b) коэффициентами и $W(x)$ — определитель Вронского, составленный из них. Из теорем 2 и 4 следует, что $W(x)$ не равен нулю ни в одной точке интервала (a,b) тогда и только тогда, когда частные решения линейно независимы.

Теорема 5 (структура общего решения однородного ЛДУ). *Если функции* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ *— линейно независимые на* (a,b) *решения уравнения* (3) *с непрерывными на* (a,b) *коэффициентами, то функция*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) \qquad (4)$$

(*где* c_1, c_2, $\ldots$, c_n *— произвольные постоянные*) *является общим решением уравнения* (3).

Замечание. Для того, чтобы найти общее решение однородного ЛДУ 2-го порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (3')$$

с непрерывными на (a,b) коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$, достаточно найти любые два линейно независимых частных решения этого уравнения: $y_1(x)$ и $y_2(x)$.Тогда

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad (4')$$

— общее решение уравнения ($3'$). В некоторых случаях удается тем или иным способом найти только одно частное решения $y_1(x)$. Тогда другое частное решение $y_2(x)$ можно найти по формуле:

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx \right) dx,$$

где $x_0 \in [a; b]$. Оба решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при этом линейно независимы.

15. Однородные ЛДУ с постоянными коэффициентами 2-ого порядка

Частным случаем рассмотренных выше однородных ЛДУ являются однородные ЛДУ с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5}$$

где p и q действительные числа; коэффициенты p и q могут быть и комплексными, но здесь этот случай не рассматривается.

Для решения ЛДУ типа (5) вводится понятие характеристического уравнения.

Определение. Алгебраическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{6}$$

называется характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению (5). Для его составления нужно в дифференциальном уравнении заменить производную $y^{(k)}$ на λ^k $(k = 1, 2, \ldots)$; y на 1.

Теорема 6. *Если λ — корень характеристического уравнения* (6) (λ — *действительное или комплексное число*), *то функция $y = e^{\lambda x}$ — решение уравнения* (5).

Для доказательства подставим $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ в (5), получим:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0, \quad \text{т.к.} \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Итак, $y = e^{\lambda x}$ — решение уравнение (5)

Уравнение (6) — квадратное. Обозначим его корни через λ_1, λ_2.

Теорема 7. 1). *Если корни характеристического уравнения* (6) *действительны и различны* ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), *то общее решение уравнения имеет вид*:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{7}$$

2). *Если корни характеристического уравнения* (6) *действительные и равные* ($\lambda_1 = \lambda_2$), *то общее решение уравнения* (5) *имеет вид*:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \tag{8}$$

3). *Если корни характеристического уравнения* (6) *комплексные* ($\lambda_1 = \alpha + i\beta$; $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$), *то общее решение имеет вид*:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \tag{9}$$

Доказательство.

1). Пусть действительные и различные λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения (6). По теореме 6 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ — частные решения уравнения (5).

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$$

(т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

В силу следствия теоремы 2 функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, а тогда по теореме 5 (7) — общее решение.

2). Пусть характеристическое уравнение (6) имеет совпадающие действительные корни. В этом случае $D = \dfrac{p^2}{4} - 4q = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$. По теореме 6 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ — решение. Покажем, что $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda_1 x}$ — решение уравнения (5). Подставим в (5) $y = x \cdot e^{\lambda_1 x}$; $y' = (1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x}$; $y'' = (2\lambda_1 + \lambda_1^2 x) \cdot e^{\lambda_1 x}$, получим:

$$e^{\lambda_1 x} \cdot (2\lambda_1 + \lambda_1^2 x + p + p\lambda_1 x + qx) = 0 \quad \text{или}$$
$$e^{\lambda_1 x} \cdot ((\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)x + (2\lambda_1 + p)) = 0.$$

Последнее равенство верно, поскольку $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$ (т.к. λ_1 — корень характеристического уравнения) и $2\lambda_1 + p = 0$ (т.к. $\lambda_1 = -\dfrac{p}{2}$).

Итак, $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda_1 x}$ — решение уравнения (5). Вычислим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} =$$
$$= (1 + \lambda_1 x - \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} \neq 0.$$

По теореме 2 $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые, а тогда по теореме 5 (8) — общее решение.

3). Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ — корни характеристического уравнения (6). По теореме 6 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ — частные решения уравнения (5). В силу теоремы 3 функции $y_3(x) = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2)$ и $y_4(x) = \dfrac{1}{2i}(y_1 - y_2)$ — решения уравнения (5). Преобразуем $y_3(x)$ и $y_4(x)$:

$$y_3(x) = \frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) =$$
$$= \frac{e^{\alpha x}}{2}(\cos\beta x + i\sin\beta x + \cos\beta x + i\sin(-\beta x)) = e^{\alpha x}\cos\beta x;$$

$$y_4(x) = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Вычислим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ y_3' & y_4' \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ (\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)e^{\alpha x} & (\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)e^{\alpha x} \end{vmatrix} = \beta^2 e^{2\alpha x} \neq 0.$$

По теореме 2 $y_3(x)$ и $y_4(x)$ линейно независимые решения, а тогда по теореме 5 (9) — общее решение.

Пример 1. Решить уравнение: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Имеем: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. По формуле (7) получаем общее решение:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}.$$

Пример 2. Решить уравнение: $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение. Имеем: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. По формуле (8) получаем общее решение

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Имеем: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$. По формуле (9) получаем общее решение уравнения:

$$y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x).$$

16. Интегрирование однородного ЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения однородного ЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0, \tag{10}$$

где p_1, p_2, …, p_n — числа, решается аналогично случаю уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение. Алгебраическое уравнение

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0 \tag{11}$$

называется характеристическим, соответствующим дифференциальному уравнению (10).

Аналогично теореме 6 можно показать, что, если λ — корень (11), то $y = e^{\lambda x}$ — решение уравнения (10).

Замечания. 1) Корень $\lambda = \lambda_0$ алгебраического уравнения (11) называется корнем кратности k, если

$$P(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda), \quad Q(\lambda_0) \neq 0,$$

$Q(\lambda)$ — многочлен.

2) Можно показать, что $\lambda = \lambda_0$ — корень кратности k тогда и только тогда, когда $P(\lambda_0) = 0$, $P^{(i)}(\lambda_0) = 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$; $P^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$, где $P^{(i)}(x) = \dfrac{d^i P}{dx^i}$.

Примеры. 1) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.

Поскольку $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, то $\lambda = 1$ — корень кратности 2.

2) $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = 0$.

Поскольку $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1)^3$, то $\lambda = 0$ — корень кратности 2, а $\lambda = -1$ — корень кратности 3.

Общее решение уравнения (10) находят аналогично уравнению 2-ого порядка.

Схема решения однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами.

1°. Находим корни λ_1, λ_2, …, λ_n характеристического уравнения (11). С учетом кратности уравнение (11) имеет ровно n корней действительных или комплексных (основная теорема алгебры).

Пример 2. $\lambda^5 + \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = i$, $\lambda_5 = -i$. Число корней, равное пяти, совпадает с порядком уравнения.

2°. По характеру корней уравнения (11) выписываем частные решения уравнения (10):

а) Каждому действительному однократному корню λ характеристического уравнения соответствует частное решение $y = e^{\lambda x}$ уравнения (10).

б) Каждой паре однократных комплексно-сопряженных корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ соответствует два частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$; $e^{\alpha x}\sin\beta x$ уравнения (10).

в) Каждому действительному корню λ кратности k соответствует k частных решений:

$$e^{\lambda x}; x \cdot e^{\lambda x}; x^2 e^{\lambda x}; \ldots ; x^{k-1} e^{\lambda x},$$

линейно независимых.

г) Каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ кратности m соответствует $2m$ частных решений

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; x \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x; \ldots ; x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x;$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x; x \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x; \ldots ; x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

3°. Число построенных таким образом частных решений уравнения (10) равно порядку n этого уравнения. Можно показать, что все эти решения y_1, …, y_n линейно независимы, следовательно, их линейная комбинация $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ — общее решение уравнения (10).

Пример. Решить уравнение:

$$y^{\mathrm{VII}} - 3y^{\mathrm{VI}} + 5y^{\mathrm{V}} - 7y^{\mathrm{IV}} + 7y''' - 5y'' + 3y' - y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^7 - 3\lambda^6 + 5\lambda^5 - 7\lambda^4 + 7\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Обозначим левую часть уравнения через $P(\lambda)$. Легко проверить, что $P(1) = 0$, т.е. $\lambda = 1$ — корень характеристического уравнения. Кроме того, $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, $P'''(1) \neq 0$ (нужно найти производные и подставить $\lambda = 1$), поэтому $\lambda = 1$ — корень кратности 3. Делим $P(\lambda)$ на $(\lambda - 1)^3$, получаем

$$(\lambda - 1)^3 (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1; \lambda_4 = \lambda_5 = i; \lambda_6 = \lambda_7 = -i.$$

Корню $\lambda = 1$ кратности 3 соответствуют три частных решения: $y_1(x) = e^x$; $y_2(x) = xe^x$; $y_3(x) = x^2 e^x$. Комплексно сопряженным корням $\lambda = \pm i$ кратности 2 соответствуют четыре частных решения $y_4(x) = \cos x$; $y_5 = x \cos x$; $y_6(x) = \sin x$; $y_7(x) = x \sin x$. Все полученные решения линейно независимы. Получаем общее решение

$$y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cdot e^x + (c_4 + c_5 x) \cos x + (c_6 + c_7 x) \sin x.$$

Итак, для решения уравнения:

$$y'' + py' + qy = 0$$

составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и находим его корни λ_1, λ_2.

Корни характеристического уравнения	Общее решение однородного ЛДУ
1° $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
2° $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}$
3° $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Для решения уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0$$

составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0.$$

Обозначим его корни:

действительные корни λ_i кратности k_i, $i = 1, \ldots, s$;

комплексно-сопряженные $\alpha_j \pm i\beta_j$ кратности m_j, $j = 1, 2, \ldots, t$.

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s + 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_t) = n.$$

Корни характеристического уравнения	Частное решение	Общее решение
1. λ_i кратности k_i $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \ldots, s$	$y_i(x) = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_{k_i - 1} x^{k_i - 1}) e^{\lambda_i x}$ $i = 1, 2, \ldots, s$	$y(x) = y_1 + y_2 + \ldots$
2. Пара комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$ кратности m_j, $j = 1, 2, \ldots, t$	$\bar{y}_j(x) = e^{\alpha_i x}((\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 x + \ldots + \tilde{c}_{m_j - 1} x^{m_j - 1}) \cdot$ $\cdot \cos \beta_j x + (\hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \ldots + \hat{c}_{m_j - 1} x^{m_j - 1}) \cdot$ $\cdot \sin \beta_j x$ $j = 1, 2, \ldots, t$	$\ldots + y_s + \bar{y}_1 +$ $+ \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_t$

17. Структура общего решения неоднородного ЛДУ

Рассмотрим неоднородное ЛДУ n-го порядка

$$y^n + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y = f(x) \tag{12}$$

при $n = 2$:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x), \tag{12'}$$

где $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$, $p(x)$, $q(x)$ — заданные непрерывные функции на $(a; b)$.

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \tag{13}$$

а при $n = 2$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{13$'$}$$

Теорема 8. *Общее решение неоднородного ЛДУ n-го порядка равно сумме частного решения y^* неоднородного уравнения и общего решения $\bar{y}$ соответствующего ему однородного уравнения, т.е.*

$$y = y^* + \bar{y}. \tag{14}$$

18. Метод вариации производных постоянных

Рассмотрим сначала неоднородное ЛДУ 2-го порядка (12$'$). Его общим решением является функция (14), т.е.

$$y = y^* + \bar{y}.$$

Частное решение y^* уравнения (12$'$) можно найти, если известно общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения (13$'$) методом вариаций произвольных постоянных. Пусть

$$\bar{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

— общее решение уравнения (13$'$). Заменим в общем решении постоянные c_1, c_2 неизвестными функциями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ так, чтобы функция

$$y^* = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{15}$$

была решением уравнения (12$'$). Подставляя это решение в (12$'$), полагая

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{16}$$

После проведения выкладок получим

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2(x)'y_2'(x) = f(x). \tag{17}$$

Таким образом, функция (15) будет частным решением y^* уравнения (12$'$), если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (16) и (17):

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{18}$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, т.к. это определитель Вронского для линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (13$'$). Поэтому система (18) имеет единственное решение: $c_1'(x) = \varphi(x)$ и $c_2'(x) = \psi(x)$, где

$\varphi(x), \psi(x)$ — функции от x. Интегрируя эти функции, находим $c_1(x)$ и $c_2(x)$, а затем по формуле (15) составляем частное решение уравнения (12′).

Пример. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Решение. Найдем общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения: $y'' - 2y' + y = 0$. Имеем: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $y = (c_1 + c_2 x)e^x$. Найдем теперь частное решение y^* исходного уравнения. Оно ищется в виде: $y^* = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$. Для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляем систему уравнений вида (18)

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot xe^x = 0, \\ c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x)(1+x)e^x = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Решаем ее: $\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x};$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{x} & (1+x)e^x \end{vmatrix} = -e^{2x}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x};$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1; \quad c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x}.$$

$$c_1(x) = \int (-1)\,dx = -x + \tilde{c}_1; \quad c_2(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \tilde{c}_2.$$

Достаточно взять одну из первообразных: $c_1(x) = -x$; $c_2(x) = \ln|x|$. Заменим частное решение: $y^* = -xe^x + x\ln|x|e^x$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(x) = \bar{y} + y^* = (c_1 + c_2 x - x + x\ln|x|)e^x.$$

Для неоднородного ЛДУ n-го порядка (12) частное решение $y^*(x)$, аналогично уравнению 2-го порядка, можно найти методом вариации произвольных постоянных. Оно ищется в виде:

$$y^* = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x),$$

где $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ — линейно независимые частные решения однородного уравнения (13).

Система уравнений для нахождения $c_i'(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 + \ldots + c_n'y_n = 0, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' + \ldots + c_n'y_n' = 0, \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' + \ldots + c_n'y_n'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + c_3'y_3^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы — определитель Вронского для функций y_1, y_2, $\ldots$, y_n, он отличен от нуля в силу линейной независимости y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Поэтому система имеет единственное решение.

При нахождении частных решений неоднородных ЛДУ может быть полезной следующая теорема:

Теорема 9. *Если правая часть уравнения* (12) *представляет собой сумму двух функций* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *а* y_1^* *и* y_2^* *— частные решения уравнений, у которых левая часть совпадает с левой частью* (12), *а правая совпадает с* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$, *соответственно, то функция* $y^* = y_1^* + y_2^*$ *является решением данного уравнения.*

19. Интегрирование неоднородных ЛДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим неоднородное ЛДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = f(x), \tag{19}$$

p_i, $i = 1, \ldots, n$ — действительные числа.

Согласно теореме 8 общее решение уравнения (19) представляет собой сумму общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения. Частное решение уравнения (19) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

Для уравнений с постоянными коэффициентами (19) существует более простой способ нахождения y^*, если правая часть $f(x)$ уравнения (19) имеет так называемый специальный вид:

I $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ или

II $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ ($P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени n, m соответственно)

III $f(x)$ — сумма функций вида I и II.

Суть метода, называемого методом неопределенных коэффициентов, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (19) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (19) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

В нижеследующей таблице в графе 1 указан вид правой части $f(x)$, в графе 2 — соответствующее выражение для частного решения уравнения любого порядка $n \geqslant 2$, в графе 3 — выражение для частного решения уравнения 2-го порядка.

Правая часть $f(x)$	Частное решение y^* уравнения $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x)$	Частное решение y^* уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$
I. $e^{\alpha x} P_k(x)$, где $P_k(x) = a_0 x^k + \ldots + a_k$ — многочлен k-ой степени от x	$y^*(x) = x^r P_k^*(x) e^{\alpha x}$, где $P_k^*(x)$ — многочлен k-той степени с неопределенными коэффициентами; число r равно кратности корня α характеристического уравнения (в случае, если α не является корнем характеристического уравнения, считаем $r = 0$)	А. $y^*(x) = e^{\alpha x} P_k^*(x)$, если ни один из корней характеристического уравнения не равен α. Б. $y^*(x) = x e^{\alpha x} P_k^*(x)$, если только один из корней характеристического уравнения равен α. В. $y^*(x) = x^2 e^{\alpha x} P_k^*(x)$, если оба корня характеристического уравнения равны α. (Во всех случаях А, Б, В $P_k^*(x)$ — многочлен степени k с неопределенными коэффициентами.)
II $e^{\alpha x}(P_k(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$ $P_k(x)$ $Q_m(x)$ — многочлены степени k, m соответственно	$y^*(x) = x^r (P_l^*(x) \cos \beta x + Q_l^*(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$, где P_l^*, Q_l^* — многочлены с неопределенными коэффициентами степени $l = \max(k, m)$; число r равно кратности корня $\alpha + i\beta$ (или $\alpha - i\beta$) характеристического уравнения (в случае, если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, считаем $r = 0$)	А. $y^*(x) = (P_l^*(x) \cos \beta x + Q_l^*(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$, если корни характеристического уравнения не равны $\alpha \pm i\beta$, $l = \max(k, m)$ Б. $y^*(x) = x(P_l^*(x) \cos \beta x + Q^*(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$, если корни характеристического уравнения равны $\alpha \pm i\beta$.
III $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$ $f_i(x)$ — функция вида I или II	$y^*(x) = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_m$, где $\tilde{y}_i$ — частное решение уравнения: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$	

Пример 1. Найти решение уравнения $y'' + 2y' = x + 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Заданное уравнение является ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -2$. Правая часть имеет вид $e^{\alpha x} P_n(x)$, $\alpha = 0$, $P_n(x) = x + 1$ — многочлен 1-ой степени. Поэтому частное решение следует искать в виде:

$y^* = x(Ax+B)$ ($\lambda = 0$ — корень характеристического уравнения кратности 1). Находим производные и подставляем в заданное уравнение:

$$(y^*)' = 2Ax + B; \quad (y^*)'' = 2A; \quad 2A + 4Ax + 2B = x + 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x: $\begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases}$.

Откуда $A = \dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$; $y^* = \dfrac{1}{4}(x+1)x$. Так как общее решение соответствующего однородного уравнения есть $\bar{y} = c_1 + c_2 e^{-2x}$, то общее решение исходного уравнения будет

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}(x+1)x.$$

Найдем c_1 и c_2 по начальным условиям. Так как $y(0) = 0$, то из общего решение имеем $c_1 + c_2 = 0$. Найдем производную от общего решения: $y' = -2c_2 e^{-2x} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$. Используя второе начальное условие, получим: $1 = -2c_2 + \dfrac{1}{4}$, откуда $c_2 = -\dfrac{3}{8}$; $c_1 = \dfrac{3}{8}$. Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$y = \frac{3}{8}(1 - e^{-2x}) + \frac{1}{4}(x+1)x.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = x \sin x$.

Решение. Здесь $f(x) = x \sin x$, т.е. $\alpha = 0$, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = x$, $n = 0$, $m = 1$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Так как числа $\alpha \pm i\beta = \pm i$ не является корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде (см. таблицу)

$$y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Здесь степень многочленов с неопределенными коэффициентами равна $1 = \max(n, m) = \max(0; 1)$. Находим производные $(y^*)'$ и $(y^*)''$ и подставляем в исходное уравнение. Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и при $\cos x$, получим систему для определения коэффициентов, из которой находим:

$$A = \frac{1}{5}; \quad B = \frac{11}{50}; \quad C = \frac{1}{10}; \quad D = -\frac{1}{25}.$$

Частное решение: $y^* = \dfrac{1}{50}((10x + 11)\cos x + (5x - 2)\sin x)$. Общее решение исходного уравнения:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{50}((10x + 11)\cos x + (5x - 2)\sin x).$$

20. Системы дифференциальных уравнений

Для решения многих задач математики, физики, техники нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующих систему.

Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы ДУ первого порядка, содержащий n искомых функций y_1, y_2, ..., y_n, следующий:

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0. \end{cases}$$

Система ДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т.е. система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{20}$$

называется нормальной системой ДУ. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Замечание. Во многих случаях системы уравнений и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (20). Например, система трех ДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1(x; y; z; x'; y'; z') \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_2(x; y; z; x'; y'; z') \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_3(x; y; z; x'; y'; z'), \end{cases}$$

описывающая движение точки в пространстве, путем введения новых переменных:

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = w$$

приводится к нормальной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dz}{dt} = w \\ \dfrac{du}{dt} = F_1(x; y; z; t; u; v; w) \\ \dfrac{dv}{dt} = F_2(x; y; z; t; u; v; w) \\ \dfrac{dw}{dt} = F_3(x; y; z; t; u; v; w). \end{cases}$$

Уравнение третьего порядка $y''' = f(x; y; y'; y'')$ путем замены $y'' = u' = v$ сводится к нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = f(x; y; u; v) \end{cases}$$

Определение. Решением системы (1) называется совокупность из n функций y_1, y_2, ..., y_n, удовлетворяющих каждому из уравнений системы.

Начальные условия для системы (1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0; \quad y_2(x_0) = y_2^0; \ldots; y_n(x_0) = y_n^0 \tag{21}$$

Задача Коши для системы (20) ставится следующим образом: найти решение системы (20), удовлетворяющее начальным условиям (21).

Решение системы (20), зависящее от n произвольных постоянных:

$$y_1 = \varphi_1(x; c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1, \ldots, c_n)$$

называется общим, если по заданным начальным условиям (21) можно однозначно определить постоянные c_1, c_2, ..., c_n из системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x; c_1, c_2, \ldots, c_n) = y_1^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x; c_1, c_2, \ldots, c_n) = y_n^0 \end{cases}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных постоянных c_1, c_2, ..., c_n, называется частным решением системы (20).

21. Интегрирование нормальных систем

Один из основных методов интегрирования нормальной системы ДУ — метод сведения системы к одному ДУ. Техника этого метода основана на следующих соображениях.

Пусть задана нормальная система (20). Продифференцируем по x любое, например первое, уравнение:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Подставим в это равенство значения производных $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, …, $\frac{dy_n}{dx}$ из системы (20), получим:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot f_n.$$

Правая часть последнего равенства — функция от x; y_1; y_2; …; y_n, т.е.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продифференцируем полученное равенство еще раз и заменим значение производных $\frac{dy_1}{dx}$; …; $\frac{dy_n}{dx}$ из системы (20), получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продолжая этот процесс, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n) \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; \ldots; y_n) \\ \frac{d^3y_1}{dx^3} = F_1(x; y_1; \ldots; y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; \ldots; y_n) \end{cases} \qquad (22)$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (22) выразим функции y_2, y_3, …, y_n

через x, функцию y_1 и ее производные y_1', y_1'', …, $y_1^{(n-1)}$

$$\left\{\begin{array}{l} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \end{array}\right. \qquad (23)$$

Найденные значения подставим в последнее уравнение системы (22). Получим одно ДУ n-го порядка относительно искомой функции y_1: $\dfrac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})$.

Пусть $y_1 = \varphi_1(x; c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — общее решение этого уравнения. Продифференцировав его $(n-1)$ раз и подставив значения производных y_1', y_1'', …, $y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (23), найдем функции y_2, y_3, …, y_n.

$$y_2 = \varphi_2(x; c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = 6y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y + z \end{array}\right.$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение: $y'' = 6y' - 2z'$. Подставляем $z' = 2y + z$ в полученное равенство $y'' = 6y' - 2(2y + z)$, $y'' - 6y' + 4y = -2z$. Составляем систему:

$$\left\{\begin{array}{l} y' = 6y - 2z \\ y'' - 6y' + 4y = -2z \end{array}\right.$$

Из первого уравнения имеем: $z = \dfrac{6y - y'}{2}$. Подставляем z во второе уравнение последней системы:

$$y'' - 6y' + 4y = \frac{-2(6y - y')}{2}, \quad \text{т.е.} \quad y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Получили одно однородное ЛДУ второго порядка. Решаем его: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ и $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$ — общее решение уравнения. Находим функцию z. Значения y и $y' = (c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x})' = 2c_1 e^{2x} + 5c_2 e^{5x}$ подставляем в выражение $z = \dfrac{6y - y'}{2}$. Получим: $z = 3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{5x} - c_1 e^{2x} - \dfrac{5}{2} c_2 e^{5x}$, т.е $z = 2c_1 e^{2x} - 0,5c_2 e^{5x}$.

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}, \quad z = 2c_1 e^{2x} - 0,5c_2 e^{5x}.$$

22. Контрольные домашние задания

I. Задачи на составление дифференциальных уравнений первого порядка

При решении геометрических задач на составление дифференциальных уравнений прежде всего строят соответствующий условиям задачи чертеж, затем обозначают искомую кривую через $y = y(x)$ и выражают все входящие в задачу величины через x, y и y'. При этом обычно используется геометрический смысл производной (y' есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$). Затем, используя указанную в условии зависимость между этими величинами, получают дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$, решая которое, находят искомую функцию $y(x)$.

При решении физических задач, исходя из их условия, составляют соотношение между дифференциалами переменных величин. При этом делают допущения, упрощающие задачу, но не отражающиеся на результатах. Например, бесконечно малые приращения величин заменяют их дифференциалами; предполагают, что всякий физический процесс, рассматриваемый в течение бесконечно малого промежутка времени dt, протекает с постоянной скоростью, и т.д.

В некоторых случаях можно составить дифференциальное уравнение более простым путем, используя физический смысл производной (скорость протекания неравномерного процесса).

Пример 1. Найти уравнение семейств кривых на плоскости xOy, зная, что угловой коэффициент касательной в каждой точке любой кривой этого семейства равен отношению ординаты точки к ее абсциссе, взятому с противоположным знаком.

Решение. Обозначим кривую искомого семейства через $y = y(x)$. Угловой коэффициент касательной к этой кривой в каждой ее точке равен $y'(x)$. С другой стороны, согласно условию задачи, он равен $-\dfrac{y}{x}$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение искомого семейства: $y' = -\dfrac{y}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные при условии $y \neq 0$, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \quad \text{откуда} \quad \ln|x| + \ln|y| = \ln|c|,$$

или $xy = c$. Таким образом, указанным свойством обладает семейство гипербол, имеющих своими асимптотами оси координат. Особым решением данного уравнения является $y = 0$.

Пример 2. Материальная точка массой $m = 0,75$ г погружается в жидкость без начальной скорости. Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения v с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти зависимость скорости от времени; вычислить значение скорости через 2 секунды после начала погружения.

Решение. В момент времени t точка находится под действием силы тяжести $P = mg$ и силы сопротивления жидкости $Q = kv$. Сила Q направлена в сторону, противоположную движению, а сила P — в сторону движения; поэтому их равнодействующая $F = mg - kv$. Под действием этой равнодействующей точка опускается вниз. Но по второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = \dfrac{dv}{dt}$ (ускорение), т.е. $F = m \cdot \dfrac{dv}{dt}$. Приравниваем теперь оба выражения для F:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

откуда, используя условия задачи, имеем

$$0,75\frac{dv}{dt} = 0,75g - 3v, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = g - 4v.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dv}{g - 4v} = dt; \quad -\frac{1}{4}\ln|g - 4v| = t - \frac{1}{4}\ln c;$$

$$\ln|g - 4v| = -4t + \ln C, \text{ т.е. } v = \frac{g}{4}(1 - e^{-4t}).$$

Полагая теперь $t = 2$, находим скорость точки через 2 с после начала погружения:

$$v = \frac{g}{4}(1 - e^{-8}) = 2,45 \text{ (м/с)}$$

Пример 3. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение. Примем за независимое переменное время t, а за искомую функцию $y(t)$ — количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, на сколько изменится количество соли в сосуде за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. В одну минуту поступает 2 л раствора, а в Δt минут — $2 \cdot \Delta t$ литров; в этих $2 \cdot \Delta t$ литрах содержится $0,3 \cdot 2 \cdot \Delta t = 0,6\,\Delta t$ кг соли. С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $2 \cdot \Delta t$ литров раствора. В момент t во всем сосуде (10 л) содержится $y(t)$ кг соли, следовательно, в $2 \cdot \Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0,2 \cdot \Delta t \cdot y(t)$ кг соли, если бы за время Δt содержание соли в сосуде не менялось. Но так как оно за это время меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих $2 \cdot \Delta t$ литрах содержится $0,2 \cdot \Delta t(y(t) + \alpha)$ кг соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Итак, в растворе, втекающем за промежуток времени $(t; t + \Delta t)$, содержится $0,6 \cdot \Delta t$ кг соли, а в вытекающем $0,2 \cdot \Delta t(y(t) + \alpha)$ кг. Приращение количества соли за это время $y(t + \Delta t) - y(t)$ равно разности найденных величин, т.е.

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,6\,\Delta t - 0,2\,\Delta t(y(t) + \alpha).$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В левой части получится производная $y'(t)$, а в правой получим: $0,6 - 0,2y(t)$, т.к. $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Итак, имеем линейное дифференциальное уравнение: $y'(t) = 0,6 - 0,2y(t)$. Решая его, получим

$$y(t) = 3 - c \cdot e^{-0,2t}.$$

Так как при $t = 0$ соли в сосуде не было, то $y(0) = 0$. Полагая $t = 0$, найдем $y(0) = 3 - c$; $0 = 3 - c$; $c = 3$. Подставляя в общее решение $c = 3$, получим $y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}$. При $t = 5$ в сосуде будет

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2\cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1,9 \text{ кг соли.}$$

Решить задачу

1. В прямоугольный бак размером 60×75 см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 2,5 см^2. За какое время наполнится бак? (Вода вытекает со скоростью $0,6\sqrt{2gh}$, h — высота уровня воды над отверстием.) Сравнить результат со временем наполнения бака без отверстия.

2. Найти кривую, проходящую через точку A $(-1, 2)$, если длина любой ее нормали от точки касания до оси Oy равна длине радиуса вектора точки касания.

3. Материальная точка массой в 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ сек скорость равнялась 0,5 м/сек, а сила $-4 \cdot 10^{-5}$ Н. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

4. Тело охладилось за 10 мин от 100° до 60°. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°. Когда тело остынет до 25°? (Скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды).

5. Воронка имеет форму конуса радиуса $R = 6$ см и высоты $H = 10$ см, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра $d = 0,5$ см, сделанное в вершине конуса. (Жидкость вытекает со скоростью $0,6\sqrt{2gh}$, h — высота уровня воды над отверстием).

6. Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная b.

7. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v = 10$ км/час. На полном ходу ее мотор был выключен, и через $t = 20$ сек скорость лодки уменьшилась до $v_1 = 6$ км/час. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти скорость лодки через 2 мин после остановки мотора, найти также расстояние, пройденное лодкой в течение одной минуты после остановки мотора.

8. Найти кривую, проходящую через точку $(0; -2)$, для которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной на 3 единицы.

9. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет вся вода? (Жидкость вытекает со скоростью равной $0,6\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием.)

10. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величин постоянная, равная a^2.

11. Найти уравнение движения тела, если его скорость пропорциональна пройденному пути и тело проходит 75 м за 5 с, а 225 м — за 10 с.

12. Катер движется в стоячей воде со скоростью 12 км/ч. На полном ходу его двигатель был выключен. Определить скорость катера через 3 мин после отключения двигателя, считая сопротивление воды пропорциональным скорости. Коэффициент пропорциональности k принять численно равным $20m$, где m — масса катера в кг.

13. В комнате, где температура воздуха равна 20°, некоторое тело охлаждается за 20 мин от 100° до 60°. Считая скорость остывания тела пропорциональной разности температур тела и окружающего его воздуха, определить, за какое время тело остынет до 30°.

14. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдет тело за 5 секунд от начала движения, если известно, что за 1 секунду оно проходит путь 8 м, а за 3 секунды — 40 м?

15. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1; 4)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам.

16. Найти уравнение семейства кривых, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

17. Кривая проходит через точку (2; 0,5). В произвольной точке этой кривой проведена касательная, точка пересечения которой с осью Ox имеет абсциссу, вдвое бо́льшую, чем абсцисса точки касания. Найти уравнение кривой.

18. Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру $70°$, через 10 мин температура воды стала $65°$, температура окружающей резервуар среды $15°$. Определить: температуру воды в резервуаре через 30 мин от начального момента; момент времени, когда температура воды в резервуаре станет равной $20°$.

20. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0. За 3 года эксплуатации износ оборудования составил третью часть первоначальной стоимости. Найти стоимость оборудования по истечению t лет.

21. Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Известно, что количество первого равно 31,4 г по истечению 1 ч и 9,7 г по истечению 3 ч. Определить: 1) сколько вещества было в начале процесса; 2) через сколько времени после начала останется 1% первоначального количества.

22. Найти линию, проходящую через точку (2, 3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

23. В дне котла, имеющего форму полусферы радиуса R и полностью заполненного водой, образовалась щель малой площади σ. Найти зависимость уровня воды в котле от времени и время, спустя которое уровень воды понизится на 3/4 высоты котла. Вода из котла вытекает со скоростью $v = 0,6\sqrt{2gh}$, где $g = 10$ м/с^2; h — высота уровня воды над отверстием. (Скоростью истечения называется кол-во воды, вытекающей в единицу времени через отверстие единичной площади.)

24. Найти кривую, проходящую через точку (1, 1), у которой произведение абсциссы любой точки, принадлежащей кривой, на отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ox, равно удвоенному квадрату расстояния этой точки от начала координат.

25. Найти линию, проходящую через точку (2, 0) и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

26. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак

непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

27. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/сек, через 4 сек скорость ее 1 м/сек. Когда скорость уменьшится до 1 м/сек? Какой путь может пройти лодка до остановки?

28. Найти все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

29. Цилиндрический сосуд высотой H и радиуса R, наполненный жидкостью, имеет на дне отверстие площадью S. Скорость истечения жидкости из сосуда равна $S\cdot\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня жидкости в момент времени t, $g = 9,81$ м/сек^2 — ускорение силы тяжести. Найти время T, в течение которого жидкость вытечет из сосуда.

30. В резервуар, содержащий 20 л воды, непрерывно поступает со скоростью 3 л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,4 кг соли. Этот раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из резервуара с той же скоростью. Сколько соли будет содержать резервуар через 10 мин?

II. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1) а) $3(x^2y+y)\,dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0$;
   б) $xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y$;
   в) $y'=(x+6y-7)/(8x-y-7)$.
2) а) $y'=(3y-2x+1)/(3x+3)$;
   б) $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\,y\cdot y'=0$;
   в) $xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$.
3) а) $xy'=(3y^3+14yx^2)/(2y^2+7x^2)$;
   б) $y'=(x+y-4)/(x-2)$;
   в) $y(1+\ln y)+xy'=0$.
4) а) $\sqrt{1-x^2}\,y'+xy^2+x=0$;
   б) $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$;
   в) $y'=y/(2x+2y-2)$.
5) а) $y'=(2x+y-3)/(4x-4)$;
   б) $xy'=(3y^3+12yx^2)/(2y^2+6x^2)$;
   в) $y\ln y+xy'=0$.
6) а) $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$;
   б) $y'=(x+4y-5)/(6x-y-5)$;
   в) $xy'=3\sqrt{2x^2++y^2}+y$.

7) а) $xy' = (3y^3 + 10yx^2)/(2y^2 + 5x^2)$;
б) $\sqrt{4 - x^2}\, y' + xy^2 + x = 0$;
в) $y' = (3x + 2y - 1)/(x + 1)$.

8) а) $y' = (y - 2x + 3)/(x - 1)$;
б) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$;
в) $y'y\sqrt{(1 - x^2)/(1 - y^2)} + 1 = 0$.

9) а) $\sqrt{3 + y^2}\, dx - y\, dy = x^2 y\, dy$;
б) $y' = (4y - 8)/(3x + 2y - 7)$;
в) $xy' = (3y^3 + 8yx^2)/(2y^2 + 4x^2)$.

10) а) $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$;
б) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$;
в) $y' = (y + 2)/(2x + y - 4)$.

11) а) $y' = (6y - 6)/(5x + 4y - 9)$;
б) $20x\, dx - 3y\, dy = 3x^2 y\, dy - 5xy^2\, dx$;
в) $xy' = (3y^3 + 6yx^2)/(2y^2 + 3x^2)$.

12) а) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$;
б) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0$;
в) $y' = (2x + y - 1)/(2x - 2)$.

13) а) $y' = (x + 5y - 6)/(7x - y - 6)$;
б) $xy' = (3y^3 + 4xy^2)/(2y^2 + 2x^2)$;
в) $2x\, dx - y\, dy = yx^2\, dy - xy^2\, dx$.

14) а) $(1 + e^x)yy' = e^x$;
б) $y' = (2x + y - 3)/(2x - 2)$;
в) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

15) а) $xy' = (3y^3 + 2yx^2)/(2y^2 + x^2)$;
б) $\sqrt{5 + y^2}\, dx + 4(x^2 y + y)\, dy = 0$;
в) $y' = (x + y + 2)/(x + 1)$.

16) а) $y' = (5y + 5)/(4x + 3y - 1)$;
б) $y' = (x^2 + 2xy - 5y^2)/(2x^2 - 6xy)$;
в) $yy' = e^x/(1 + e^x)$.

17) а) $x\, dx - y\, dy = yx^2\, dy - xy^2\, dx$;
б) $y'(x - 1) = x + 2y - 3$;
в) $3x^2 y' = y^2 + 10yx - 10x^2$.

18) а) $y'(x^2 - 6xy) = x^2 + xy - 5y^2$;
б) $6x\, dx - 2y\, dy = 2yx^2\, dy - 3xy^2\, dx$;
в) $y'(5x - y - 4) = x + 3y - 4$.

19) а) $y' = (2x + 3y - 5)/(5x - 5)$;
б) $4x^2y' = y^2 + 10yx + 5x^2$;
в) $(1 + e^x)y' = ye^x$.

20) а) $6x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - 3xy^2\,dx$;
б) $y' = (x + 8y - 9)/(10x - y - 9)$;
в) $y' = (x^2 + xy - 3y^2)/(x^2 - 4xy)$.

21) а) $y' = y^2/x^2 + 8y/x + 12$;
б) $(e^x + 8)\,dy - ye^x\,dx = 0$;
в) $y'(4x - y - 3) = (x + 2y - 3)$.

22) а) $y' = (x + 3y + 4)/(3x - 6)$;
б) $y' = (x^2 + 3xy - y^2)/(3x^2 - 2xy)$;
в) $x\sqrt{4 + y^2}\,dx + y\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0$.

23) а) $2x\,dx - 2y\,dy = x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$;
б) $y' = (2x + y - 3)/(x - 1)$;
в) $2y' = y^2/x^2 + y/x + 8$.

24) а) $y(4 + e^x)\,dy - e^x\,dx = 0$;
б) $y' = (x^2 + 2xy - y^2)/(2x^2 - 2xy)$;
в) $y' = (2y - 2)/(x + y - 2)$.

25) а) $y' = y^2/x^2 + 6y/x + 6$;
б) $y'(2x - 2) = x + y - 2$;
в) $x\sqrt{5 + y^2}\,dx + y\sqrt{4 + x^2}\,dy = 0$.

26) а) $y' = (x - 2y + 3)/(-2x - 2)$;
б) $y' = (x^2 + xy - y^2)/(x^2 - 2xy)$;
в) $6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$.

27) а) $(e^{2x} + 5)\,dy + ye^{2x}\,dx = 0$;
б) $y' = (8y + 3)/(2x + y - 1)$;
в) $3y' = y^2/x^2 + 8y/x + 4$.

28) а) $y' = (x + 2y)/(2x - y)$;
б) $y' = (x + 7y - 8)/(9x - y - 8)$;
в) $x\sqrt{3 + y^2}\,dx + y\sqrt{2 + x^2}\,dy = 0$.

29) а) $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2\,dx$;
б) $y' = (x + y)/(x - y)$;
в) $y'(3x - y - 2) = (x + y - 2)$.

30) а) $y' = y^2/x^2 + 4y/x + 2$;
б) $y' = (3y - x - 4)/(3x + 3)$;
в) $\sqrt{4 + y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$.

III. Решить задачу Коши

1) а) $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1;$
б) $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$
2) а) $2(y' + xy) = (x-1)e^2y^2, \quad y(0) = 2;$
б) $y' - y/x = \ln x/x, \quad y(1) = 1.$
3) а) $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3;$
б) $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$
4) а) $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1;$
б) $y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1.$
5) а) $y' + xy = (x-1)e^xy^2, \quad y(0) = 1;$
б) $y' - 3x^2y = x^2(1+x^2)/3, \quad y(0) = 0.$
6) а) $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -0,5;$
б) $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}.$
7) а) $2y' + 3y\cos x = 12\cos x\, e^xy^{-1}, \quad y(0) = 2;$
б) $y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \quad y(0) = 0,5.$
8) а) $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x, \quad y(0) = 1;$
б) $y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$
9) а) $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3;$
б) $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = 0,5.$
10) а) $2y' + 3y\cos x = 3e^x\cos x\, y^{-1}, \quad y(0) = 1;$
б) $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$
11) а) $y' + y(1-2x)/x^2 = 1, \quad y(1) = 1;$
б) $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}.$
12) а) $y' + y/x = 3x, \quad y(1) = 1;$
б) $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1-x^3), \quad y(0) = -1.$
13) а) $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1;$
б) $y' - y/x = -12/x^3, \quad y(1) = 4.$
14) а) $y' + y/x = (x+1)e^x/x, \quad y(1) = e;$
б) $3xy' + 5y = (4x-5)y^4, \quad y(1) = 1.$
15) а) $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3;$
б) $y' + 2xy/(1+x^2) = 2x^2/(1+x^2), \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$
16) а) $y' + y/x = \sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi;$
б) $2xy' - 3y = -(20x^2+12)y^3, \quad y(1) = 1/2\sqrt{2}.$
17) а) $xy' + y = y^2\ln x, \quad y(1) = 1;$
б) $y' - y/(x+1) = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$
18) а) $y' + y\,\mathrm{tg}\, x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 0,5;$
б) $4y' + x^3y = (x^3+8)e^{-2x}y^2, \quad y(0) = 1.$

19) а) $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2;$
б) $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

20) а) $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0;$
б) $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1.$

21) а) $2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2;$
б) $y' + y \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0.$

22) а) $y' - y/(x + 2) = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 1,5;$
б) $y' + 2y \operatorname{ctg} x = y^2 \cos x, \quad y(1) = 2.$

23) а) $y' - y \operatorname{tg} x = -(2/3)y^4 \sin x, \quad y(0) = 1;$
б) $y' - y/x = x \sin x, \quad y(\pi/2) = 1.$

24) а) $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1;$
б) $y' + y/(2x) = x^2, \quad y(1) = 1.$

25) а) $2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2;$
б) $y' - (2x - 5)y/x^2 = 5, \quad y(2) = 4.$

26) а) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1;$
б) $y' - y/x = -2\ln x/x, \quad y(1) = 1.$

27) а) $y' + 2y/x = x^3, \quad y(1) = -5/6;$
б) $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$

28) а) $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), \quad y(0) = 1;$
б) $y' - 2xy/(1 + x^2) = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

29) а) $y' + 3y/x = 2/x^3, \quad y(1) = 1;$
б) $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2.$

30) а) $y' + xy/(2(1 - x^2)) = x/2, \quad y(0) = \dfrac{2}{3};$
б) $y' + 4x^3y = 4(x + 1)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1.$

IV. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3,$
2. $x^5y''' + x^4y'' = 1,$
3. $x^4y'' + x^3y' = 4,$
4. $xy''' + 2y'' = 0,$
5. $-xy''' + 2y'' = 2/x^2,$
6. $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y'',$
7. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y'',$
8. $x^3y''' + x^2y'' = 1,$
9. $\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + 1/\operatorname{ch} x = 0,$
10. $x^2y'' + xy' = 1,$
11. $y''7x = 7y'',$
12. $xy''' + y'' = x + 1,$
13. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1,$
14. $xy''' + y'' = 1,$
15. $\operatorname{tg} x \cdot y^{\mathrm{IV}} = y''',$
16. $xy''' - y'' + 1/x = 0,$
17. $\operatorname{cth} x \cdot y'' + y' = \operatorname{ch} x,$
18. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3,$
19. $xy''' + y'' = 1/\sqrt{x},$
20. $x^4y'' + x^3y' = 1,$
21. $(x + 1)y''' + y'' = (x + 1),$
22. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y'',$
23. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x},$
24. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0,$

25. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$,
26. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + 1/\sin x = 0$,
27. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$,
28. $2xy''' = y''$,
29. $xy''' + y'' + x = 0$,
30. $y''' \cdot x \cdot \ln x = y''$.

V. Решить задачу Коши:

1) $4y^3y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = 1/(2\sqrt{2})$;
2) $y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1,\ y'(1) = -1$;
3) $y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$;
4) $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 8$;
5) $y''y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 2$;
6) $y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$;
7) $y'' = 2\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 1$;
8) $y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = -2$;
9) $y'' = 8y^3, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;
10) $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5$;
11) $y^3y'' = 4(y^4 - 1), \quad y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$;
12) $y''y^3 + 9 = 0, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 3$;
13) $y'' = 18y^3, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 3$;
14) $y'' = 50\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 5$;
15) $y'' + 2\sin y \cos^3 y, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;
16) $y'' = 32\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 4$;
17) $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 7$;
18) $y''y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7,\ y'(3) = -1$;
19) $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}/2,\ y'(0) = 1/\sqrt{2}$;
20) $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;
21) $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1,\ y'(2) = 6$;
22) $y''y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 2$;
23) $y'' = 18\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 3$;
24) $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = 1/\sqrt{2}$;
25) $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1,\ y'(3) = 5$;
26) $y''y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5,\ y'(2) = -1$;
27) $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$;
28) $y'' = 8\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 2$;
29) $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1,\ y'(4) = 4$;
30) $y''y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 2$.

VI. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения:

1) $2y'' + 5y' = f(x)$, где $f(x) = 5x^2 - 1$; $f(x) = 5\cos x$.
2) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, где $f(x) = 3e^{2x}$; $f(x) = 3x + 5\sin 2x$.
3) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, где $f(x) = e^{x}(3 - 4x)$; $f(x) = \cos^2 x$.

4) $2y'' + 5y' = f(x)$, где $f(x) = e^x$; $f(x) = 30e^{-\frac{5}{2}x}$.
5) $y'' + y = f(x)$, где $f(x) = 2x^3 - x + 2$; $f(x) = -8\cos 3x$.
6) $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, где $f(x) = 2x^3 - 3x$; $f(x) = \sin x$.
7) $y'' + y' = f(x)$, где $f(x) = \cos x$; $f(x) = xe^{-x}$.
8) $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, где $f(x) = 5e^{5x}$; $f(x) = 13e^x \cos x$.
9) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$; $f(x) = 2x^3 - 30$.
10) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, где $f(x) = x + 1$; $f(x) = e^x/3$.
11) $2y'' + 5y' = f(x)$, где $f(x) = 30x^2 + 34x + 9$; $f(x) = 29x\sin x$.
12) $2y'' + 5y' = f(x)$, где $f(x) = e^{-2,5x}$; $f(x) = x\cos x$.
13) $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, где $f(x) = 8x^2$; $f(x) = \sin 2x$.
14) $2y'' + 5y' = f(x)$, где $f(x) = 65$; $f(x) = x\sin 2x$.
15) $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, где $f(x) = e^{2x}$; $f(x) = x\cos x$.
16) $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, где $f(x) = e^{2x}/2$; $f(x) = x^2 \sin x$.
17) $y'' + y = f(x)$, где $f(x) = x^3 + 6x$; $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 3x$.
18) $y'' - 4y' + 4 = f(x)$, где $f(x) = 2x + 1$; $f(x) = \sin 2x$.
19) $y'' + y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$; $f(x) = -2xe^{-x}$.
20) $y'' - 7y' + 6y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$; $f(x) = x^2 - 3x$.
21) $y'' - 5y' + 6y = f(x)$, где $f(x) = xe^{2x}$; $f(x) = e^x \sin x$.
22) $y'' - 7y' + 8y = f(x)$, где $f(x) = (10x+1)e^{6x}$; $f(x) = 15\sin 3x - 65\cos 3x$.
23) $y'' + y = f(x)$, где $f(x) = e^x$; $f(x) = x\cos x$.
24) $y'' + 6y' + 9y = f(x)$, где $f(x) = 5e^{-3x}$; $f(x) = x\sin x$.
25) $y'' - y = f(x)$, где $f(x) = 2e^x$; $f(x) = x\cos x$.
26) $y'' + 16y = f(x)$, где $f(x) = 16\cos 4x$; $f(x) = -xe^{4x}$.
27) $y'' + 49y = f(x)$, где $f(x) = 14\sin 7x + 7\cos 7x$; $f(x) = \sin x$.
28) $y'' + 9y = f(x)$, где $f(x) = -18x\sin 3x$; $f(x) = -e^{3x}$.
29) $y'' + 25y = f(x)$, где $f(x) = 20\cos 5x - 10\sin 5x$; $f(x) = 50xe^{5x}$.
30) $y'' + 36y = f(x)$, где $f(x) = 36\cos 6x$; $f(x) = -xe^{6x}$.

VII. Решите задачу Коши:

1) $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.
2) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
3) $y'' + 4y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4) $y'' - 5y' - 6y = e^{-x}(12x - 7)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
5) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
6) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$.
7) $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
8) $y'' - 2y' + y = 16e^x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
9) $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

10) $y'' - y = 2x$; $y(0) = 0$, $y(1) = -1$.
11) $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
12) $y'' + 9y = x + 0,5$; $y(0) = 1/18$; $y'(0) = 10/9$.
13) $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
14) $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
15) $y'' + y = 2x - \pi$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
16) $y'' + y' - 2y = -3e^{-2x}$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$.
17) $y'' + 2y' - 3y = x\cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
18) $y'' - 5y' + 4y = e^{4x}$; $y(0) = \ln 2$, $y'(0) = 1 - \ln 3$.
19) $y'' - 64y = 128\cos 8x$; $y(\pi) = \dfrac{1}{2}$, $y'(\pi) = 1$.
20) $y'' - 5y' + 4y = e^{4x}$; $y(0) = \ln 2$, $y'(0) = 0$.
21) $y'' + y = (10x + 7)e^{2x}$; $y(1) = \ln 2$, $y'(1) = 1 - \ln 3$.
22) $y'' - 49y = 14e^{7x}$; $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$.
23) $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -1$.
24) $y'' - 25y = 25(\sin 5x + \cos 5x)$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.
25) $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x$; $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -2$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.
26) $y'' + 4y' + 3y = 4(1 - x)e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
27) $y'' - 5y' = 25e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
28) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$; $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.
29) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
30) $y'' + y = e^x \sin 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

VIII. Найдите решения дифференциального уравнения:

1) а) $y'' + 25y = 50e^{5x}$;
   б) $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$;
   в) $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$.
2) а) $y'' + 81y = 162e^{9x}$;
   б) $y^{(\mathrm{V})} + y''' = x^2 - 1$;
   в) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$.
3) а) $y'' - 6y' + 9y = 4xe^x$;
   б) $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$;
   в) $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x}/(1 + e^{-3x})$.
4) а) $y''' - y' = 3(2 - x^2)$;
   б) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$;
   в) $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$.

5) а) $y'' - 2y' + y = (2x+5)e^{2x}$;
б) $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$;
в) $y'' + 16y = 16/\sin 4x$.

6) а) $y'' + 2y' + y = (18x+21)e^{2x}$;
б) $y^{(\mathrm{IV})} - y = x^2 e^x$;
в) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

7) а) $y'' - 4y' + 3y = -4xe^x$;
б) $y^{(\mathrm{IV})} + 8y'' + 16y = \cos 2x$;
в) $y'' - 6y' + 8y = 4/(1+e^{-2x})$.

8) а) $y'' - y' = e^{2x}\cos x$;
б) $y^{(\mathrm{IV})} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x^2$;
в) $y'' + \dfrac{1}{\pi^2}\,y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos \dfrac{x}{\pi}}$.

9) а) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$;
б) $y^{(\mathrm{IV})} + y''' = 12x + 6$;
в) $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$.

10) а) $y'' - 2y' - 3y = (8x-14)e^{-x}$;
б) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;
в) $y'' - 6y' + 8y = 4/(2+e^{-x})$.

11) а) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$;
б) $y^{(\mathrm{IV})} + y''' = x$;
в) $y'' + y' = 4\,\mathrm{ctg}\,x$.

12) а) $y'' + 3y' + 2y = (1-2x)e^{-x}$;
б) $y^{(\mathrm{IV})} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$;
в) $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}$.

13) а) $y'' + 2y' - 3y = (8x+6)e^x$;
б) $y''' - 36y' = -72(\cos 6x + \sin 6x)$;
в) $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1+e^{-2x})$.

14) а) $y'' - 3y' + 2y = (1-2x)e^x$;
б) $y''' + 5y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$;
в) $y'' + 9y = 9/\cos 3x$.

15) а) $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$;
б) $y^{(\mathrm{IV})} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$;
в) $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1+e^{-2x})$.

16) а) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$;
б) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$;
в) $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x})$.

17) а) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$;
б) $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$;
в) $y'' + 16y = 16/\cos 4x$.

18) а) $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(3\sin x + 5\cos x)$;
б) $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$;
в) $y'' + 9y = 9/\sin 3x$.

19) а) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}$;
б) $y''' + 2y' = 6e^{x}(\sin x + \cos x)$;
в) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^{x})$.

20) а) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$;
б) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;
в) $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

21) а) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$;
б) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^{x}$;
в) $y'' + 4y = 4/\cos 2x$.

22) а) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$;
б) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^{x}$;
в) $y'' + y' = e^{x}/(2 + e^{x})$.

23) а) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$;
б) $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^{x}$;
в) $y'' + 9y = 9/\sin 3x$.

24) а) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;
б) $y^{\mathrm{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$;
в) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}/(1 + e^{-x})$.

25) а) $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(2\sin x - \cos x)$;
б) $y^{\mathrm{IV}} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$;
в) $y'' + y = 2\,\mathrm{ctg}\, x$.

26) а) $y'' + 2y' = 3e^{x}(\sin x + \cos x)$;
б) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^{x}$;
в) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

27) а) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$;
б) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x - 32)$;
в) $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x})$.

28) а) $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$;
б) $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$;
в) $y'' + y' = \dfrac{e^x}{2 + e^x}$.

29) а) $y'' + 2y' + y = 4x^2$;
б) $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$;
в) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

30) а) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$;
б) $y''' - 100y' = 20e^{10x}$;
в) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$.

IX. Найти общее решение системы уравнений $\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt};\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}\right)$**.**

1. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = -4x. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$
11. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y \\ \dot{y} = 4x + 5y. \end{cases}$
12. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x. \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$
14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$
15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 6x - y. \end{cases}$
16. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y \\ \dot{y} = -2x - 8y. \end{cases}$
17. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$
18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$
19. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 5x + 6y. \end{cases}$
20. $\begin{cases} \dot{y} + 2x - 3y = 0 \\ \dot{x} + x + 4y = 0. \end{cases}$
21. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} + 2x - 3y = 0 \\ 2\dot{x} - 3\dot{y} + x - 2y = 0. \end{cases}$
22. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 1 \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$
23. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$
24. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$
25. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$
26. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$
27. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$
28. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$
29. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$
30. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$