МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А. В. Самохин, Л. Д. Жулёва,
В. Н. Шевелёва, Ю .И. Дементьев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Часть IV

Интегралы
Дифференциальные уравнения

для студентов I, II курса
всех специальностей
дневного обучения

Москва – 2005

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра высшей математики

А. В. Самохин, Л. Д. Жулёва,
В. Н. Шевелёва, Ю .И. Дементьев

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Часть IV

Интегралы
Дифференциальные уравнения

для студентов I, II курса
всех специальностей
дневного обучения

Москва – 2005

Оглавление

Предисловие

Сборник состоит из двух глав, ответов к заданиям и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы, содержащие краткое изложение теории и примеры решения типовых задач. В конце параграфов представлены задачи для самостоятельного решения, ответы к которым находятся в конце сборника.

Первая глава посвящена интегральному исчислению функции одной переменной. Приводятся определения, свойства и методы интегрирования функций, показываются приложения определенного интеграла, а также понятие несобственного интеграла. Во второй главе рассматриваются дифференциальные уравнения. Показаны основные методы интегрирования наиболее важных для приложений типов дифференциальных уравнений.

В конце сборника приведен список использованной и рекомендуемой литературы.

ГЛАВА I

Интегральное исчисление функции одной переменной

§1. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла

1.1. Общие понятия

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на (a,b), если для любого $x \in (a,b)$ $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $\sin(5x-1)$ есть первообразная для функции $5\cos(5x-1)$ на всей числовой прямой, так как $(\sin(5x-1))' = 5\cos(5x-1)$.

Если функция $f(x)$ имеет на (a,b) первообразную $F_0(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ на (a,b) совпадает с множеством функций $F(x) = F_0(x) + C$, где C — любая постоянная.

Определение 2. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на (a,b) называется множество всех первообразных $F(x)$ (если они существуют) функции $f(x)$ на (a,b). Неопределенный интеграл от $f(x)$ на (a,b) обозначается символом $\int f(x)\,dx$; $f(x)$ называется при этом подынтегральной функцией.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$. Поэтому

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Пример 3. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Первообразной $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0,+\infty)$ является функция $F(x) = \ln x$, а на промежутке $(-\infty;0)$ функция $F(x) = \ln(-x)$. Таким образом, функция $F(x) = \ln|x|$ есть первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем 0. Поэтому

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла.

1) $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$;

2) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

3) $\int df(x) = \int f'(x)\, dx$.

Основные правила вычисления неопределенных интегралов.

1) Пусть на (a, b) существуют неопределенные интегралы $\int g(x)\, dx$ и $\int f(x)\, dx$. Тогда для любых α и β на (a, b) справедлива формула:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

2) Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$ на промежутке (a, b). Тогда справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx$$

или

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

3) Пусть на $(\alpha; \beta)$ существует неопределенный интеграл $\int f(t)\, dt = F(t) + C$. Пусть функция $t = u(x)$ имеет непрерывную производную $u'(x)$ на (a, b) и $u((a, b)) \subset (\alpha, \beta)$. Тогда на (a, b) справедливо равенство:

$$\int f(u(x))u'(x)\, dx = \int f(u(x))\, du(x) = F(u(x)) + C \left(= \int f(t)\, dt \right).$$

4) Пусть строго монотонная функция $x = \omega(t)$ имеет непрерывную производную $\omega'(t)$ на (α, β) и $\omega(t) : (\alpha; \beta) \to (a, b)$. Пусть функция $f(x)$ определена на (a, b) и существует неопределенный интеграл

$$\int f(\omega(t))\omega'(t)\, dt = \int g(t)\, dt = G(t) + C.$$

Тогда на (a, b) имеем:

$$\int f(x)\, dx = \int f(\omega(t))\, d\omega(t) = \int f(\omega(t))\omega'(t)\, dt = G(t) + C = G(v(x)) + C,$$

где $t = v(x)$ — функция, обратная к функции $x = \omega(t)$.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1) $\int 0 \cdot dx = C$;
2) $\int 1\, dx = x + C$;
3) $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;
4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$;
5) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$, $\int e^x\, dx = e^x + C$;
6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;
7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots\right)$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n;\ n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots);$
10) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$
11) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0;\ |x| \neq |a|);$
12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0;\ |x| < |a|);$
13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C \quad (k \neq 0,$ в случае $k < 0\ |x| > |k|);$
14) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$
15) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$
16) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$
17) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C; \quad (x \neq 0).$

Таблица основных дифференциалов.

1) $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b) \quad (a \neq 0);$
2) $x^p\,dx = \frac{dx^{p+1}}{p+1} \quad (p \neq -1);$
3) $\frac{dx}{x} = d(\ln|x|) \quad (x \neq 0);$
4) $\sin x\,dx = -d\cos x;$
5) $\cos x\,dx = d\sin x;$
6) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg} x;$
7) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\operatorname{ctg} x;$
8) $a^x\,dx = \frac{da^x}{\ln a}; \quad e^x\,dx = de^x;$
9) $\operatorname{sh} x\,dx = d\operatorname{ch} x;$
10) $\operatorname{ch} x\,dx = d\operatorname{sh} x;$
11) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x = -d\arccos x;$
12) $\frac{dx}{1+x^2} = d\operatorname{arctg} x = -d\operatorname{arcctg} x.$

1.2. Интегрирование путем замены переменных

Один из наиболее распространенных методов, применяемых при вычислении неопределенных интегралов — метод замены переменных. В его основе лежат правила 3 и 4, сформулированные в предыдущем пункте. Метод подстановки состоит в том, что сообразно виду подынтегральной функции составляют вспомогательную функцию, подстановка которой в исходный интеграл приводит его к виду, более удобному для интегрирования.

Выделяются две формы подстановки.

I. Пусть требуется вычислить интеграл $\int g(x)\,dx$. Согласно правилу 3 выберем, если это удается, такую функцию $u(x)$, что подынтегральное выражение представляется в виде:

$$\int g(x)\,dx = \int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x).$$

Тогда, делая замену переменных $t = u(x)$, по сказанному выше, достаточно найти интеграл

$$\int f(t)\,dt, \quad t = u(x).$$

Изложенный метод применяется при вычислении интегралов вида:

1) $\int f(ax+b)\,dx$,

делая замену $t = ax + b$, получим:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt;$$

2) $\int f(\sin x)\cos x\,dx$,

делая замену $t = \sin x$, получим:

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(\sin x)d\sin x = \int f(t)\,dt;$$

3) $\int f(\cos x)\sin x\,dx$,

делая замену $t = \cos x$, получим:

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(\cos x)\,d\cos x = -\int f(t)\,dt;$$

4) $\int f(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$,

делая замену $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$\int f(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\operatorname{tg} x)\,d\operatorname{tg} x = \int f(t)\,dt;$$

5) $\int (\ln x)\frac{1}{x}\,dx$,

делая замену $t = \ln x$, получим:

$$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln(x))\,d\ln x = \int f(t)\,dt;$$

6) $\int f(e^x)e^x\,dx$,

делая замену $t = e^x$, получим:

$$\int f(e^x)e^x\,dx = \int f(e^x)\,de^x = \int f(t)\,dt;$$

7) $\int (ax^2+b)^p x\,dx$,

делая замену $t = ax^2 + b$, получим:

$$\int (ax^2+b)^p x\,dx = \frac{1}{2}\int (ax^2+b)^p\,dx^2 = \frac{1}{2a}\int (ax^2+b)^p\,d(ax^2+b) = \frac{1}{2a}\int t^p\,dt.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+2)}{\sqrt{5x+2}} = \\ = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{5}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{2}{5}\,t^{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x+2} + C.$$

Пример 5.

$$\int \sin(3x-4)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x-4)\,d(3x-4) = \\ = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\,\cos t + C = -\frac{1}{3}\,\cos(3x-4) + C.$$

Пример 6.

$$\int \frac{dx}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-6)}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln|2x-6| + C.$$

Пример 7.

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d\sin x = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Пример 8.

$$\int \frac{\sin x}{4-\cos x}\,dx = \int \frac{d(-\cos x)}{4-\cos x} = \int \frac{d(-\cos x+4)}{4-\cos x} = \\ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|4-\cos x| + C.$$

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{\sin x\,\cos x} = \int \frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \\ = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,d\ln x = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\,\ln^2 x + C.$$

Пример 11.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,d2x = \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln(e^{2x}+1) + C.$$

Пример 12.

$$\int \frac{x\,dx}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{5x^2-3} = \frac{1}{2\cdot 5}\int \frac{d(5x^2-3)}{5x^2-3} = \\ = \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10}\,\ln|t| + C = \frac{1}{10}\,\ln|5x^2-3| + C.$$

II. Применяя вторую форму подстановки, пользуются правилом 4. В подынтегральное выражение непосредственно подставляют вместо x функцию $x = \omega(t)$, а именно:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\omega(t))\,d\omega(t) = \int f(\omega(t))\omega'(t)\,dt = \int g(t)\,dt,$$

где $g(t)$ — более удобная для интегрирования функция, чем $f(x)$. При этом на функцию $\omega(t)$ накладываются условия строгой монотонности, что обеспечивает существование обратной функции $t = v(x)$ и представление:

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt = G(t) + C = G(v(x)) + C.$$

Пример 13.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(4+\sqrt[3]{x})}.$$

Применяя подстановку $x = t^6$, получим $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = dt^6 = 6t^5\,dt$ и

$$\int \frac{6t^5\,dt}{t^3(4+t^2)} = 6\int \frac{t^2}{4+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt = \\ = 6\int \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)\,dt = 6\int dt - 24\int \frac{dt}{t^2+4} = \\ = 6t - 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} + 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

Пример 14.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Применяя подстановку $x = 3\sin t$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $t = \arcsin\frac{x}{3}$, $dx = d(3\sin t) = 3\cos t\,dt$, получим

$$\int \sqrt{9 - 9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt = \int \sqrt{9\cos^2 t}\,3\cos t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt =$$
$$= 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) = \frac{9}{2}\,t + \frac{9}{4}\,\sin 2t + C =$$
$$= \frac{9}{2}\,\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\,\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) + C.$$

Преобразуем отдельно выражение $\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\right)$, для этого воспользуемся формулой:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)} =$$
$$= 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{2}{9}\,x\cdot\sqrt{9-x^2}.$$

Отсюда окончательно получим:

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{2}\,\arcsin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\,x\cdot\sqrt{9-x^2} + C.$$

1.3. Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$ на промежутке (a, b), тогда справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \tag{1}$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Необходимо заметить, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, так как и правая часть формулы (1) содержит интеграл. Однако при правильном применении метода интеграл из правой части (1) будет табличным или легко сводящимся к табличному. При вычислении некоторых интегралов метод интегрирования по частям может применяться несколько раз. Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin ax\,dx, \quad \int x^k \cos ax\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx,$$
$$\int x^k \arcsin ax\,dx, \quad \int x^k \arccos ax\,dx, \quad \int x^k \operatorname{arctg} ax\,dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

I. При интегрировании функций вида $P_m(x)\sin ax$, $P_m(x)\cos ax$, $P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ произвольный многочлен степени m, в качестве функции $u(x)$ из формулы (1) берется многочлен $P_m(x)$, а в качестве $v'(x)$ другой сомножитель.

Пример 15. $\int x\cdot\sin 3x\,dx$. Пусть $u(x)=x$, $v'(x)=\sin 3x$, тогда

$$dv = \sin 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3}\,d3x = -\frac{1}{3}\,d\cos 3x.$$
$$\int x\cdot\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\int x\,d\cos 3x = -\frac{1}{3}\left(x\cdot\cos 3x - \int\cos 3x\,dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\int\cos 3x\,dx = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\int\cos 3x\,d3x =$$
$$= -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\,\sin 3x + C.$$

Пример 16. $\int xe^{-4x}\,dx$. Пусть $u(x)=x$, $v'(x)=e^{-4x}$, тогда

$$v'(x)\,dx = dv(x) = e^{-4x}\,dx = -\frac{e^{-4x}}{4}\,d(-4x) = -\frac{1}{4}\,de^{-4x}.$$
$$\int xe^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\int x\,de^{-4x} = -\frac{1}{4}\left(x\cdot e^{-4x} - \int e^{-4x}\,dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} - \frac{1}{16}\int e^{-4x}\,d(-4x) =$$
$$= -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} - \frac{1}{16}\,e^{-4x} + C.$$

Как было сказано выше, при вычислении интегралов формула интегрирования по частям может применяться несколько раз.

Пример 17. $\int x^2 \cdot \cos 2x\,dx$. Пусть $u(x) = x^2$, $v'(x) = \cos 2x$, тогда

$$v'(x)\,dx = dv(x) = \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,\cos 2x\,d2x = \frac{1}{2}\,d\sin 2x.$$

$$\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,d\sin 2x = \frac{1}{2}\,\left(x^2\sin 2x - \int \sin 2x\,dx^2\right). \qquad (2)$$

Так как $dx^2 = 2x\,dx$, то в последнем интеграле получим

$$\int \sin 2x\,dx^2 = \int (\sin 2x)\cdot 2x\,dx.$$

Полагая $u(x) = 2x$, $v'(x) = \sin 2x$; $v'(x)\,dx = \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\,d2x = -\frac{1}{2}\,d\cos 2x$, имеем

$$\int (\sin 2x)\cdot 2x\,dx = \int 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\,d\cos 2x = -\int x\,d\cos 2x =$$
$$= -\left(x\cos 2x - \int \cos 2x\,dx\right) = -x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x =$$
$$= -x\cos 2x + \frac{1}{2}\,\sin 2x + C.$$

Окончательно, подставляя последний результат в (2), получим

$$\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,\left(x^2\cdot\sin 2x + x\cos 2x - \frac{1}{2}\,\sin 2x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\,x^2\sin 2x + \frac{1}{2}\,x\cos 2x - \frac{1}{4}\,\sin 2x + C.$$

II. При интегрировании функций вида: $P_m(x)\arcsin ax$, $P_m(x)\arccos ax$, $P_m(x)\,\mathrm{arctg}\,ax$, $P_m(x)\ln ax$ в качестве $v'(x)$ выбирается многочлен $P_m(x)$, а в качестве $u(x)$ оставшаяся функция.

Пример 18. $\int x\ln x\,dx$. Пусть $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, тогда

$$v'(x)\,dx = x\,dx = \frac{1}{2}\,dx^2.$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2 = \frac{1}{2}\,\left(x^2\ln x - \int x^2\,d\ln x\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\left(x^2\ln x - \int x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\,\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right) + C =$$
$$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 19. $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$. Пусть $u(x) = \operatorname{arctg} 2x$, $v'(x) = x$, тогда

$$\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} 2x\, dx^2 = \frac{1}{2}\Bigg(x^2 \cdot \operatorname{arctg} 2x -$$

$$-\int x^2\, d\operatorname{arctg} 2x\Bigg) = \frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x^2}{1+(2x)^2}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2}\int \frac{4x^2+1}{4x^2+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx\right) =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} 2x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\int \frac{d2x}{(2x)^2+1} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} 2x}{2} - \frac{1}{4}x +$$

$$+ \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C.$$

III. При интегрировании функций $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\sqrt{ax^2+b}$ интегрирование по частям применяется два раза. Вычисление интеграла сводится к решению алгебраического уравнения первой степени.

Пример 20.

$$\int e^x \cos x\, dx = \int \cos x\, de^x = e^x \cos x - \int e^x\, d\cos x =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x + \int \sin x\, de^x =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x\, d\sin x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Обозначим через $I = \int e^x \cos x\, dx$. Перепишем последнее равенство в виде:

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

решая это уравнение, получим

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x,$$

$$I = \frac{1}{2}\,(e^x \cos x + e^x \sin x),$$

отсюда имеем:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}\,(\cos x + \sin x) + C.$$

Замечание. При интегрировании функций вида $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$ интегрирование по частям применяется два раза, причем в обоих случаях в качестве множителя $u(x)$ берется функция одного и того же типа: показательная или тригонометрическая.

Пример 21.

$$\int \sqrt{7-x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{7-x^2} - \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{(-2x)}{\sqrt{7-x^2}}\,dx = x\cdot\sqrt{7-x^2}+$$
$$+\int \frac{x^2}{\sqrt{7-x^2}}\,dx = x\sqrt{7-x^2} - \int\frac{7-x^2}{\sqrt{7-x^2}}\,dx + \int\frac{7}{\sqrt{7-x^2}}\,dx =$$
$$= x\cdot\sqrt{7-x^2} - \int\sqrt{7-x^2}\,dx + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}.$$

Обозначим через $I = \int\sqrt{7-x^2}\,dx$. Перепишем последнее равенство в виде:

$$I = x\sqrt{7-x^2} + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} - I \quad \text{или} \quad 2I = x\sqrt{7-x^2} + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}},$$
$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{7-x^2} + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}\right), \text{ отсюда имеем:}$$
$$\int\sqrt{7-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{7-x^2} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C.$$

1.4. Интегрирование рациональных функций

Сначала остановимся на интегрировании так называемых простых дробей. Это дроби следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^m},$$
$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}, \quad (m=2,3,\ldots).$$

Интегрирование дробей вида I и II известно:

$$\text{I. } \int\frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$
$$\text{II. } \int\frac{A}{(x-a)^m}\,dx = -\frac{A}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

При интегрировании дробей III и IV в выражении, стоящем в знаменателе, выделяется полный квадрат

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + k.$$

Тогда интеграл от дроби III запишется в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx =$$
$$= \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx + \int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx = \int \frac{At}{t^2+k}\,dt + \int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{t^2+k}\,dt,$$

где $t = x+\frac{p}{2}$.

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой $u = t^2+k$, а именно:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+k} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+k)}{t^2+k} = \frac{1}{2}\ln|t^2+k| + C.$$

Второй интеграл $\int \frac{dt}{t^2+k}$ является табличным.

При интегрировании дроби IV аналогично III получим:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{Ax+B\,dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k\right)^m} = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k\right)^m}\,dx =$$
$$= A\int \frac{t\,dt}{(t^2+k)^m} + \left(B - A\cdot\frac{p}{2}\right)\cdot\int \frac{dt}{(t^2+k)^m}.$$

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой $u = t^2+k$, а именно:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+k)}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^m} =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{u^{m-1}} + C = -\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+k)^{m-1}} + C.$$

Второй интеграл вычисляется методом понижения. Пусть $I_m = \int \frac{dt}{(t^2+k)^m}$, тогда $I_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+k)^{m-1}}$.

Рассмотрим интеграл I_m:

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{k}\int \frac{k}{(t^2+k)^m}\,dt = \frac{1}{k}\int \frac{k+t^2-t^2}{(t^2+k)^m}\,dt =$$
$$= \frac{1}{k}\cdot\left(\int \frac{k+t^2}{(t^2+k)^m}\,dt - \int \frac{t^2}{(t^2+k)^m}\,dt\right) =$$
$$= \frac{1}{k}\left(\int \frac{dt}{(t^2+k)^{m-1}} - \int t\cdot\frac{t\,dt}{(t^2+k)^m}\right) = \frac{1}{k}\cdot\left(I_{m-1} - \frac{1}{2}\int t\frac{d(t^2+k)}{(t^2+k)^m}\right).$$

Последний интеграл вычисляется методом интегрирования по частям:

$$\int t\frac{d(t^2+k)}{(t^2+k)^m} = -\frac{1}{m-1}\int t\,d(t^2+k)^{1-m} =$$
$$= -\frac{1}{m-1}\left(\frac{t}{(t^2+k)^{m-1}} - \int\frac{dt}{(t^2+k)^{m-1}}\right) = \frac{1}{m-1}\left(\frac{t}{(t^2+k)^{m-1}} - I_{m-1}\right).$$

Отсюда имеем, что

$$I_m = \frac{1}{k}\left(I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+k)^{m-1}} - \frac{I_{m-1}}{2(m-1)}\right).$$

Последняя формула сводит вычисление I_m к вычислению I_{m-1}. Зная интеграл (см. таблицу интегралов) $I_1 = \int\frac{dt}{t^2+k}$, найдем $I_2 = \int\frac{dt}{(t^2+k)^2}$ и так далее до интеграла I_m.

Пример 22.

$$\int\frac{2x+5}{x^2+4x-3}\,dx = \int\frac{2x+5}{(x+2)^2-7}\,dx = \int\frac{2(x+2-2)+5}{(x+2)^2-7}\,dx =$$
$$= \int\frac{2\cdot(x+2)}{(x+2)^2-7}\,d(x+2) + \int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2-7} =$$
$$= 2\int\frac{t\,dt}{t^2-7} + \int\frac{dt}{t^2-7} = \int\frac{d(t^2-7)}{t^2-7} + \int\frac{dt}{t^2-7} =$$
$$= \ln|t^2-7| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-t}{\sqrt{7}+t}\right| + C = \ln|x^2+4x-3| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-2-x}{\sqrt{7}+2+x}\right| + C.$$

Пример 23.

$$\int\frac{2x+5}{(x^2+4x-3)^2}\,dx = \int\frac{2x+5}{((x+2)^2-7)^2}\,dx = 2\int\frac{x+2}{((x+2)^2-7)^2}\,d(x+2) +$$
$$+ \int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2-7)^2} = 2\int\frac{t\,dt}{(t^2-7)^2} + \int\frac{dt}{(t^2-7)^2} =$$
$$= \int\frac{d(t^2-7)}{(t^2-7)^2} + \int\frac{dt}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{t^2-7} + \int\frac{dt}{(t^2-7)^2},$$

вычислим отдельно последний интеграл:

$$\int \frac{dt}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{7}\int \frac{(-7)\,dt}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{7}\int \frac{t^2-7-t^2}{(t^2-7)^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{t^2-7}{(t^2-7)^2}\,dt + \frac{1}{7}\int \frac{t^2}{(t^2-7)^2}\,dt = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{(t^2-7)} +$$

$$+\frac{1}{14}\int t\frac{d(t^2-7)}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t^2-7} - \frac{1}{14}\int t\, d\frac{1}{t^2-7} =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t^2-7} - \frac{1}{14}\left(t\cdot\frac{1}{t^2-7} - \int \frac{dt}{t^2-7}\right) =$$

$$= -\frac{1}{14}\int \frac{dt}{t^2-7} - \frac{1}{14}\,\frac{t}{t^2-7} = \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{7}+t}{\sqrt{7}-t}\right| - \frac{1}{14}\,\frac{t}{t^2-7} + C.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+4x-3)^2}\,dx = -\frac{1}{t^2-7} + \frac{1}{28\sqrt{7}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{7}+t}{\sqrt{7}-t}\right| - \frac{1}{14}\,\frac{t}{t^2-7} + C =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x-3} + \frac{1}{28\sqrt{7}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{7}+2+x}{\sqrt{7}-2-x}\right| - \frac{1}{14}\,\frac{x+2}{x^2+4x-3} + C.$$

Прежде чем перейти к общему случаю интегрирования правильных дробей, сформулируем одну из теорем алгебры, имеющую фундаментальное значение в теории интегрирования рациональных дробей: *каждая правильная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.*

Разложение правильной дроби на простые тесно связано с разложением многочлена $Q(x)$ на множители. Как известно, каждый целый многочлен с вещественными коэффициентами разлагается на вещественные множители типа $(x-a)$ и (x^2+px+q). В схематическом виде разложение многочлена $Q(x)$ можно записать в виде: $Q(x)=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^m$. Покажем, как, с учетом разложения $Q(x)$, правильная дробь раскладывается на простые:

1. Если множитель $(x-a)$ входит в разложение $Q(x)$ только в первой степени, мы поставим ему в соответствие единственную простую дробь:

$$(x-a)\to\frac{A}{x-a}.$$

2. Если в разложение $Q(x)$ входит множитель $(x-a)^k$, то есть показатель

степени $k > 1$, то ему соответствует сумма из k простых дробей

$$(x-a)^k \to \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

3. Если в разложение $Q(x)$ входит множитель x^2+px+q только в первой степени, то в соответствие ему ставится единственная простая дробь:

$$x^2+px+q \to \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

4. Если в разложение $Q(x)$ входит множитель $(x^2+px+q)^k$, показатель которого $k > 1$, то ему соответствует сумма из k простых дробей

$$(x^2+px+q)^k \to \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A, M, N используют *метод неопределенных коэффициентов*. Зная форму разложения $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простые дроби, пишут его с буквенными коэффициентами справа. Приводят дроби к одному знаменателю $Q(x)$ и приравнивают многочлены, стоящие в числителях справа и слева. Затем, приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях, находят неизвестные буквенные коэффициенты.

Пример 24. Разложить дробь $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ на простые.

Представим дробь в виде:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определим, исходя из тождества:

$$2x^2+2x+13 = A\cdot(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2),$$

отсюда получим:

$$2x^2+2x+13 = (A+B)\cdot x^4 + (C-2B)\cdot x^3 + (2A+B-2C+D)\cdot x^2 + \\ + (C-2B+E-2D)\cdot x + A - 2C - 2E.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, придем к системе из пяти уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2B+C=0, \\ 2A+B-2C+D=2, \\ -2B+C-2D+E=2, \\ A-2C-2E=13, \end{cases}$$

откуда

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-2, \quad D=-3, \quad E=-4.$$

Окончательно:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Для того чтобы проинтегрировать правильную дробь, ее раскладывают на сумму простых дробей, а затем интегрируют каждую простую дробь отдельно и их результаты складывают.

Пример 25.

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

Здесь мы воспользовались разложением из примера 24.

1.5. Интегрирование иррациональных выражений

Выше мы научились интегрировать рациональные функции. Здесь рассматривается метод рационализации для интегрирования иррациональных выражений. А именно, ищется подстановка $t = t(x)$, которая привела бы иррациональное выражение к рациональному виду. Здесь и дальше будем полагать, что $R(x, y, z, \ldots)$ — рациональная функция от своих аргументов.

I. Интегрирование выражений вида:

$$\int R\left(x; \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+p}}\right)\,dx,$$

где m — натуральное число, a, b, c, p — постоянные. Положим:

$$t = t(x) = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+p}}, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+p}, \quad x = \varphi(t) = \frac{p\cdot t^m - b}{a - ct^m}, \quad dx = \varphi'(t)\,dt.$$

Интеграл перепишется в виде:

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)\,dt.$$

Вычислив полученный интеграл, вернемся к старой переменной $t = t(x)$.

Пример 26.

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$$

Полагаем $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$, тогда

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \int \frac{-3\,dt}{t^3-1} = \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

II. Интегрирование выражений вида:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx. \tag{3}$$

1) Пусть $a > 0$, тогда интеграл (3) перепишется в виде

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx.$$

Так же, как и в случае интегрирования рациональной функции, выделим полный квадрат в квадратном трехчлене, стоящем в знаменателе (см. пункт 1.4):

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Ax+B}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{B - A\cdot\frac{p}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{At}{\sqrt{t^2+k}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{\sqrt{t^2+k}}\,dt,$$

где $t = x + \frac{p}{2}$.

Первый интеграл вычисляется подстановкой $u = t^2 + k$

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+k)}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = u^{1/2} + C = (t^2+k)^{1/2} + C.$$

Второй интеграл $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}}$ является табличным.

2) Пусть $a<0$, тогда интеграл (3) перепишется в виде

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{-a}\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}\,x-\frac{c}{a}}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{Ax+B\,dx}{\sqrt{-x^2-px-q}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{Ax+B}{\sqrt{-(x^2+px+q)}}\,dx.$$

Дальше, выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене и применяя замену $t=x+\frac{p}{2}$, так же как и в предыдущем случае вычисляем полученный интеграл.

Пример 27.

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{5x-1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx = \int \frac{5(x+1-1)-1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx = \\ = \int \frac{5t-6}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = 5\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} - 6\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \\ = \frac{5}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} - 6\cdot\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C = \\ = \frac{5}{2}\cdot 2(t^2+1)^{1/2} - 6\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C = 5\cdot(x^2+2x+2)^{1/2} - \\ - 6\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|+C.$$

Пример 28.

$$\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx = \int \frac{5x+11}{\sqrt{-(x^2-6x+5)}}\,dx = \\ = \int \frac{5x+11}{\sqrt{-((x-3)^2-4)}}\,dx = \int \frac{5(x-3+3)+11}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,dx = \\ = \int \frac{5t+26}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = 5\int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt + 26\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \\ = \frac{5}{2}\int \frac{dt^2}{\sqrt{4-t^2}} + 26\arcsin\frac{t}{2} + C = -\frac{5}{2}\int \frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} + \\ + 26\arcsin\frac{t}{2} + C = -5\sqrt{4-t^2} + 26\arcsin\frac{t}{2} + C = \\ = -5\sqrt{6x-x^2-5} + 26\arcsin\frac{x-3}{2} + C.$$

III. Интегрирование выражений вида:

$$\int (Ax+B)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

При интегрировании этих функций используются интегралы

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(x\cdot\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|)+C,$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\left(x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C,$$

которые вычисляются методом интегрирования по частям (см. пункт 1.3).

Для вычисления интегралов $\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ в квадратном трехчлене выделяется полный квадрат, а затем, аналогично случаю II, все сводится к вычислению интегралов вида $\int t\sqrt{k\pm t^2}\,dt$ и $\int\sqrt{k\pm t^2}\,dt$. Первый из полученных интегралов вычисляем:

$$\int t\sqrt{k\pm t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\sqrt{k\pm t^2}\,dt^2 = \pm\frac{1}{2}\int\sqrt{k\pm t^2}\,d(k\pm t^2) =$$
$$= \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,(k\pm t^2)^{3/2} = \pm\frac{1}{3}\,(k\pm t^2)^{3/2}+C.$$

Значение второго интеграла см. выше.

Пример 29.

$$\int (2x-1)\sqrt{3x-x^2}\,dx = \int (2x-1)\sqrt{-(x^2-3x)}\,dx =$$
$$= \int (2x-1)\sqrt{-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)}\,dx =$$
$$= \int\left(2\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)-1\right)\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,dx = \int(2t+2)\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt =$$
$$= 2\int t\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt + 2\int\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt = \int\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt^2 +$$
$$+ 2\cdot\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}+\frac{9}{4}\,\arcsin\frac{2t}{3}\right) = -\frac{2}{3}\,(3x-x^2)^{3/2} +$$
$$+ \left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{3x-x^2}+\frac{9}{4}\,\arcsin\frac{2x-3}{3}+C.$$

IV. Интегрирование дифференциальных биномов вида:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где $p=\frac{\alpha}{\beta}$; α, β — целые числа; m, n — произвольные числа.

Данный интеграл интегрируется лишь в следующих трех случаях:

1) если p целое число, то используется подстановка

$$x=t^N,\ \text{где } N \text{ — общий знаменатель дробей } m \text{ и } n;$$

2) если $\frac{m+1}{n}$ целое число, то используется подстановка

$$a+bx^n=t^\beta;$$

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ целое число, то используется подстановка

$$a+bx^n=x^nt^\beta.$$

Пример 30.

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$$

где $m=3$, $n=2$. Число $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ — целое, поэтому используем подстановку (1): $x^2-1=t^2$, $x=\sqrt{t^2+1}$, $dx=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$, отсюда

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int\frac{(1+t^2)^{3/2}}{t}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^{1/2}}\,dt=\int(1+t^2)\,dt=$$

$$=t+\frac{t^3}{3}+C=(x^2-1)^{1/2}+\frac{(x^2-1)^{3/2}}{3}+C.$$

Пример 31.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0(1+x^4)^{-1/4}\,dx,$$

здесь $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$. Проверим условие: $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число или ноль. $\frac{m+1}{n}+p=\frac{0+1}{4}-\frac{1}{4}=0$, поэтому используем подстановку (2); здесь $\beta=4$: $1+x^4=x^4\cdot t^4$, $t=\sqrt[4]{\frac{1}{x^4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, $x=(t^4-1)^{-1/4}$, $dx=-t^3(t^4-1)^{-5/4}\,dt$, так что $\sqrt[4]{1+x^4}=tx=t\cdot(t^4-1)^{-1/4}$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2\,dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\,\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}t+C,$$

где $t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

1.6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

I. Интегрирование выражений вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где R — рациональная функция.

В этом случае существует универсальный прием рационализации выражений, стоящих под знаком интеграла. А именно, используя подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$ и тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

получим под интегралом рациональную функцию.

Пример 32.

$$\int \frac{dx}{\cos 3x + 2\sin 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{\cos 3x + 2\sin 3x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\cos z + 2\sin z} = \frac{1}{3}\int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-t^2+4t} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{5-(t-2)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{5-u^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right| + C = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - 2 + \sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - 2 - \sqrt{5}}\right| + C.$$

Подстановка, упомянутая выше, приводит часто к сложным преобразованиям, поэтому в нижеприведенных частных случаях предпочтительны следующие, более удобные приемы:

а) пусть $R(u,v) = -R(-u,v)$, тогда рационализация достигается подстановкой $t = \cos x$;

б) пусть $R(u,v) = -R(u,-v)$, тогда рационализация достигается подстановкой $t = \sin x$;

в) пусть $R(u,v) = R(-u,-v)$, тогда рационализация достигается подстановкой $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 33.

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx,$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{4+\cos^2 x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = -\frac{\sin x}{4+\cos^2 x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x),$$

поэтому используем подстановку $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{4+\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{4+t^2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C.$$

Пример 34.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x},$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x),$$

используем подстановку $t = \mathrm{tg}\, x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right)} =$$

$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\, x} = \int \frac{dt}{t^2-5t} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{5}\,\ln\left|\frac{\frac{5}{2}+t-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-t+\frac{5}{2}}\right| = -\frac{1}{5}\,\ln\left|\frac{t}{t-5}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\,\ln\left|1-\frac{5}{t}\right| + C = \frac{1}{5}\,\ln|1-5\,\mathrm{ctg}\, x| + C.$$

II. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$.

При интегрировании этих выражений оказываются полезными следующие тригонометрические формулы

$$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

1. Рассмотрим интегралы вида: $\int \sin^m x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$, полагаем, что

а) $m > 0$, четное, $m = 2k$.

$$\int \sin^m x\,dx = \int (\sin^2 x)^k\,dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^k}{2^k}\,dx = \frac{1}{2^{k+1}}\int (1-\cos 2x)^k\,d2x.$$

б) $m > 0$, нечетное, $m = 2k+1$.

$$\int \sin^m x\,dx = \int \sin^{2k} x\cdot\sin x\,dx =$$
$$= -\int (\sin^2 x)^k\,d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^k\,d\cos x = -\int (1-t^2)^k\,dt,$$

где $t = \cos x$.

Возведя выражения, стоящие под интегралами по биному Ньютона в соответствующую степень, получаем ряд интегралов типа (а) и (б), но с низшими степенями, их дальше упрощаем тем же образом.

Случай $\int \cos^m x\,dx$ делается аналогично.

Пример 35.

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{8}\,d2x =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1+2\cos z+\cos^2 z)\,dz = \frac{z}{8}+\frac{\sin z}{4}+$$
$$+\frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz = \frac{3}{8}x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

Пример 36.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\,d\sin x = \int (1-\sin^2 x)\,d\sin x =$$
$$= \int (1-t^2)\,dt = t-\frac{t^3}{3}+C = \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

в) $m = -1$

$$\int \frac{dx}{\sin x},\qquad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

г) $m<0$, $|m|=2k$.

$$\int \cos^m x\,dx=\int \frac{dx}{\cos^{2k} x}=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\frac{dx}{\cos^2 x}=$$
$$=\int \left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^{k-1} d\,\mathrm{tg}\,x=\int (1+\mathrm{tg}^2 x)^{k-1}\,d\,\mathrm{tg}\,x=$$
$$=\int (1+t^2)^{k-1}\,dt,\quad t=\mathrm{tg}\,x,$$

аналогично

$$\int \sin^m x\,dx=\int \frac{dx}{\sin^{2k} x}=-\int (1+\mathrm{ctg}^2 x)^{k-1}\,d\,\mathrm{ctg}\,x.$$

Пример 37.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}=\int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,d\,\mathrm{tg}\,x=\int (\mathrm{tg}^2 x+1)\,d\,\mathrm{tg}\,x=$$
$$=\int (t^2+1)\,dt=\frac{t^3}{3}+t+C=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+\mathrm{tg}\,x+C.$$

д) $m<0$, $|m|=2k+1$.

$$\int \cos^m x\,dx=\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}=\int \frac{\cos x}{\cos^{2k+2} x}\,dx=$$
$$=\int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)^{k+1}}=\int \frac{dt}{(1-t^2)^{k+1}}$$

далее см. пункт 1.4. Случай $\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x}$ делается аналогично.

Пример 38.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}=\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x}=\int \frac{d\sin x}{(\cos^2 x)^2}=\int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)^2}=\int \frac{dt}{(1-t^2)^2};$$

(далее см. пункт 1.4).

В случае д) для понижения степени удобно применять формулу $\sin^2 x+$ $+\cos^2 x=1$.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx=$$
$$=\int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}\right)dx=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,d\cos x.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, получим:

$$-\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, d\cos x = \frac{1}{2}\int \sin x\, d\cos^{-2} x =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{d\sin x}{\cos^2 x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos x}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

2) Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \quad m > 0, n > 0.$$

е) один из показателей m или n нечетный, без изменения общности полагаем $n = 2k+1$.

$$\int \sin^m \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \sin^m x(\cos^2 x)^k\, d\sin x =$$
$$= \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\, d\sin x = \int t^m(1-t^2)^k\, dt,$$

где $t = \sin x$ и далее по биному Ньютона.

Пример 39.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, d\sin x =$$
$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\, d\sin x = \int t^2(1-t^2)\, dt =$$
$$= \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

ж) m и n четные, то есть $m = 2k$, $n = 2l$,

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\, dx = \int \sin^{2k} x(1-\sin^2 x)^l\, dx,$$

далее, используя бином Ньютона, сводим к случаю а).

Пример 40.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2(1-\sin^2 x)\, dx = \int \sin^2 x\, dx - \int \sin^4 x\, dx.$$

3. Интегралы вида $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx$ и $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx$.

з) $m = n$, используя формулу $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\,dx = \int \operatorname{tg}^{m-2}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\,dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^{m-2}\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx,$$

получим формулу понижения. Аналогично

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^m x}\,dx = \int \operatorname{ctg}^m x\,dx = -\frac{1}{m-1}\,\operatorname{ctg}^{m-1} x - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x\,dx.$$

Пример 41.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\,dx =$$
$$= \int \operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x} + \int \frac{d\cos x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

и) показатель числителя m — четный, $m = 2k$.

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{\cos^{2k} x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^k}{\sin^n x}\,dx.$$

Интеграл распадается на сумму интегралов вида (1).

Пример 42.

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - 2\int \frac{dx}{\sin x} + \int \sin x\,dx.$$

к) показатель числителя m нечетный, $m = 2k+1$.

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^k}{\sin^n x}\,d\sin x.$$

Интеграл распадается на отдельные слагаемые вида $\int t^m\,dt$.

Пример 43.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}\,d\sin x = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt =$$
$$= -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C,$$

где $t = \sin x$.

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x}$, $m > 0$, $n > 0$.

$$\int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^m x \cdot \sin^n x}\,dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^{m-2} x \sin^n x} + \int \frac{dx}{\cos^m x \sin^{n-2} x},$$

повторив этот прием требуемое количество раз, сводим интеграл к предыдущим типам.

Пример 44.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^3 x \cdot \sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin^2 x}\,dx +$$
$$+ \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Если $m + n = 2k$, то проще делить члены дроби на $\cos^{m+n} x$.

$$\int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} = \int \frac{dx}{\cos^{m+n} x \left(\frac{\cos^m x \sin^n x}{\cos^{m+x} x}\right)} =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^{2k} x \operatorname{tg}^n x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \cdot \operatorname{tg}^{-n} x\, d\operatorname{tg} x =$$
$$= \int t^{-n}(1+t^2)^{k-1}\,dt,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 45.

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \operatorname{tg}^3 x} =$$
$$= \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^{-3} x \, d\operatorname{tg} x = \int t^{-3}(1+t)\,dt =$$
$$= \int (t^{-3}+t^{-2})\,dt = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C.$$

III. Интегралы вида

$$\int \sin(ax+b)\cos(cx+p)\,dx,$$
$$\int \sin(ax+b)\sin(cx+p)\,dx,$$
$$\int \cos(ax+b)\cos(cx+p)\,dx$$

упрощаются на основании тригонометрических тождеств

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right).$$

Пример 46.

$$\int \sin(3x+1)\cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin(5x+4)+$$
$$+\sin(x-2))\,dx = \frac{1}{2}\biggl(\int \frac{\sin(5x+4)}{5}\,d(5x+4)+$$
$$+\int \sin(x-2)\,d(x-2)\biggr) = -\frac{\cos(5x+4)}{10} - \frac{\cos(x-2)}{2} + C.$$

Кроме того, при интегрировании тригонометрических функций можно пользоваться формулами Эйлера

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right).$$

IV. Интегралы вида

$$\int P(x)\sin ax\,dx,\quad \int P(x)\cos ax\,dx,$$
$$\int e^{bx}\sin ax\,dx,\quad \int e^{bx}\cos ax\,dx,$$
$$\int e^{bx}\sin ax\,dx,\quad \int e^{bx}\cos ax\,dx,$$

где $P(x)$ — целый многочлен, интегрируются по частям, см. пункт 1.3.

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int (x^2+3x^3+x+1)\,dx$;
2. $\int \left(x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)\,dx - \int\left(\frac{1}{x}-5\right)\,dx$;
3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\,dx$;
4. $\int \frac{5x^8+1}{x^4}\,dx$;
5. $\int \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}\,dx$;
6. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\,dx$;
7. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$;
8. $\int (2^x+3^x)\,dx$;
9. $\int 4^x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)\,dx$;
10. $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)\,dx$;
11. $\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx$;
12. $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$;
13. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)\,dx$;
14. $\int (\sin x+5\cos x)\,dx$;
15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx$;
16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$;
17. $\int \frac{3\,\mathrm{tg}^2\,x+4}{\sin^2 x}\,dx$;
18. $\int \frac{3-2\,\mathrm{ctg}^2\,x}{\cos^2 x}\,dx$;
19. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$;
20. $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx$;
21. $\int \mathrm{ctg}^2\,x\,dx$;
22. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

23. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$;

24. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2\, dx$;

25. $\int 2^x e^x\, dx$;

26. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$;

27. $\int \cos 5x\, dx$;

28. $\int \sin 7x\, dx$;

29. $\int \cos \frac{x}{4}\, dx$;

30. $\int e^{-x}\, dx$;

31. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\, dx$;

32. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

33. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

34. $\int (2+5x)^9\, dx$;

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$;

36. $\int \sqrt{2x-5}\, dx$;

37. $\int \sqrt[3]{3-7x}\, dx$;

38. $\int \frac{dx}{5x+2}$;

39. $\int \frac{dx}{2-3x}$;

40. $\int \frac{x\, dx}{x^2+3}$;

41. $\int \operatorname{ctg} x\, dx$;

42. $\int \operatorname{tg} x\, dx$;

43. $\int \frac{\sin x\, dx}{1+3\cos x}$;

44. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^5}$;

45. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{3+\sin 3x}$;

46. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}\, dx$;

47. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$;

48. $\int \cos^3 x \sin x\, dx$;

49. $\int e^{\cos x} \sin x\, dx$;

50. $\int e^{-x^3} x^2\, dx$;

51. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}}$;

52. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x}$;

53. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^5 x}$;

54. $\int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}\, dx$;

55. $\int \sqrt{3+\cos 5x}\, \sin 5x\, dx$;

56. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sqrt[7]{3+5\sin 3x}}$;

57. $\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}\, dx$;

58. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x\,dx}{1+x^2}$;

59. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

60. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$;

61. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$;

62. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

63. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$;

64. $\int \sqrt[5]{x^3-8}\,x^2\,dx$;

65. $\int \sqrt[4]{1-6x^5}\,x^4\,dx$;

66. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

67. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}$;

68. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx$;

69. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}\,dx$;

70. $\int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}}\,dx$;

71. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$;

72. $\int \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^3}\,dx$;

73. $\int 4^{1-3x}\,dx$;

74. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

75. $\int e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$;

76. $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

77. $\int \frac{dx}{x^2-16}$;

78. $\int \frac{dx}{x^2+4}$;

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$;

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$;

82. $\int \frac{dx}{x^2-5}$;

83. $\int \frac{dx}{x^2+3}$;

84. $\int \frac{dx}{2-x^2}$;

85. $\int \frac{dx}{4x^2+5}$;

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$;

88. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$;

89. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$;

90. $\int \frac{dx}{3-5x^2}$;

91. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-5}}$;

92. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x^4}}$;

93. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-3}}$;

94. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{5-e^{2x}}}$;

95. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{5-\cos^2 2x}$;

96. $\int \frac{2x-3}{x^2-4}\,dx$;

97. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

98. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

99. $\int \frac{5e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$;

100. $\int \frac{\cos 5x\,dx}{\sqrt{3\cos^2 5x-2}}$;

101. $\int \frac{\sin\frac{x}{3}\,dx}{4\cos^2\frac{x}{3}+9}$;

102. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4-x^{10}}}$;

103. $\int \frac{x^6\,dx}{x^{14}+5}$;

104. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-2x}+2}$;

105. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

106. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

107. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

108. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$;

109. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

111. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$;

112. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx$;

113. $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+3}\,dx$;

114. $\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2+x-1}$;

115. $\int \frac{2-x}{x^2+4x+29}\,dx$;

116. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$;

117. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$;

118. $\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx$;

119. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$;

120. $\int \frac{3+x}{\sqrt{3x+2x^2}}\,dx$;

121. $\int \frac{4x+11}{\sqrt{x^2+8x+7}}\,dx$;

122. $\int \frac{7x-1}{x^2-6x+1}\,dx$;

123. $\int \frac{x^3}{x-2}\,dx$;
124. $\int \frac{3x^2+5}{x+1}\,dx$;
125. $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}\,dx \ (a \neq 0)$;
126. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx$;
127. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx$;
128. $\int \frac{3x-1}{2x+1}\,dx$;
129. $\int \frac{2x^2-1}{x^2-x+1}\,dx$;
130. $\int \frac{x^4-2x^3}{x-3}\,dx$;
131. $\int \frac{3x^3-2x^2}{x^2-6x+10}\,dx$;
132. $\int \frac{(x^3-2x)\,dx}{x^2-8x+7}$;
133. $\int \frac{3x^2+1}{x^2-x+1}\,dx$;
134. $\int \frac{3+x}{x^2+7x+13}\,dx$;
135. $\int \frac{x^4-3x^2}{x-3}\,dx$;
136. $\int \frac{x^2+3x}{x^2+8x-7}\,dx$;
137. $\int \ln x\,dx$;
138. $\int x\ln x\,dx$;
139. $\int x\ln(3x+2)\,dx$;
140. $\int (x^2+3x+2)\ln x\,dx$;
141. $\int xe^{-x}\,dx$;
142. $\int xe^{5x}\,dx$;
143. $\int x^3e^{-x}\,dx$;
144. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx$;
145. $\int (2x+3)e^{2x}\,dx$;
146. $\int x\cos x\,dx$;
147. $\int x\sin x\,dx$;
148. $\int (x+1)\cos 3x\,dx$;
149. $\int x^2\cos x\,dx$;
150. $\int x\cos^2 x\,dx$;
151. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;
152. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$;
153. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;
154. $\int \arcsin x\,dx$;
155. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$;
156. $\int x\operatorname{arcctg}(1-x)\,dx$;
157. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$;
158. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}\,dx$;

159. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$;
160. $\int e^x\sin x\,dx$;
161. $\int e^x\cos x\,dx$;
162. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$;
163. $\int e^x\sin\frac{x}{2}\,dx$;
164. $\int \ln^2 x\,dx$;
165. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}\,dx$;
166. $\int \ln(x^2+2)\,dx$;
167. $\int \cos(\ln x)\,dx$;
168. $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$;
169. $\int x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$;
170. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx$;
171. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;
172. $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2}\,dx$;
173. $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;
174. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$;
175. $\int \sqrt{7-x^2}\,dx$;
176. $\int \sqrt{x^2-5}\,dx$;
177. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$;
178. $\int \sqrt{x^2+2}\,dx$;
179. $\int \sqrt{2-3x^2}\,dx$;
180. $\int \sqrt{2x^2-1}\,dx$;
181. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$;
182. $\int \sqrt{x^2-4x}\,dx$;
183. $\int \sqrt{x^2+5x+4}\,dx$;
184. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$;
185. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$;
186. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$;
187. $\int \sin x\sqrt{2-3\cos^2 x}\,dx$;
188. $\int e^x\sqrt{e^{2x}+3}\,dx$;
189. $\int \cos x\sqrt{\sin^2 x+3}\,dx$;
190. $\int e^{\frac{x}{2}}\sqrt{4-e^x}\,dx$;
191. $\int \sqrt{\ln^2 x+1}\,\frac{dx}{x}$;
192. $\int (2x-1)\sqrt{3x-x^2}\,dx$;
193. $\int (x+3)\sqrt{5x+2x^2}\,dx$;

194. $\int (x-1)\sqrt{-6x-x^2}\,dx$;
195. $\int \sin^2 x\,dx$;
196. $\int \cos^2 x\,dx$;
197. $\int \sin^2 mx\,dx \quad (m \neq 0)$;
198. $\int \cos^2 mx\,dx \quad (m \neq 0)$;
199. $\int \sin^3 x\,dx$;
200. $\int \cos^3 x\,dx$;
201. $\int \cos^4 x\,dx$;
202. $\int \sin^5 x\,dx$;
203. $\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx$;
204. $\int \sin^3 \frac{x}{4}\,\cos^3 \frac{x}{4}\,dx$;
205. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx$;
206. $\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx$;
207. $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$;
208. $\int \cos^7 x\,dx$;
209. $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$;
210. $\int \cos^3 x \sin^5 x\,dx$;
211. $\int \sin^4 \frac{x}{2}\,dx$;
212. $\int (1+2\cos x)^2\,dx$;
213. $\int \cos^5 x\,dx$;
214. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$;
215. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3}}$;
216. $\int \frac{dx}{\sin 9x}$;
217. $\int \frac{dx}{\cos 5x}$;
218. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}\,dx$;
219. $\int \sin 3x \cos x\,dx$;
220. $\int \sin 3x \sin 5x\,dx$;
221. $\int \sin nx \sin mx\,dx \ (m+n \neq 0,\ m-n \neq 0)$;
222. $\int \sin 3x \sin x\,dx$;
223. $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x\,dx$;
224. $\int \sin\frac{x}{3}\,\cos\frac{2x}{3}\,dx$;
225. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}$;
226. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;
227. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$;
228. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx$;
229. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\,dx$;
230. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$;

231. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;
232. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$;
233. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$;
234. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$;
235. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$;
236. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$;
237. $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$;
238. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^4 x}\,dx$;
239. $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$;
240. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;
241. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$;
242. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$;
243. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x}$;
244. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;
245. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$;
246. $\int \frac{\sin x\,dx}{b^2+\cos^2 x}$ $(b \neq 0)$;
247. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$;
248. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\,dx$;
249. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$;
250. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x+2}$;
251. $\int \frac{e^{4x}\,dx}{e^x-1}$;
252. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^{2x}-1}$;
253. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$;
254. $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$;
255. $\int \frac{3e^{2x}-4e^x}{e^{2x}+4}\,dx$;
256. $\int \frac{e^{5x}\,dx}{e^x+1}$;
257. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4 x}$;
258. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;
259. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$;
260. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$;
261. $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$;
262. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$;
263. $\int (3x-1)\sqrt{-x^2-8x}\,dx$;
264. $\int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10}\,dx$;

265. $\int \frac{5e^{2x}-3e^x}{e^x+4-e^{2x}}\,dx$;
266. $\int (5x+3)\sqrt{x^2+3x+5}\,dx$;
267. $\int \frac{a^x\,dx}{a^{2x}+1}$ $(a>0,\ a\neq 1)$;
268. $\int (1-2x)\sqrt{3x^2+8x}\,dx$;
269. $\int \frac{6x-10}{\sqrt{x^2+5x+17}}\,dx$;
270. $\int \sqrt{2x^2+4x+1}\,dx$;
271. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx$;
272. $\int \frac{3x+1}{x^2+10x+1}\,dx$;
273. $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
274. $\int \sin(\ln x)\,dx$;
275. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$;
276. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$;
277. $\int x^2\operatorname{arctg}(2x+1)\,dx$;
278. $\int \cos mx\cos nx\,dx$ $(m+n\neq 0,\ m-n\neq 0)$;
279. $\int \frac{\ln(\cos x)\,dx}{\sin^2 x}$;
280. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-9})}{\sqrt{x-3}}\,dx$;
281. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{3x}{2}+1}$;
282. $\int \frac{dx}{3+\sin 5x}$;
283. $\int \frac{dx}{\cos 3x+2\sin 3x}$;
284. $\int \frac{dx}{\cos 2x-\sin 2x+2}$;
285. $\int \frac{dx}{2+3\cos\frac{x}{2}}$;
286. $\int \frac{dx}{2\sin^2 3x-3\cos^2 3x+1}$.

§2. Определенный интеграл, основные свойства определенного интеграла и его приложения

2.1. Общие понятия

Пусть числовая функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. Определим разбиение T отрезка $[a,b]$ заданием конечной системы точек $\{x_i\}$: $a=x_0<x_1<\ldots<\,<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n$. Диаметром разбиения $d(T)$ разбиения T отрезка $[a,b]$ назовем число $d(T)=\max\limits_{i=1,2,\ldots,n}(x_i-x_{i-1})>0$, $0<d(T)\leqslant b-a$. При заданном разбиении T отрезка $[a,b]$ рассмотрим любую систему точек $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$

$$(a=x_0\leqslant\xi_1\leqslant x_1<\ldots<x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i<\ldots<x_{n-1}\leqslant\xi_n\leqslant x_n=b).$$

Разбиение T отрезка $[a, b]$ вместе с выбранной системой точек $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ назовем размеченным разбиением $[a, b]$ и будем обозначать $T\xi$. По заданной функции $f : [z, b] \to \mathbb{R}$ и размеченному разбиению $T\xi$ с диаметром $d(T) > 0$ построим сумму

$$S_f(T\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Определение 1. Интегралом Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется такое число I (если оно существует), что $\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = I$.

Обозначается интеграл Римана следующим образом: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Здесь и дальше полагаем: $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

Замечание. Интеграл Римана $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ зависит от a, b и f, но не зависит от x, являющейся “немой” переменной (переменной интегрирования), в то время как неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ зависит от x.

Некоторые свойства интеграла Римана.

1) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, тогда для любых α и β справедлива формула:

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

2) Пусть $a < c < b$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

3) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Пусть $F(x) = \int f(x)\,dx$ — неопределенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$, тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $f(\varphi(t))$ определена и

непрерывна на $[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

5) Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

Пример 1. (см. свойство 3).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Пример 2. (см. свойство 3).

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Пример 3. (см. свойство 4).

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx,$$

рассмотрим подстановку $x = 3\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. Имеем

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt =$$

$$= 9\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{4}.$$

Пример 4. (см. свойство 4).

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx,$$

рассмотрим подстановку $x = \frac{1}{\cos t}$, так как $x \in [1, 2]$, то $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}{1/\cos^4 t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cdot \cos t\,dt = \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Пример 5. (см. свойство 5).

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

2.2. Геометрические приложения определенного интеграла

I. Длина кривой.

I.1. Кривая задана явным уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Пример 6. Найти длину кривой $y = \frac{x^2}{6}$ на участке $x \in [0, 4]$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{6}\right)' = \frac{x}{3}$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^4 \sqrt{3^2 + x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{3^2+x^2} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{3^2+x^2})\right]\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}4 \cdot \sqrt{3^2+4^2} + \frac{9}{2}\ln(4 + \sqrt{3^2+4^2}) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{3^2+0} - \frac{9}{2}\ln(0 + \sqrt{3^2+0})\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[10 + \frac{9}{2}\ln 9 - \right.$$

$$\left. -\frac{9}{2}\ln 3\right] = \frac{1}{3}\left[10 + \frac{9}{2}\ln 3\right] = \frac{10}{3} + \frac{3}{2}\ln 3.$$

I.2. Кривая задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Пример 7. Вычислить длину астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части l_1, расположенной в первом квадранте, в этом случае $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. $x'_t = -6\cos^2 t \cdot \sin t$, $y'_t = 6\sin^2 t \cdot \cos t$, отсюда

$$l_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt = 6\int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt = 6\frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Длина всей кривой $l = 4l_1 = 4 \cdot 3 = 12$.

Пример 8. Вычислить длину циклоиды: $x = (t - \sin t)$, $y = (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Найдем производные $x'_t = 1 - \cos t$, $y'_t = \sin t$, тогда

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\, dt = -4\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -4(\cos\pi - \cos 0) = -4(-1-1) = 8.$$

I.3. Кривая задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Пример 9. Вычислить длину кривой $r = (1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Найдем производную $r'_\varphi = (1+\cos\varphi)' = -\sin\varphi$, отсюда

$$l = \int\limits_0^\pi \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^\pi = 4\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4.$$

II. Площади

II.1. Пусть криволинейная трапеция ограниченна сверху и снизу кривыми, уравнения которых $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x \in [a,b]$, $y_1(x) \geqslant y_2(x)$. Тогда площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_a^b [y_1(x) - y_2(x)]\,dx.$$

Пример 10. Даны эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ и прямые $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$, найти площадь фигуры, ограниченной прямыми и эллипсом.

Из уравнения эллипса имеем: $y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$, отсюда

$$S = \int\limits_{-1}^1 \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 3\arcsin\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x\sqrt{4-x^2}\bigg|_{-1}^1 =$$

$$= 3\arcsin\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{4-1} - 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\sqrt{4-1} =$$

$$= 6\arcsin\frac{1}{2} + \frac{6}{4}\sqrt{3} = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 11. Определить площадь фигуры, заключенной между двумя параболами $y^2 = 6x$ и $x^2 = 6y$.

Из уравнений кривых имеем: $y = \sqrt{6x}$, $y = \frac{x^2}{6}$, $x \in [0,6]$.

$$S = \int\limits_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right)\,dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\,x^{3/2} - \frac{x^3}{18}\right)\bigg|_0^6 = 12.$$

II.2. Площадь криволинейной трапеции в случае, когда кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt.$$

Пример 12. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

Вычислим площадь верхней половины и удвоим. Здесь $x \in [-3, 3]$, поэтому t изменяется от π до 0,

$$S = 2 \cdot \int\limits_{\pi}^{0} 2\sin t(-3\sin t)\, dt = 12 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 12 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 12 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 6\pi.$$

Пример 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной циклоидой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$S = \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt = \left(\frac{3}{2}\, t - 2\sin t + \frac{1}{4}\, \sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi.$$

II.3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Пример 14. Найти площадь кардиоиды $r = \cos\varphi + 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos\varphi + 1)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\, \left(\frac{3}{2}\, \varphi + \frac{1}{4}\, \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 15. Найти площадь лемнискаты $r^2 = 2\cos 2\varphi$.

Для вычисления общей площади достаточно удвоить площадь правого овала, которому отвечает изменение угла $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$.

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi\, d\varphi = \sin 2\varphi\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 - (-1) = 2.$$

III. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Пример 16. Найти объем тела, образованного вращением эллипса вокруг оси Ox $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Так как $y^2 = \frac{9}{25}(25 - x^2)$, получим

$$V = \pi \int\limits_{-5}^{5} \frac{9}{25}(25 - x^2)\, dx = 2\pi \int\limits_0^5 \frac{9}{25}(25 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{9}{25} \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = 60\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

287. $\int\limits_1^2 (x^2 + 1)\, dx$;

288. $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$;

289. $\int\limits_0^\pi \sin x \, dx$;

290. $\int\limits_0^\pi \sin 2x \, dx$;

291. $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x \sin x \, dx$;

292. $\int\limits_1^e \ln x \, dx$;

293. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

294. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x \, dx$;

295. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi$;

296. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi$;

297. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi$;

298. $\int\limits_{0}^{3} e^{-\frac{x}{3}}\,dx$;

299. $\int\limits_{-1}^{1} xe^{-x^2}\,dx$;

300. $\int\limits_{-1}^{1} x^2e^{-x}\,dx$;

301. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$;

302. $\int\limits_{0}^{R} x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx\ (R>0)$;

303. $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x\,dx$;

304. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

305. $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=e$, $y=0$;

306. $y=x^2$, $y=1$;

307. $y=x^2$, $y=2-x^2$;

308. $y=x^2-1$, $x=2$, $y=0$, где $x\geqslant 1$;

309. $y=\sin 3x$, $y=0$, где $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$;

310. $y=\sin x$, $y=\sin^3 x$, где $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

311. $y=x^2$, $y=x$;

312. $y=\arcsin 2x$, $x=0$, $y=-\frac{\pi}{2}$;

313. $y=\sin 2x$, $y=1$, $x=\frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

314. $x^2-y^2=1$, $x=2$;

315. $y=x^3$, $y=-1$, $x=0$;

316. $y=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$;

317. $y=x(3-x)$, $y=x-3$;

318. $y=3x-x^2$, $y=x^2-x$;

319. $xy=5$, $x+y=6$;

320. $xy = -2$, $y = x - 3$;

321. $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$;

322. кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

323. $\rho = a\cos 2\varphi$;

324. $\rho = a\sin 2\varphi$;

325. $\rho = 2 + \sin 2\varphi$;

326. $\rho = ae^{\varphi}$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

327. $\rho = a\sin 3\varphi$;

328. $\rho = a\cos 3\varphi$;

329. одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и осью OX;

330. $\rho = a\cos 4\varphi$;

331. $\rho = a\sin 4\varphi$.

332. Вычислить площади фигур, изображенных на рисунках 1 — 6.

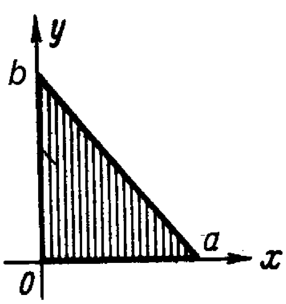


Рис. 1

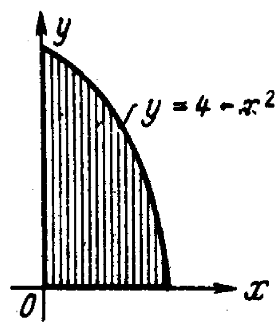


Рис. 2

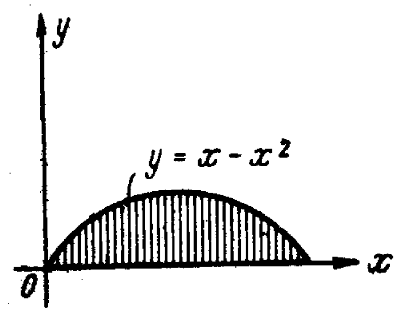


Рис. 3

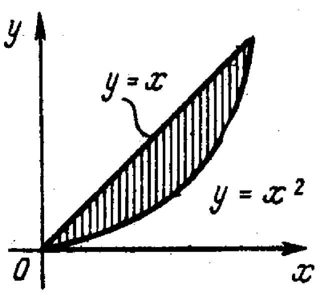


Рис. 4

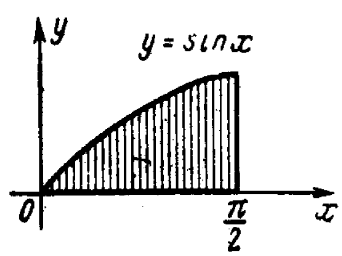


Рис. 5

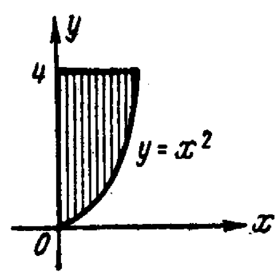


Рис. 6

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

333. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geqslant 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

334. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $x = 2$, 4) $x = -2$, 5) $y = -1$, 6) $y = 2$;

335. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

336. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, где $x \geqslant 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

337. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

338. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

339. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, где $y \geqslant 0$ вокруг оси x;

340. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $y = -1$, 4) $x = 1$, 5) $x = -1$, 6) $y = 1$;

341. $y = \sin x$, $y = 0$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $x = 2\pi$, 4) $x = -1$, 5) $x = -2$, 6) $y = 1$, 7) $y = -2$;

342. $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = 0$ вокруг оси x;

343. $y = x$, $y = x^2$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

344. $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

345. $y = \sin x$, $y = 0$, где $2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $x = \pi$, 4) $y = -2$;

346. $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $x = 0$, 2) $y = 0$, 3) $x = -1$, 4) $y = 1$;

347. $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

348. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y.

Вычислить длину дуги кривой:

349. $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 1$;

350. $y = \ln \cos x$, отсеченной прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$;

351. $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$;

352. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$;

353. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ между осью y и прямой $x = a$;

354. $y = x^2 - 1$, отсеченной осью x;

355. $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$;

356. астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

357. одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

358. кардиоиды $r = 4(1 - \cos\varphi)$;

359. первого завитка спирали $r = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

360. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ от $x = 1$ до $x = e$.

§3. Несобственные интегралы

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в любой конечной его части $[a, A]$, так что интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ имеет смысл при любом $A > a$.

Определение 1. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называется предел (если он существует) $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$, его величина обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{1}$$

В случае, если этот предел конечен, то говорят, что интеграл (1) сходится, если предел (1) бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на любом промежутке $[0,A]$ интегрируема

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}A = \frac{\pi}{2}.$$

По определению интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\,dx$. Функция $f(x)=\sin x$ интегрируема на любом промежутке $[0,A]$. Так как

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}(-\cos A)$$

не существует, то по определению интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\,dx$ расходится.

Пример 3. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$. Функция $f(x)=\frac{1}{x^p}$ интегрируема на любом промежутке $[0,A]$. Так как

$$\int\limits_1^A\frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{1-p}\,(A^{1-p}-1), & p\neq 1,\\ \ln A, & p=1,\end{cases}$$

то интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

Свойства несобственного интеграла.

1. Если существуют несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$, то для любых постоянных α и β справедливо равенство:

$$\int\limits_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx.$$

2. Пусть $a<c<+\infty$, и существует несобственный интеграл от функции $f(x)$ на $[a;+\infty)$, тогда

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_a^{c}f(x)\,dx+\int\limits_c^{+\infty}f(x)\,dx.$$

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, то для любой строго монотонной и непрерывно дифференцируемой на $[\alpha;\beta)$ функции $\varphi:\ [\alpha;\beta)\to[a;+\infty)$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;+\infty)$ и существует $\lim\limits_{A\to+\infty}f(x)g(x)$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся, и в случае их сходимости имеет место равенство

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty}f'(x)g(x)\,dx.$$

Замечание. Аналогично (1) определяется интеграл от функции $f(x)$ на $(-\infty;a]$

$$\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)\,dx=\lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^{a}f(x)\,dx,$$

равно как и интеграл функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{\substack{B\to-\infty\\A\to+\infty}}\int\limits_B^{A}f(x)\,dx.$$

Пример 4.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} (-\operatorname{arctg} A) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 5.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

3.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ задана на конечном промежутке $[a;b]$, но неограничена в этом промежутке. Положим, что в любом промежутке $[a;b-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ $f(x)$ ограничена и интегрируема, но оказывается неограниченной в каждом промежутке $[b-\varepsilon,b]$. Точка b в этом случае называется особой точкой.

Определение 2. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, его величина обозначается

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2}$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл (2) сходится. Если же предел (2) бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл (2) расходится.

Замечание. В случае, если $f(x)$ ограничена и интегрируема в любом промежутке $[a+\varepsilon;b]$ и неограничена в каждом промежутке $[a;a+\varepsilon]$ справа от точки a (особая точка), тогда несобственный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ определяется равенством

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Замечание. Пусть $c\in[a,b]$ и функция $f(x)$ неограничена в точке c, причем на промежутках $[a;c-\varepsilon_1]$ $(0<\varepsilon_1<c-a)$ и $[c+\varepsilon_2,b]$ $(0<\varepsilon_2<b-c)$

функция $f(x)$ интегрируема, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Пример 6. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=-1$ — особая точка.

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon)) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 7. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=1$ — особая точка.

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 8. $\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $x=0$ — особая точка.

$$\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_{0}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon_2}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{3}{2}\cdot x^{2/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{3}{2}\,x^{2/3}\Big|_{\varepsilon_2}^{8} =$$

$$= \frac{3}{2}\,(8^{2/3} - (-1)^{2/3}) = \frac{3}{2}\cdot(4-1) = \frac{9}{2}.$$

Пример 9. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1}$, $x=-1$, $x=1$ — особые точки.

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x\,dx}{x^2-1} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1}\,dx + \int\limits_{1}^{2} \frac{2x}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon_1} \frac{dx^2}{x^2-1} + \lim_{\substack{\varepsilon_2\to 0\\ \varepsilon_3\to 0}} \int\limits_{-1+\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{dx^2}{x^2-1} + \lim_{\varepsilon_4\to 0} \int\limits_{1+\varepsilon_4}^{2} \frac{dx^2}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \ln|x^2-1|\Big|_{-2}^{-1-\varepsilon_1} + \lim_{\substack{\varepsilon_2\to 0\\ \varepsilon_3\to 0}} \ln|x^2-1|\Big|_{-1+\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} + \lim_{\varepsilon_4\to 0} \ln|x^2-1|\Big|_{1+\varepsilon_4}^{2} = \infty.$$

Интеграл расходится.

Пример 10. $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{(a-x)^p}$, $x=a$ — особая точка.

$$\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{a} \frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \begin{cases} \frac{1}{1-p}\,(a^{1-p}-\varepsilon^{1-p}), & p\neq 1\\ (\ln a - \ln\varepsilon), & p=1, \end{cases}$$

отсюда интеграл $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{dx}(a-x)^p$ сходится, если $p<1$, и расходится, если $p \geqslant 1$.

Замечание. Несобственные интегралы от неограниченных функций обладают теми же свойствами, что и несобственные интегралы на бесконечном промежутке. При их формулировке промежуток $[a;+\infty)$ заменяется на промежуток $[a,b]$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

361. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

362. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$;

363. $\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$;

364. $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arcctg} x\,dx$;

365. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}\, dx;$

366. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x\, dx;$

367. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\, dx;$

368. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha};$

369. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$

370. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\, dx;$

371. $\int\limits_{0}^{1} \ln^2 x\, dx;$

372. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\, dx;$

373. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$

374. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-3)^2};$

375. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};$

376. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x};$

377. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha};$

378. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx.$

ГЛАВА II

Дифференциальные уравнения

§4. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

4.1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

Во многих задачах науки и техники требуется находить неизвестную функцию, которая удовлетворяет уравнению, связывающему эту функцию, ее производные и независимую переменную. Простейшая такая задача встречалась в интегральном исчислении, где находили функцию по данной ее производной, то есть находили функцию, удовлетворяющую уравнению $y' = f(x)$.

Пример 1. Найти y, если $y' = x^3$.

Решение. Из интегрального исчисления мы знаем, что уравнению $y' = x^3$ удовлетворяет множество функций $y = \frac{x^4}{4} + C$, где C — произвольная постоянная.

Чтобы из этого множества выделить одну определенную функцию, нужно задать дополнительное условие. Например, найдем функцию, которая при $x = 1$ принимает значение $y = 2$, то есть $y(1) = 2$. Подставляя $x = 1$, $y = 2$ в формулу $y = \frac{x^4}{4} + C$, получим $2 = \frac{1}{4} + C$. Отсюда $C = \frac{7}{4}$. Следовательно, функция, удовлетворяющая уравнению $y' = x^3$ и условию $y(1) = 2$, имеет вид $y = \frac{x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Пример 2. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой, $M(x, y)$ — произвольная точка этой кривой, а AB — касательная к кривой в точке M. Угол, образованный касательной с осью Ox, обозначим через φ. Из дифференциального исчисления мы знаем, что угловой коэффициент касательной к кривой равен

$$k = \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = \frac{PM}{PA} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\frac{PM}{AM} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\frac{y}{x} \qquad (1)$$

и получаем уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}, \tag{2}$$

которое связывает неизвестную функцию, ее производную и независимую переменную.

Проверкой можно убедиться, что уравнению (2) удовлетворяет любая функция вида $y = \frac{C}{x}$. Таким образом, мы получили семейство гипербол. Найдем гиперболу, которая проходит через точку $M_0(2,3)$. Подставляя координаты точки в формулу $y = \frac{C}{x}$, получим $3 = \frac{C}{2}$, $C = 6$. Следовательно, уравнение гиперболы, проходящей через точку $M_0(2,3)$, имеет вид

$$y = \frac{6}{x}.$$

Пример 3. Груз, масса которого m, закреплен на верхнем конце вертикально расположенной пружины (рессоры). Его отклоняют от точки O на некоторое расстояние, а затем отпускают. Определить закон движения груза, если сила, действующая на него со стороны пружины, пропорциональна сжатию (растяжению) пружины и направлена в сторону точки O (точки, в которой находился верхний конец пружины, когда она была в свободном состоянии).

Решение. Если груз движется прямолинейно вдоль оси Ox, то согласно закону Ньютона

$$ma = \sum_{k=1}^{n} F_k, \tag{3}$$

где $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ — ускорение груза, $x = x(t)$ — искомый закон движения груза, F_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — проекции сил на ось Ox, действующих на груз.

В нашем случае на груз действуют две силы: $\vec{F}_1 = mg\vec{\imath}$ — вес груза и $\vec{F}_2 = (-cx)\vec{\imath}$ — сила, действующая со стороны пружины, где c — коэффициент жесткости пружины, $\vec{\imath}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Ox. Проекции этих сил равны $F_1 = mg$, $F_2 = -cx$. Получаем уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + mg,$$

содержащее неизвестную функцию x и ее вторую производную.

Проверкой можно убедиться, что уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = g, \tag{4}$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$, удовлетворяет функция

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{g}{k^2},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Действительно, подставим значение x в левую часть уравнения (4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = -ck^2\cos kt - c_2k^2\sin kt + c_1k^2\cos kt + c_2k^2\sin kt + g = g.$$

Таким образом, функция $x = c_1\cos kt + c_2\sin kt + \frac{g}{k^2}$ удовлетворяет уравнению (4).

Поскольку x зависит от двух произвольных постоянных, то для получения определенного закона движения нужно задать два дополнительных условия. Например, найдем закон движения груза, если в момент времени $t = 0$ его отклонили на величину x и придали ему скорость v_0. Тогда получим

$$x_0 = c_1 + \frac{g}{k^2} \Rightarrow c_1 = x_0 - \frac{g}{k^2}.$$

Далее

$$\frac{dx}{dt} = -c_1k\sin kt + c_2k\cos kt.$$

$$v_0 = c_2k \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Таким образом, искомый закон движения

$$x = \left(x_0 - \frac{g}{k^2}\right)\cos kt + \frac{v_0}{k}\,\sin kt + \frac{g}{k^2}.$$

В каждой из рассмотренных задач мы получили для искомой функции уравнение, которое содержит производную искомой функции.

4.2. Основные определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое связывает неизвестную функцию, ее производные и независимую переменную.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение.

Определение 3. Функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), называется решением дифференциального уравнения, если после подстановки этой функции и ее производных в уравнение, оно обращается в тождество на всем интервале.

В некоторых случаях решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения удается найти в виде неявной функции, заданной равенством $\varphi(x, y) = 0$. В тех случаях, когда равенство $\varphi(x, y) = 0$ можно разрешить относительно

y, мы получим решение уравнения в виде $y = y(x)$. Если же выразить y явно из равенства $\varphi(x, y) = 0$ не удается, то решение оставляют в виде $\varphi(x, y) = 0$.

Определение 4. Равенство $\varphi(x, y) = 0$, которое неявно определяет решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения, называется интегралом дифференциального уравнения.

Определение 5. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

4.3. Об интегрировании дифференциальных уравнений

При интегрировании дифференциальных уравнений мы находим их решения, которые выражаются через элементарные функции и интегралы от них. Однако доказано, что во многих случаях решения дифференциальных уравнений, хотя и существуют, но не выражаются в виде конечной комбинации элементарных функций и интегралов от них. Например, решение уравнения $y' = x^2 + y^2$ нельзя найти в таком виде.

Для нахождения частных решений в таких случаях широко применяются различные численные методы, эффективность которых существенно возросла с развитием компьютерных технологий. В настоящее время численные методы позволяют находить решения дифференциальных уравнений практически с любой требуемой точностью.

Отметим, что имеются справочники по дифференциальным уравнениям, в которых приведены решения большого числа встречающихся дифференциальных уравнений.

Задачи для самостоятельного решения

Составить дифференциальные уравнения данных семейств линий:

379. $y = e^x$;
380. $y = (x - c)^3$;
381. $y = \sin(x + c)$;
382. $x^2 + cy^2 = 2y$;
383. $y^2 + cx = x^3$;
384. $y = c(x - c)^2$;
385. $y = ax^2 + be^x$;
386. $(x - a)^2 + by^2 = 1$;
387. $\ln y = ax + by$;
388. $x = ay^2 + by + c$.

§5. Дифференциальные уравнения первого порядка

5.1. Метод изоклин

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ геометрически устанавливает связь между координатами точки и угловым коэффициентом касательной, проведенной к интегральной кривой в этой точке, причем сама интегральная кривая нам неизвестна.

Определение 1. Геометрическое место точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется изоклиной.

Каждой точке (x, y) ставится в соответствие некоторое направление; мы получаем поле направлений.

Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где $k = \mathrm{const}$. Чтобы приближенно построить решение уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решение.

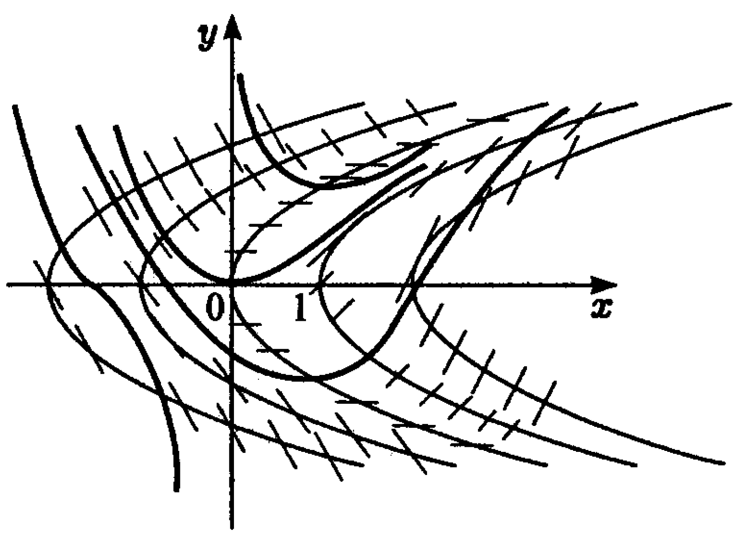
Пример 1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$y' = x - y^2.$$

Решение. Изоклинами данного дифференциального уравнения являются линии, уравнения которых

$$x - y^2 = k.$$

Для нескольких значений k, например, для $k = 0, \pm 1, \pm 2$, проведем изо-



клины $x - y^2 = k$. Это — параболы. Каждую изоклину $x - y^2 = k$ пересечем короткими отрезками под углом α, $\operatorname{tg} \alpha = k$, к оси Ox, не доходящими до других изоклин. Проведем интегральные кривые, например, через точки

$(1,1)$, $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, согласуясь, как указано выше, с направлениями отрезков на изоклинах. Полученный рисунок дает общее представление о решениях уравнения $x-y^2=k$.

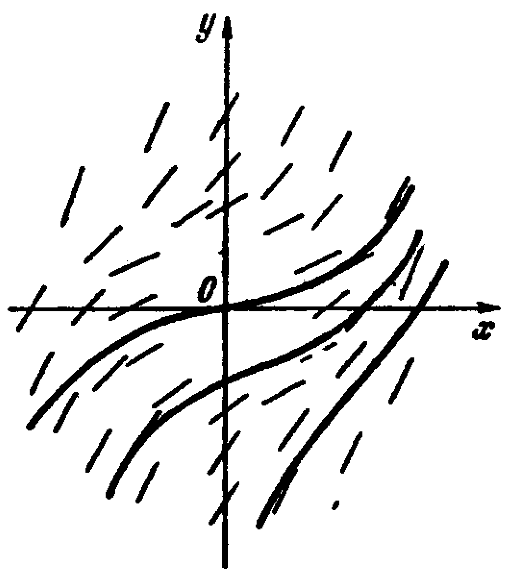
Пример 2. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2.$$

Решение. Изоклинами этого дифференциального уравнения являются линии

$$x^2+y^2=k.$$

Построим изоклины и расставим стрелки, определяющие поле направлений.
$y'=0$, имеем $x=y=0$ (начало координат);
$y'=\frac{1}{2}$, $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ (окружность радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в начале координат);
$y'=1$, $x^2+y^2=1$ (окружность радиусом 1).



Чтобы начертить интегральную кривую уравнения, нужно взять некоторую точку (x_0,y_0) на плоскости и провести через нее кривую так, чтобы она в каждой точке имела направление поля. На рисунке проведены кривые через точки $(0,0)$, $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $(\sqrt{2},0)$. Мы видим, что получается не одна кривая, а целое семейство кривых, зависящих от одного параметра. В качестве параметра можно взять, например, отрезок, отсекаемый кривой на оси Oy.

5.2. Общее и частное решения дифференциального уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

или в виде, разрешенном относительно y':

$$y' = f(x, y), \tag{6}$$

где F — заданная непрерывная функция трех своих аргументов, f — непрерывная заданная функция от x, y.

Определение 2. Функция $y = y(x, c)$, где c — произвольная постоянная, называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка, если при любом значении c функция $y = y(x, c)$ является решением дифференциального уравнения.

Определение 3. Равенство $\varphi(x, y, c) = 0$, которое неявно определяет общее решение $y = y(x, c)$ дифференциального уравнения, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Если равенство $\varphi(x, y, c) = 0$ можно разрешить относительно y, то получим общее решение в виде $y = y(x, c)$.

Определение 4. Если в общем решении $y = y(x, c)$ произвольной постоянной придать конкретное значение $c = c_0$, то полученное решение $y = y(x, c_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Определение 5. Нахождение решения $y = y(x)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 — заданные числа, называется задачей Коши.

Возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция $f(x, y)$, чтобы уравнение $y' = f(x, y)$ имело единственное решение задачи Коши. Ответ на этот вопрос дает теорема существования и единственности решения.

Теорема. Если в некоторой области D изменения переменных x и y функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то для всякой точки (x_0, y_0) области D существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы существования и единственности заключается в том, что через каждую точку области D проходит только одна интегральная кривая.

5.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

I. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{7}$$

не содержащее (явно) искомую функцию. Запишем его с помощью дифференциалов

$$dy = f(x)\,dx. \tag{8}$$

Откуда на основании интегрального исчисления получаем

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{9}$$

Получим общее решение уравнения (7). Задаваясь начальными условиями (x_0, y_0), определим частное решение этого уравнения. Аналогично решаются уравнения первого порядка, не содержащие явно независимого переменного

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{10}$$

$$dx = \frac{dy}{f(y)}, \quad \text{при } f(y) \neq 0.$$

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{11}$$

Решения, записанные в виде (9), (11), называются решениями в квадратурах. После вычисления интегралов получаем общее решение.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, удовлетворяющее условию $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Найдем сначала общее решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C \Rightarrow y = \arcsin x + C.$$

Далее найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin 0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

Получаем решение, удовлетворяющее заданному начальному условию

$$y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Найти решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}}$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Найдем сначала общее решение

$$\sqrt{y}\,dy = dx \Rightarrow dx = \sqrt{y}\,dy \Rightarrow x = \int \sqrt{y}\,dy + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C \Rightarrow x = \frac{2}{3}y\sqrt{y} + C$$

Найдем далее решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$

$$0 = \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{2}{3}, \quad x = \frac{2}{3}y\sqrt{y} - \frac{2}{3}.$$

II. Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y), \tag{12}$$

в котором правая часть есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию только от y, интегрируется следующим образом: мы "разделяем переменные", то есть при помощи умножения и деления приводим уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциала dx, а в другую часть — функция от y и dy.

В уравнении (12) надо обе части уравнения умножить на dx и разделить на $\varphi(y)$. Получаем

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx. \tag{13}$$

Если дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы могут различаться только постоянным слагаемым.

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C. \tag{14}$$

Если уравнение задано в виде

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0, \tag{15}$$

достаточно разделить обе части на $N(y)P(x)$:

$$\frac{M(x)\,dx}{P(x)} + \frac{Q(y)\,dy}{N(y)} = 0.$$

Откуда получаем общий интеграл

$$\int \frac{M(x)\,dx}{P(x)} + \int \frac{Q(y)\,dy}{N(y)} = C.$$

Пример 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ — уравнение с разделяющимися производными.

$$y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C.$$

Получили семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt{2C}$. Итак, $x^2 + y^2 = r^2$ — общий интеграл уравнения.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Решение.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\frac{C_1}{x} \Rightarrow y = \frac{C_1}{x}, \quad \text{где } \ln C_1 = C.$$

Ответ: $y = \frac{C_1}{x}$.

Пример 7. Найти решение дифференциального уравнения

$$y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Решение.

$$y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow -\ln|\cos x| + \ln|y| = \ln C.$$

Потенцируем $\frac{y}{\cos x} = C \Rightarrow y = C\cos x$ — общее решение. Найдем C из начальных условий.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = C\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow C = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

$y = -2\cos x$ — частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Ответ: $y = -2\cos x$.

5.4. Однородные дифференциальные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

I. Однородным уравнением называется такое уравнение, в котором правая часть является функцией от отношения аргументов, то есть

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{16}$$

а также уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{17}$$

где $M(x,y)$, $N(x,y)$ являются однородными функциями одного измерения.

По определению, $f(x,y)$ есть однородная функция n-го измерения, если выполняется тождество

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y). \tag{18}$$

При $n = 0$ имеем

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

В уравнении (16) $f\left(\frac{y}{x}\right)$ является однородной функцией нулевого измерения.

Если ввести новую переменную

$$u = \frac{y}{x}, \tag{19}$$

то уравнение (16) упрощается и приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y = ux.$$

Найдем

$$y' = u + x\frac{du}{dx}$$

и подставим в уравнение (16)

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

или

$$x\,du = (\varphi(u) - u)\,dx.$$

Переменные разделяются, если обе части разделить на $x[\varphi(u) - u]$, получим

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C. \tag{20}$$

Если в этом выражении заменить u его значением $\frac{y}{x}$, то получим интеграл уравнения (16).

Замечание. При решении конкретных однородных уравнений не обязательно приводить их к виду (16). Достаточно убедиться в том, что уравнение принадлежит к рассматриваемому типу, и непосредственно применить подстановку (19). Пользоваться готовой формулой (20) тоже нецелесообразно.

Замечание. Если $\varphi(u) - u \equiv 0$, то уравнение имеет вид
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$
и интегрируется разделением переменных. Его общее решение имеет вид $y = cx$. Если $\varphi(u) - u$ обращается в нуль при значении $u = u_0$, то кроме решений, даваемых формулой (20), существует также решение $u = u_0$ или $y = u_0 x$ (прямая, проходящая через начало координат).

Пример 8. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Решение. Данное уравнение однородное, так как $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ является однородной функцией нулевого измерения. Действительно,
$$f(tx, ty) = \frac{2(tx \cdot ty)}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{t^2 \cdot 2xy}{t^2(x^2 - y^2)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$
то есть $f(x, y) = f(tx, ty)$.

Делаем подстановку $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, уравнение принимает вид:
$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$
Получили уравнение с разделяющимися переменными
$$\frac{du}{dx} = \frac{u(1 + u^2)}{(1 - u^2)} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\frac{(1 - u^2)}{u(1 + u^2)}\, du = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)}\, du = \int \frac{dx}{x} + \ln C.$$
Вычисляем интеграл в левой части, разлагая дробно-рациональную функцию на элементарные дроби
$$\frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Cu + B}{1 + u^2},$$
$$1 - u^2 = A(1 + u^2) + u(Cu + B),$$
$$1 - u^2 = (A + C)u^2 + Bu + A,$$
откуда следует, что $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$. Интегрируя обе части уравнения, получаем
$$\ln u - \ln|1 + u^2| - \ln|x| = \ln C$$
или
$$\ln \frac{u}{(1 + u^2)x} = \ln C \Rightarrow \frac{u}{(1 + u^2)x} = C.$$

Подставляя значение $u = \frac{y}{x}$ и освобождаясь от знаменателя, находим

$$x^2 + y^2 = C_1 y, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{1}{C}$$

Получили семейство кругов, касающихся оси Ox в начале координат. Кроме того, решением является прямая $y = 0$.

Пример 9. Проинтегрировать уравнение

$$(x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$$

— однородное уравнение.

Положим $\frac{y}{x} = u$, $y = xu$, $y' = xu' + u$. Тогда

$$xu' + u = \frac{1 + u^2}{2u} \Rightarrow xu' = \frac{1 + u^2 - 2u^2}{2t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xu' = \frac{1 - u^2}{2u} \Rightarrow u' = \frac{1 - u^2}{2u} \cdot \frac{1}{x}$$

— уравнение с разделяющимися переменными. $\frac{2u\, du}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$ интегрируем

$$-\ln|1 - u^2| = \ln|x| - \ln C,$$

потенцируем

$$x(1 - u^2) = C.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C \Rightarrow x^2 - y^2 = Cx$$

— общий интеграл.

Ответ: $x^2 - y^2 = Cx$.

II. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2},$$

не являющееся однородным. Пусть, по крайней мере, одно из чисел c_1 или c_2 не равно нулю. Тогда, если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то это уравнение можно привести к однородному путем введения новых переменных X, Y по формулам

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

где x_0 и y_0 выбираются так, чтобы в новых переменных уравнение стало однородным.

Действительно, так как $dx = dX$, $dy = dY$, то $y' = \frac{dY}{dX}$. Подставляя

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0, \quad y' = \frac{dY}{dX}$$

в данное уравнение, получим

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2X + b_2Y + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}.$$

Для определения x_0, y_0 получаем два уравнения

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Так как определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение.

В результате получаем уравнение, однородное относительно новых переменных

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}.$$

Пример 10. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решение. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то данное уравнение можно свести к однородному. Для этого вводим новые переменные

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0.$$

Тогда $dx = dX$, $dy = dY$ и $y' = \frac{dY}{dX}$ и уравнение принимает вид

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y + (x_0 - y_0 + 1)}{X + Y + (x_0 + y_0 - 3)}.$$

Выберем x_0, y_0 таким образом, чтобы выражения в скобках обратились в нуль. Решая эту систему, получаем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Исходное уравнение принимает вид

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Это уравнение является однородным. Решаем его:

$$\frac{Y}{X} = u \Rightarrow Y = uX, \quad \frac{dY}{dX} = u + X \cdot u'.$$

Подставим Y и $\frac{dY}{dX}$ в уравнение.

$$u + Xu' = \frac{1-u}{1+u}.$$

Отсюда

$$Xu' = \frac{1-u}{1+u} - u \Rightarrow Xu' = \frac{1-2u-u^2}{1+u}; \quad Xu' = -\frac{u^2+2u-1}{1+u}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Полагая, что $u^2 + 2u - 1 \neq 0$, разделим переменные

$$\frac{dX}{X} = -\frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\int \frac{dX}{X} = -\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0.$$

Вычислив интегралы, будем иметь

$$\ln|X| = -\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1| + \ln|C_1|.$$

Потенцируя, получаем

$$X = \frac{C_1}{\sqrt{u^2+2u-1}}.$$

Подставляя вместо $u = \frac{Y}{X}$, получим

$$X = \frac{C_1}{\sqrt{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2\left(\frac{Y}{X}\right) - 1}}.$$

Переходя к старым переменным, получим общий интеграл исходного уравнения

$$(x-1) = \frac{C_1}{\sqrt{\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 1}}.$$

III. Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{а} \quad \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{a_1}{a_2}.$$

В этом случае $a_2 = \lambda a_1$ и $b_2 = \lambda b_1$, поэтому уравнение можно записать в виде
$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}.$$
Такое уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными путем замены
$$z = a_1x + b_1y.$$

Пример 11. Найти общий интеграл уравнения
$$y' = \frac{x + y - 2}{-2x - 2y + 3}.$$

Решение. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Уравнение преобразуется к виду
$$y' = \frac{(x + y) - 2}{-2(x + y) + 3}.$$
Вводим новую функцию
$$z = x + y \Rightarrow y = z - x, \quad y' = z' - 1.$$
Подставляем в уравнение
$$z' - 1 = \frac{z - 2}{-2z + 3}.$$
Отсюда
$$z' = \frac{-z + 1}{-2z + 3}.$$
Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными
$$dx = \frac{2z - 3}{z - 1}\, dz.$$
Общий интеграл уравнения
$$x = 2z - \ln|z - 1| + \ln C,$$
так как
$$\int \frac{2z - 3}{z - 1}\, dz = \int \left(2 - \frac{1}{z - 1}\right) dz = 2z - \ln|z - 1|.$$
Потенцируя обе части общего интеграла, получаем
$$e^x = \frac{Ce^{2z}}{z - 1}.$$
Это выражение запишем в виде
$$e^x(z - 1) = Ce^{2z}.$$

Подставив сюда $z = x + y$ и сократив на $e^z \neq 0$, получим

$$x + y - 1 = Ce^{x+2y}$$

— общий интеграл исходного уравнения, где C — произвольная постоянная.

Задачи для самостоятельного решения

С помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений:

389. $y' = x + y$;

390. $y' = y - x^2$;

391. $2(y + y') = x + 3$;

392. $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$;

393. $(y^2 + 1)y' = y - x$;

394. $yy' + x = 0$;

395. $xy' = 2y$;

396. $xy' + y = 0$;

397. $y' + y = (x - y)^2$;

398. $y' = x - e^y$;

399. $y(y' + x) = 1$.

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

400. $y' = \sqrt[3]{x^2}$, $y(0) = 1$;

401. $y' = \frac{3}{x}$, $y(1) = 2$;

402. $y' = e^{2x}$, $y(0) = 0$;

403. $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

404. $y' = \cos^3 x$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$;

405. $y' = \frac{1}{4+x^2}$, $y(2) = \frac{\pi}{8}$;

406. $y' = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$;

407. $y' = -y$, $y(2) = 4$;

408. $y' = \frac{1}{y^2}$, $y(1) = 1$;

409. $y' = y^3$, $y(0) = 1$.

Решить данные уравнения. Найти также решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия):

410. $\sin x\, dx + \cos 2y\, dy = 0$;

411. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{4+y^2}} = 0$;

412. $xe^{x^2}\, dx + \operatorname{tg} y\, dy = 0$;

413. $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$, $y(1) = \sqrt{3}$;

414. $\sqrt{x}\, dx + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$;

415. $(x+1)^3\,dy-(y-2)^2\,dx=0$;
416. $\sec^2 x\sec y\,dx+\operatorname{ctg} x\,\sin y\,dy=0$;
417. $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})y'-y=0$;
418. $y=y'\cos^2 x\ln y,\ y(\pi)=1$;
419. $x(1+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0$;
420. $yxe^{x^2}\,dx+(1+y)\,dy=0$;
421. $x(1+y^2)\,dx+e^x\,dy=0,\ y(0)=0$;
422. $\sqrt[3]{y^2}\,dx-\frac{1}{3}\,dy=0$;
423. $y'=y^2\cos 2x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$;
424. $\frac{x\,dx}{1+x^2}+\frac{y^2\,dy}{1+y^3}=0$;
425. $\frac{\operatorname{tg} y\,dx}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg} x\,dy}{\cos^2 y}=0$;
426. $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\frac{dy}{\cos^2 y}=0$;
427. $x^2(1+y)\,dx+(x^3-1)(y-1)\,dy=0$;
428. $2x\,dx+3y\,dy=4x^2y\,dy-2xy^2\,dx$;
429. $y'=y^2\cos x$;
430. $(1+x^2)\,dy-2xy\,dx=0,\ y(0)=1$;
431. $y'=\frac{y+1}{x},\ y(1)=0$;
432. $(1+e^x)yy'=e^x,\ y(0)=1$;
433. $y'\operatorname{ctg} x+y=2,\ y(0)=-1$;
434. $y'=3\sqrt[3]{y^2},\ y(2)=0$;
435. $xy'+y=y^2,\ y(1)=0,5$;
436. $2x^2yy'+y^2=2$;
437. $y'-xy^2=2xy$;
438. $e^{-x}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=1$;
439. $y'=10^{x+y}$;
440. $xy\,dx+(x+1)\,dy=0$;
441. $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy$;
442. $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$;
443. $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$;
444. $x^2y^2y'+1=y$;
445. $y\frac{dy}{dx}+x=t$.

Уравнения вида $y'=f(ax+by)$ приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z=ax+by$ (или $z=ax+by+c$, где c — любое число).

446. $y'=\cos(y-x)$;
447. $y'-y=2x-3$;
448. $(x+2y)y'=1,\ y(0)=-1$;
449. $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Решить уравнения:

450. $y' = \frac{y}{x+y}$;
451. $x\,dy = y(1 + \ln y - \ln x)\,dx$;
452. $y' = \frac{-x+2y-4}{2x-y+5}$;
453. $y' = -\frac{2x+3y-1}{4x+6y-5}$;
454. $y^2 + x^2y' = xyy'$;
455. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$;
456. $xy' - y = x\ln\frac{y}{x}$;
457. $xy' = y - xe^{y/x}$;
458. $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x+y}{x}$;
459. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$;
460. $(y + \sqrt{xy})\,dx = x\,dy$;
461. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
462. $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$;
463. $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$;
464. $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$;
465. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$;
466. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$;
467. $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$;
468. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;
469. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

§6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение вида:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{22}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — функции, непрерывные на заданном интервале (a, b).

Замечание. Некоторые уравнения становятся линейными, если в них поменять ролями функцию и аргумент.

6.1. Метод Бернулли решения линейных уравнений

По методу Бернулли решение линейного уравнения ищется в виде

$$y = u(x)v(x),$$

где $u(x)$, $v(x)$ — неизвестные функции.

Найдем $y'(x)$ и подставим в уравнение (22):

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$
$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + P(x) \cdot u(x)v(x) = Q(x).$$

Далее сгруппируем второй и третий члены этого уравнения и вынесем за скобки $u(x)$:

$$u'(x)v(x) + u(x)[v'(x) + P(x) \cdot v(x)] = Q(x). \tag{23}$$

Выберем теперь функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, то есть $v(x)$ находим из уравнения

$$v'(x) + P(x)v(x) = 0. \tag{24}$$

Решаем это уравнение

$$\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x) = 0, \quad dv(x) + P(x)v(x)\,dx = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv(x)}{v(x)} = -P(x)\,dx, \quad \int \frac{dv(x)}{v(x)} = -\int P(x)\,dx$$
$$\ln|v(x)| = -\int P(x)\,dx + \ln C;$$

потенцируя обе части, получим

$$v(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Мы получили целое семейство функций $v(x)$. Нам достаточно выбрать одну функцию этого семейства. Выберем ту, которая получается при $c = 1$

$$v(x) = e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Для нахождения $u(x)$ подставим найденное $v(x)$ в уравнение (23), получим

$$u'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x).$$

Решаем это уравнение

$$\frac{du(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}, u = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C,$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя $u(x)$ и $v(x)$ в $y = u(x) \cdot v(x)$, получаем решение данного уравнения в виде

$$y(x) = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right] e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{25}$$

Отметим, что при решении конкретных уравнений нецелесообразно пользоваться громоздкой и трудно запоминаемой формулой (25), а проще усвоить изложенный способ нахождения общего решения линейного уравнения и применять его в каждом конкретном случае.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение. Данное уравнение является линейным. Решение ищем в виде $y = uv$. Найдем y'

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставим y и y' в данное уравнение

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2. \tag{26}$$

Найдем функцию v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль.

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\ln|v| = \ln|cx|.$$

Нам нужно найти одну какую-либо функцию v, положим $c = 1$. Получим

$$v = x.$$

Подставляем $v = x$ в уравнение (26):

$$xu' = x^2 \Rightarrow du = x\,dx \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Подставляя найденные u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - 2xy = \sqrt{x}\,e^{x^2}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Общее решение ищем в виде $y = uv$. Найдем y'

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставляем y и y' в данное уравнение, получаем

$$u'v + u(v' - 2xv) = \sqrt{x}\, e^{x^2}. \tag{27}$$

Найдем функцию v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль

$$v' - 2xv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2xv.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dv}{v} = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 2\int x\,dx \Rightarrow \ln|v| = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Подставляем $v = e^{x^2}$ в уравнение (27):

$$u'e^{x^2} = \sqrt{x}\, e^{x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sqrt{x} \Rightarrow u = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + c.$$

Подставляя найденные значения u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = \left(\frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + c\right) e^{x^2}.$$

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 1 + x^2,$$

удовлетворяющее условию $y(1) = 0$.

Решение. Разделим обе части данного уравнения на $(1 + x^2)$

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2}\, y = 1.$$

Общее решение этого уравнения ищем в виде $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение и преобразуем его:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{1 + x^2}\, v\right) = 1. \tag{28}$$

Далее найдем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль:

$$v' - \frac{2xv}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2x\,dx}{1 + x^2}$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{x\,dx}{1 + x^2} \Rightarrow \ln|v| = \ln|1 + x^2| \Rightarrow v = 1 + x^2.$$

Подставляя $v = 1 + x^2$ в уравнение (28), получим

$$u'(1 + x^2) = 1.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{1 + x^2} \Rightarrow u = \operatorname{arctg} x + c.$$

Подставляя найденные u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = (\operatorname{arctg} x + c)(1 + x^2).$$

Найдем теперь решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$. Подставляем $x = 1$, $y = 0$ в общее решение

$$0 = 2(\operatorname{arctg} 1 + c), \quad 0 = 2\left(\frac{\pi}{4} + c\right) \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$, имеет вид

$$y = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\right)(1 + x^2).$$

6.2. Метод вариации произвольной постоянной решения линейных уравнений

Метод вариации произвольной постоянной решения линейного неоднородного уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

состоит в следующем.

Сначала ищется решение однородного уравнения, соответствующего линейному уравнению:

$$y' + P(x)y = 0.$$

Затем в общем решении однородного уравнения постоянную C считают некоторой дифференцируемой функцией от x: $C = C(x)$. Эту функцию находят из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, которое получается в результате подстановки общего решения однородного уравнения в неоднородное уравнение.

Пример 4. Решить уравнение

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Сначала находим общее решение однородного уравнения, соответствующего данному:

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

Разделяем переменные и после интегрирования находим $y = C\cos x$, где C — произвольная постоянная.

Для получения всех решений исходного уравнения считаем $C = C(x)$ и требуем, чтобы функция $y = C(x)\cos x$ удовлетворяла ему. Для этого находим y' и подставляем y, y' в данное уравнение:

$$y' = (C(x)\cos x))' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x,$$

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},$$

откуда, после сокращений, $C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда находим $C(x) = \mathrm{tg}\,x + C_0$, где C_0 — новая произвольная постоянная. Подставив значение $C(x)$ в равенство $y = C(x)\cos x$, окончательно получим

$$y = C(x)\cos x = (\mathrm{tg}\,x + C_0)\cos x = \sin x + C_0\cos x.$$

Замечание. Для новой произвольной постоянной можно использовать старое обозначение C. Таким образом, в рассмотренном примере $y = \sin x + C\cos x$ есть общее решение, а C — произвольная постоянная.

Пример 5. Решить уравнение

$$(2x+1)y' = 4x + 2y.$$

Решение. Решаем соответствующее однородное уравнение

$$(2x+1)y' = 2y.$$

Его общее решение имеет вид $y = C(2x+1)$. Применим метод вариации произвольной постоянной. Имеем $y = C(x)(2x+1)$, находим y' и подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$\left(C'(x)(2x+1) + 2C(x)\right)(2x+1) = 4x + 2C(x)(2x+1) \;\Rightarrow\; (2x+1)^2C'(x) = 4x.$$

Отсюда находим

$$C(x) = 4\int\frac{x\,dx}{(2x+1)^2} + C_0 = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C_0.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$y = (2x+1)(\ln|2x+1| + C) + 1.$$

6.3. Уравнения Бернулли

Определение 2. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n = \mathrm{const},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — непрерывные функции на заданном интервале (a, b).

Заметим, что при $n = 0$, $n = 1$ мы получаем линейные уравнения.

Уравнение Бернулли можно привести к линейному с помощью введения новой переменной. Разделим обе части уравнения Бернулли на y^n $(y \neq 0)$:

$$\frac{1}{y^n}\,y' + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$$

и введем новую переменную z по формуле

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}.$$

Тогда

$$y' = \frac{1-n}{y^n}\,y'$$

и уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x)$$

или

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Относительно z получили линейное уравнение. Если найти общее решение этого уравнения и вместо z подставить $z = y^{1-n}$, то получим общий интеграл уравнения Бернулли. Если $n > 0$, то уравнение Бернулли имеет еще решение $y = 0$.

Замечание. Уравнение Бернулли можно решать так же, как и линейное дифференциальное уравнение, то есть искать его решение в виде $y = uv$.

Пример 6. Найти множество всех решений уравнения

$$y' - \frac{y'}{2x} = \frac{x^2}{2y}, \quad x > 0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. В данном случае $n = -1$. Решение ищем в виде $y = uv$. Найдем y' и подставим y и y' в данное уравнение:

$$y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \frac{uv}{2x} = \frac{x^2}{2uv}.$$

Преобразуем уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{2x}\right) = \frac{x^2}{uv} \tag{29}$$

и найдем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль:

$$v' - \frac{v}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|v| = \frac{1}{2}\ln|x| \Rightarrow v = \sqrt{x}$$

Подставляя $v = \sqrt{x}$ в уравнение (29), получим:

$$u'v = \frac{x^2}{2uv} \Rightarrow \frac{du}{dx}\sqrt{x} = \frac{x^2}{u\sqrt{x}} \Rightarrow u\,du = \frac{x\,dx}{2} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{x^2}{4} + c_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u^2 = \frac{x^2}{2} + c, \quad \text{где } c = 2c_1.$$

Отсюда

$$u = \pm\sqrt{\frac{x^2}{2} + c}.$$

Подставляя найденные u, v в $y = uv$, получим:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2} + cx}.$$

Пример 7. Найти решение уравнения $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, при этом $n = \frac{1}{2}$. Ищем решение в виде $y = uv$. Находим y' и подставляем y и $y' = u'v + uv'$ в данное уравнение

$$u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv}.$$

Преобразуем уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{uv}{x}\right) = x\sqrt{uv} \tag{30}$$

и находим v:

$$v' - \frac{4v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = 4\ln|x| \Rightarrow v = x^4.$$

Подставляя $v = x^4$ в уравнение (30), получаем

$$x^4\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\cdot x^2 \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow 2\sqrt{u} = \ln|x| + c \Rightarrow u = \frac{1}{4}(\ln|x| + c)^2.$$

Подставляя найденные значения u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = \frac{1}{4}\,x^4(\ln|x| + c)^2.$$

Найдем теперь решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$. Подставляя в общее решение $x = 1$, $y = 1$, получим $c = 2$. Таким образом, решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, имеет вид

$$y = \frac{1}{4}\,x^4(\ln|x| + 2)^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение или решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

470. $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x$;

471. $y' - y = e^x$;

472. $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = -3$, $y(-1) = 1$;

473. $y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;

474. $(1 + x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$, $y(1) = 0$;

475. $y' + \frac{y}{x} = x^2$;

476. $y' - y\operatorname{tg} x = \cos x$;

477. $y' + 2xy = x$;

478. $y' - 4y = e^{2x}$;

479. $y' + \frac{x}{1-x^2}\,y = 1$;

480. $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$;

481. $y' - \frac{x}{x^2+1}\,y = x$, $y(1) = 0$;

482. $y' + y + \frac{4x(x+1)}{y} = 0$, $y(0) = 1$;

483. $xy' - 2y = 2x^4$;

484. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$;

485. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$;

486. $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$;

487. $y' + y = x\sqrt{y}$;

488. $x^2y^2y' + xy^3 = 1$;

489. $\cos y\,dx = (x + 2\cos y)\sin y\,dy$.

§7. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

7.1. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{31}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, то есть

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Чтобы решить уравнение (31), надо найти функцию $F(x,y)$, полный дифференциал которой равен левой части уравнения (31)

$$dF(x,y) = F'_x\,dx + F'_y\,dy.$$

Тогда общее решение уравнения (31) можно написать в виде

$$F(x,y) = c,$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 1. Решить уравнение

$$(2x + 3x^2y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0. \tag{32}$$

Решение. Найдем частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial(2x+3x^2y)}{\partial y} = 3x^2; \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$, то уравнение (32) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем $F(x,y)$:

$$F'_x = 2x + 3x^2y; \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \tag{33}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (33), считая y постоянным, вместо постоянной интегрирования поставим $\varphi(y)$ неизвестную функцию от y

$$F(x,y) = \int (2x + 3x^2y)\,dx = x^2 + x^3y + \varphi(y).$$

Далее найдем F'_y и подставим во второе уравнение (33)

$$F'_y = x^3 - 3y^2; \quad \varphi'(y) = -3y^2; \quad \varphi(y) = -3y^2; \quad \varphi(y) = -y^3 + \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$F(x,y) = x^2 + x^3y - y^3$$

и общее решение имеет вид:

$$x^2 + x^3 y - y^3 = c.$$

7.2. Интегрирующий множитель

Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{34}$$

называется такая функция $m(x, y) \not\equiv 0$, после умножения на которую уравнение (34) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель существует, если функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно. Но общего метода для его нахождения нет. Для решения некоторых уравнений можно применить метод выделения полных дифференциалов, используя формулы

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy; \qquad dy^2 = 2y\,dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}; \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y} \text{ и т.д.}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y\,dx - (4x^2 y + x)\,dy = 0. \tag{35}$$

Сначала выделяем группу членов, представляющую собой полный дифференциал

$$y\,dx - x\,dy = -x^2\,d(y/x).$$

Тогда делим уравнение на $-x^2$, получим

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4y\,dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0.$$

Это уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя, получим

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их:

490. $2xy\,dy + (x^2 - y^2)\,dy = 0;$

491. $(2 - 9xy^2)\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0;$

492. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0;$

493. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0;$

494. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3+5y}{y^3} = 0$;

495. $2x(1+\sqrt{x^2y^2})\,dx - (\sqrt{x^2-y})\,dy = 0$;

496. $(1+y^2\sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$;

497. $3x^2(1+\ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\,dy$;

498. $y^2\,dx - (xy+x^3)\,dy = 3$;

499. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0$.

Разные уравнения первого порядка:

500. $xy' + x^2 + xy - y = 0$;

501. $2xy' + y^2 = 1$;

502. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$;

503. $(xy'+y)^2 = x^2y'$;

504. $y - y' = y^2 + xy'$;

505. $(x+2y^3)y' = y$;

506. $y'^3 - y'e^{2x} = 0$;

507. $x^2y' = y(x+y)$;

508. $(1-x^2)\,dy + xy\,dx = 0$;

509. $y'^2 + 2(x-1)y' - 2y = 0$;

510. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$;

511. $xy' - 2xy = 3y$;

512. $x + yy' = y^2(1+y'^2)$;

513. $y = (xy'+2y)^2$;

514. $y' = \frac{1}{x-y^2}$;

515. $y'^3 + (3x-6)y' = 3y$;

516. $x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}$;

517. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$;

518. $(x+y)^2y' = 1$;

519. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$.

§8. Дифференциальные уравнения второго порядка. Уравнения, допускающие понижение порядка

Среди уравнений второго порядка имеются такие типы уравнений, которые могут быть сведены к дифференциальным уравнениям первого порядка. Рассмотрим некоторые из таких типов уравнений.

8.1. Уравнения, не содержащие y в явном виде

Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ явно не содержит y. Обозначим $y' = p$. Тогда $y'' = p'$. Подставив это в уравнение, получим

$$p' = f(x, p).$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка. Его общий интеграл имеет вид

$$y = \int p(x, c_1)\,dx + c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)y'' + xy' = 2.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение не содержит y. Поэтому для его решения положим $y' = p$. Тогда $y'' = p'$. Подставим в данное дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)p' + xp = 2.$$

Относительно новой неизвестной функции p получили линейное уравнение. Решение этого уравнения ищем в виде $p = uv$, $p' = u'v + uv'$. Подставляя в уравнение p, p' и преобразуя это уравнение, получим

$$(1 + x^2)u'v + [(1 + x^2)v' + xv]u = 2.$$

Далее находим v: $(1 + x^2)v' + xv = 0$. Решаем это уравнение:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{x\,dx}{1 + x^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|v| = -\frac{1}{2}\,\ln|1 + x^2| \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Далее находим u:

$$\sqrt{1 + x^2}\,u' = 2 \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + c_1, \quad u = 2\ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + c.$$

Теперь находим p:

$$p = [2\ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + c_1]\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Так как $p = y'$, то

$$y' = [2\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + c_1]\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Находим y:

$$y = \int [2\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + c_1]\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + c_2 = 2\int \ln|x+\sqrt{1+x^2}|\times$$
$$\times d\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + c_1\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + c_2 =$$
$$= \ln^2|x+\sqrt{1+x^2}| + c_1\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + c_2$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \ln^2|x+\sqrt{1+x^2}| + c_1\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + c_2.$$

8.2. Уравнения, не содержащие x в явном виде

Уравнение вида $y'' = f(y, y')$ явно не содержит x. Положим $y' = p(y)$, где $p(y)$ — новая неизвестная функция. Найдем y''. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Подставляя выражения для y, y' в данное уравнение, получим

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Относительно p получили дифференциальное уравнение первого порядка.

Пусть нашли его общее решение

$$p = p(y, c_1),$$

где c_1 — произвольная постоянная. Так как $p = y'$, то $y' = p(y, c_1)$ — это уравнение с разделяющимися переменными.

$$dx = \frac{dy}{p(y, c_1)} \Rightarrow x = \int\frac{dy}{p(y, c_1)} + c_2,$$

где c_2 — произвольная постоянная. В результате получили общий интеграл данного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $yy'' = y'^2$.

Решение. Данное уравнение не содержит явно x. Поэтому для его решения полагаем $y' = p$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Подставляем в уравнение

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} = p \quad (p \neq 0)$$

— уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} + \ln|c_1| \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln|c_1|.$$

Потенцируя обе части этого равенства, получаем $p = c_1 y$. Далее,

$$y' = c_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = c_1 \int dx + \ln c_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|y| = c_1 x + \ln|c_2| \Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x} \text{ — общее решение.}$$

8.3. Уравнения, разрешенные относительно второй производной

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной, имеет вид

$$y'' = f(x).$$

Обозначим $y' = p$, тогда $y'' = p'$ и уравнение принимает вид $p' = f(x)$ — уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dx} = f(x) \Rightarrow dp = f(x)\,dx \Rightarrow \int dp = \int f(x)\,dx + c_1 \Rightarrow p = \int f(x)\,dx + c_1.$$

Далее вместо p подставляем $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + c_1 \Rightarrow dy = \left(\int f(x)\,dx + c_1\right) dx,$$
$$y = \int \left(\int f(x)\,dx\right) dx + c_1 \int dx + c_2,$$
$$y = \int \left(\int f(x)\,dx\right) dx + c_1 x + c_2 \text{ — общее решение.}$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' = x^2$.

Решение. Обозначим $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Подставляем в уравнение

$$p' = x^2 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = x^2 \Rightarrow dp = x^2\,dx,$$

$$p = \int x^2\,dx + c_1 \Rightarrow p = \frac{x^3}{3} + c_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} + c_1 \Rightarrow dy = \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) dx,$$

$$y = \int \frac{x^3}{3}\,dx + c_1 \int dx + c_2,$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \text{ — общее решение.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

520. $(3x+2)y'' + 7y' = 0$;
521. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$;
522. $y^3 y'' + 1 = 0$;
523. $y'^2 - yy'' = y^2 y'$;
524. $y'' = 3\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
525. $xy'' + y' = \sqrt{x}$, $y(1) = 1$, $y(1) = 0$;
526. $2yy'' = y'^2 + 1$;
527. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
528. $1 + y'^2 = 2yy''$;
529. $(x+1)y'' = y' + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

§9. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

9.1. Основные определения

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (36)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ — функции, заданные на некотором интервале.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка; если $f(x) \not\equiv 0$, то линейным неоднородным уравнением.

Общее решение уравнения (36) имеет вид

$$y = \bar{y} + y^*,$$

где $\bar{y}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, y^* — частное (какое-нибудь) решение неоднородного дифференциального уравнения.

Если общее решение однородного уравнения $\bar{y}(x)$ найдено, то частное решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

$$\begin{aligned} &\bar{y}(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \\ &y^*(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n \end{aligned} \tag{37}$$

Функции $c_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} c_1'y_1 + \ldots + c_n'y_n = 0, \\ c_1'y_1' + \ldots + c_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'y^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{38}$$

9.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{39}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{40}$$

и найти его корни λ_1, λ_2, …, λ_n.

Общее решение уравнения (39) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $c_ie^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (40) и слагаемых вида

$$(c_{m+1} + c_{m+2}x + c_{m+3}x^2 + \ldots + c_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x} \tag{41}$$

для каждого кратного корня λ уравнения (40). Все c_i —произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (39) и корни λ могут быть вещественными и комплексными. Если же коэффициенты (39) вещественные, то решение можно тоже записать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$c_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + c_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$ имеет кратность k. Здесь многочлены P_{k-1}, Q_{k-1} степени $k-1$, аналогичные многочлену в (41), их коэффициенты постоянны.

Пример 1. Решить уравнение

$$y^{(\mathrm{V})} - 2y^{(\mathrm{IV})} - 16y' + 32y = 0.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, находим корни

$$(\lambda-2)(\lambda^4-16) = 0 \qquad (\lambda-2)^2(\lambda+2)(\lambda^2+4) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = -2; \quad \lambda_4 = 2i; \quad \lambda_5 = -2i$$

По изложенным выше правилам пишем общее решение

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4\cos 2x + c_5\sin 2x.$$

9.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами состоит из сумм и произведений функций

$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m, \quad e^{ax}, \quad \cos\beta x, \quad \sin\beta x,$$

то частное решение неоднородного уравнения можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)e^{\nu x}$, частное решение имеет вид

$$y^* = x^s Q_m(x)e^{\nu x}. \tag{42}$$

Число $s = 0$, если ν — не корень характеристического уравнения (40), а если ν — корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (42) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если коэффициенты левой части уравнения вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x) \tag{43}$$

частное решение ищется в виде

$$y^* = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x),$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения и s равно кратности корня $\alpha + \beta i$, а R_m, T_m — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней P и Q. Коэффициенты многочленов находятся путем приравнивания их при подобных членах правой и левой частей уравнения.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' - 4y' = x + e^x + \sin x.$$

Решение. Найдем сначала решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' + 3y'' - 4y' = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -4.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде суммы

$$y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^*,$$

где y_1^*, y_2^*, y_3^* — частные решения соответствующих неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} y''' + 3y'' - 4y' &= x, & y_1^* &= x(Ax + B), \\ y''' + 3y'' - 4y' &= e^x, & y_2^* &= Cxe^x, \\ y''' + 3y'' - 4y' &= \sin x, & y_3^* &= D\cos x + E\sin x. \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = x(Ax + B) + Cxe^x + D\cos x + E\sin x.$$

Найдем коэффициенты A, B, C, D, E. Для этого вычислим производные $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime\prime}$, подставим в данное уравнение и приведем подобные члены:

$$y^{*\prime} = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x - D\sin x + E\cos x,$$
$$y^{*\prime\prime} = 2A + 2Ce^x + Cxe^x - D\cos x - E\sin x,$$
$$y^{*\prime\prime\prime} = 3Ce^x + Cxe^x + D\sin x - E\cos x,$$

$$-8Ax + (6A-4B) + 5Ce^x + (-3D-5E)\cos x + (5D-3E)\sin x = \\ = x + e^x + \sin x,$$

$$\begin{array}{l|l} x & \\ x^0 & \\ e^x & \\ \cos x & \\ \sin x & \end{array}\left\{\begin{array}{l} -8A = 1, \\ \ \ 6A - 4B = 0, \\ \ \ 5C = 1, \\ -3D - 5E = 0, \\ \ \ 5D - 3E = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} A = -\frac{1}{8}; \quad B = -\frac{3}{16}; \\ C = \frac{1}{5}; \quad D = \frac{5}{34}; \quad E = -\frac{3}{34}. \end{array}$$

Следовательно,

$$y^* = -\frac{1}{8}\,x\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{5}\,xe^x + \frac{1}{34}\,(5\cos x - 3\sin x).$$

Подставляя $\bar{y}$ и y^* в формулу $y = \bar{y} + y^*$, получим общее решение данного уравнения:

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-4x} - \frac{1}{8}\,x\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{5}\,xe^x + \frac{1}{34}\,(5\cos x - 3\sin x).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} - 3y'' = 9x^2.$$

Решение. Решение y ищем в виде суммы $y = \bar{y} + y^*$. Находим $\bar{y}$:

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \bar{y} = c_1 + c_2x + c_3e^{-\sqrt{3}x} + c_4e^{\sqrt{3}x}.$$

Ищем y^* в виде $y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C)$. Находим производные и подставляем их в исходное уравнение:

$$y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$
$$y^{*\prime} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$
$$y^{*\prime\prime} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$
$$y^{*\prime\prime\prime} = 24Ax + 6B,$$
$$y^{*\mathrm{IV}} = 24A,$$

$$9x^2 = -36Ax^2 - 18Bx + 6C + 24A.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и находим:

$$9 = -36A,\ 0 = -18B,\ -6C + 24A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4},\ B = 0,\ C = -1.$$

Подставляя найденные значения, получаем общее решение уравнения

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-\sqrt{3}x} + C_4e^{\sqrt{3}x} - \frac{x^4}{4} - x^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение:

530. $y^{\mathrm{V}} - y' = x + 1$;
531. $y''' - 3y'' + 2y' = e^{2x} + 10\sin x$;
532. $y^{\mathrm{IV}} - y = 0$;
533. $y^{\mathrm{IV}} - 3y'' = 9x^2$;
534. $y''' + y'' = 1 - 6x^2e^{-x}$.

Решить уравнение:

535. $y'' - 3y' + 2y = e^x$;
536. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$;
537. $y''2y' + 10y = 37\cos 3x$;
538. $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$;
539. $y'' - 5y' + 4y = x - 2$;
540. $y'' + 2y' = x^2 + 1$;
541. $y'' + 2y' - 3y = e^{-2x}$;
542. $y'' + y' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
543. $y'' - 6y' + 8y = 3 - 4x^2$;
544. $y'' + 3y' = 2 + x$;
545. $y'' + 2y' = e^{-2x}$;
546. $y'' + 9y = e^{3x}$;
547. $y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}$;
548. $y'' - 2y' + y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
549. $y'' + 4y = 2x + 1$, $y(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
550. $y'' - y' - 6y = 5\cos x - 2\sin x$;
551. $y'' + y = \cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$;
552. $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$;
553. $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 2e^x + 5\sin 3x$;
554. $y'' + y = 2\sin x + 3\cos x$;
555. $y'' - 4y' + 3y = 5\sin 2x + \cos 2x + e^x$.

Ответы

Глава I

1. $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x.$ **2.** $\frac{x^5}{5}+\frac{5}{6}\,x\sqrt[5]{x}+2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}-\ln|x|+5x.$ **3.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}.$
4. $x^5-\frac{1}{3x^3}.$ **5.** $\frac{5}{6}\,\sqrt[5]{x}\,(x-6).$ **6.** $\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}.$ **7.** $\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|.$
8. $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}.$ **9.** $\frac{3\cdot 4^x}{\ln 4}-\frac{2}{\sqrt{x}}.$ **10.** $2e^x+\frac{1}{2x^2}.$ **11.** $2\operatorname{arctg}x-3\arcsin x.$
12. $\frac{x^?}{3}-x+\operatorname{arctg}x.$ **13.** $e^x+\operatorname{tg}x.$ **14.** $5\sin x-\cos x.$ **15.** $-(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x).$
16. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x.$ **17.** $3\operatorname{tg}x-4\operatorname{ctg}x.$ **18.** $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x.$ **19.** $\cos x-\operatorname{ctg}x.$
20. $\operatorname{tg}x-x.$ **21.** $-(x+\operatorname{ctg}x).$ **22.** $\frac{1}{2}\,(x-\sin x).$ **23.** $\frac{1}{2}\,(x+\sin x).$
24. $x+\cos x.$ **25.** $\frac{(2e)^x}{\ln 2+1}.$ **26.** $\arcsin x-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|.$ **27.** $\frac{\sin 5x}{5}.$
28. $-\frac{\cos 7x}{7}.$ **29.** $4\sin\frac{x}{4}.$ **30.** $-e^{-x}.$ **31.** $2(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}).$ **32.** $\frac{\operatorname{tg}3x}{3}.$
33. $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}.$ **34.** $\frac{(2+5x)^{10}}{50}.$ **35.** $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}.$ **36.** $\frac{1}{3}\,(2x-5)^{\frac{3}{2}}.$
37. $-\frac{3}{28}\,(3-7x)^{\frac{4}{3}}.$ **38.** $\frac{1}{5}\,\ln|5x+2|.$ **39.** $-\frac{1}{3}\,\ln|2-3x|.$ **40.** $\frac{1}{2}\,\ln(x^2+3).$
41. $\ln|\sin x|.$ **42.** $-\ln|\cos x|.$ **43.** $-\frac{1}{3}\,\ln|1+3\cos x|.$ **44.** $-\frac{1}{4(\ln x+1)^4}.$
45. $\frac{1}{3}\,\ln|3+\sin 3x|.$ **46.** $\ln|\sin 2x|.$ **47.** $\frac{\sin^3 x}{3}.$ **48.** $-\frac{\cos^4 x}{4}.$ **49.** $-e^{\cos x}.$
50. $-\frac{1}{3}\,e^{-x^3}.$ **51.** $2e^{\sqrt{x}}.$ **52.** $-\frac{1}{2}\,\operatorname{cosec}^2 x.$ **53.** $\frac{1}{4\cos^4 x}.$ **54.** $\frac{3}{4}\,(2+\ln x)^{\frac{4}{3}}.$
55. $-\frac{2}{15}\,(3+\cos 5x)^{\frac{3}{2}}.$ **56.** $\frac{7}{90}\,(3+5\sin 3x)^{\frac{6}{7}}$ **57.** $\frac{1}{8}\,\ln(5+2e^{4x}).$ **58.** $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}.$
59. $\frac{3}{4}\,(\arcsin x)^{\frac{4}{3}}.$ **60.** $\frac{\sin x-2}{\cos x}.$ **61.** $2\ln|\sin x|-\operatorname{ctg}x.$ **62.** $e^{\sin x}.$ **63.** $e^{\operatorname{tg}x}.$
64. $\frac{5}{18}\,(x^3-8)^{\frac{6}{5}}.$ **65.** $-\frac{2}{75}\,(1-6x^5)^{\frac{5}{4}}.$ **66.** $\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2}.$ **67.** $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}.$ **68.** $\frac{2x+9}{4}\cdot\sqrt{4x+1}.$
69. $\frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}.$ **70.** $\frac{4(17-14x)}{147}\,\sqrt{7x-1}.$ **71.** $e^{\operatorname{arctg}x}.$ **72.** $\frac{1}{2}\,\cos\frac{1}{x^2}.$
73. $-\frac{4^{1-3x}}{3\ln 4}.$ **74.** $-\frac{\arccos^2 x}{2}.$ **75.** $-e^{-\operatorname{tg}x}.$ **76.** $\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}.$
77. $\frac{1}{8}\,\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|.$ **78.** $\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$ **79.** $\arcsin\frac{x}{2}.$ **80.** $\ln|x+\sqrt{4+x^2}|.$
81. $\ln|x+\sqrt{x^2-3}|.$ **82.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|.$ **83.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}.$ **84.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|.$
85. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}}.$ **86.** $\frac{1}{2}\,\arcsin\frac{2x}{5}.$ **87.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\ln|\sqrt{2}\,x+\sqrt{3+2x^2}|.$
88. $\frac{1}{6}\,\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|.$ **89.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\arcsin\frac{\sqrt{15}\,x}{5}.$ **90.** $\frac{1}{2\sqrt{15}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}x}{\sqrt{3}-\sqrt{5}x}\right|.$
91. $\frac{1}{3}\,\ln|3x+\sqrt{9x^2-5}|.$ **92.** $\frac{1}{2}\,\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{2}}.$ **93.** $\frac{1}{4}\,\ln|x^4+\sqrt{x^8-3}|.$
94. $\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{5}}.$ **95.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{5}-\cos 2x}{\sqrt{5}+\cos 2x}\right|.$ **96.** $\frac{1}{4}\,\ln|(x-2)(x+2)^7|.$
97. $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{x^2+1}.$ **98.** $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}.$ **99.** $5\ln|e^x+\sqrt{e^{2x}-4}|.$
100. $\frac{1}{5\sqrt{3}}\,\arcsin(\sqrt{3}\,\sin 5x).$ **101.** $-\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{2\cos\frac{x}{3}}{3}.$ **102.** $\frac{1}{5}\,\arcsin\frac{x^5}{2}.$
103. $\frac{1}{7\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{x^7}{\sqrt{5}}.$ **104.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}.$ **105.** $\operatorname{arctg}(x+2).$ **106.** $\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}.$
107. $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|.$ **108.** $\arcsin\frac{x-2}{2}.$ **109.** $\arcsin\frac{x+1}{2}.$
110. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\arcsin\frac{4x-3}{5}.$ **111.** $\frac{1}{4}\,\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\right|.$ **112.** $\frac{3}{2}\,\ln(x^2-2x+5)+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}.$

113. $\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+3)-\frac{17}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$. **114.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+x-1|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right|$. **115.** $\frac{4}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+29)$. **116.** $-3\sqrt{5-4x-x^2}-8\arcsin\frac{x+2}{3}$. **117.** $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}\right|-\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+3}$. **118.** $26\arcsin\frac{x-3}{2}-5\sqrt{6x-x^2-5}$. **119.** $3\sqrt{6x-x^2}-8\arcsin\frac{x-3}{3}$. **120.** $\frac{1}{2}\sqrt{3x+2x^2}+\frac{9}{4\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right|$. **121.** $4\sqrt{x^2+8x+7}-5\ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+7}|$. **122.** $\frac{7}{2}\ln|x^2-6x+1|+\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-3-2\sqrt{2}}{x-3+2\sqrt{2}}\right|$. **123.** $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|$. **124.** $\frac{3}{2}x^2-3x+8\ln|x+1|$. **125.** $\frac{x^3}{3}-a^2x+a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. **126.** $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}$. **127.** $\frac{(x+4)^2}{2}+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}$. **128.** $\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\ln|2x+1|$. **129.** $2x+\ln(x^2-x+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **130.** $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+9x+27\ln|x-3|$. **131.** $\frac{3}{2}x^2+16x+33\ln(x^2-6x+10)+38\operatorname{arctg}(x-3)$. **132.** $\frac{(x+8)^2}{2}+\frac{55}{2}\ln|x^2-8x+7|+\frac{82}{3}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right|$. **133.** $3x+\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **134.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+7x+13)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}$. **135.** $\frac{x^4}{4}+x^3+3x^2+18x+54\ln|x-3|$. **136.** $x-\frac{5}{2}\ln|x^2+8x-7|+\frac{27}{2\sqrt{23}}\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{23}}{x+4+\sqrt{23}}\right|$. **137.** $x(\ln x-1)$. **138.** $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)$. **139.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}$. **140.** $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-2x$. **141.** $-e^{-x}(x+1)$. **142.** $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1)$. **143.** $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$. **144.** $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)$. **145.** $e^{2x}(x+1)$. **146.** $x\sin x+\cos x$. **147.** $\sin x-x\cos x$. **148.** $\frac{x+1}{3}\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}$. **149.** $(x^2-2)\sin x+2x\cos x$. **150.** $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x$. **151.** $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x$. **152.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$. **153.** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **154.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **155.** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}$. **156.** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg}(1-x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)$. **157.** $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}$. **158.** $x\operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}-\frac{1}{7}\sqrt{7x-1}$. **159.** $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x$. **160.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$. **161.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$. **162.** $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)$. **163.** $\frac{2}{5}e^x\left(2\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$. **164.** $x[1+(\ln x-1)^2]$. **165.** $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}\left(\ln x-\frac{5}{4}\right)$. **166.** $x\ln x(x^2+2)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **167.** $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$. **168.** $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x$. **169.** $\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+x\operatorname{tg}x$. **170.** $-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. **171.** $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$. **172.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|-\frac{\ln(x+2)}{x}$. **173.** $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln|1+x|$. **174.** $\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}(3+\ln x)$. **175.** $\frac{x}{2}\sqrt{7-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}$. **176.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-5}-\frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-5}|$. **177.** $\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$. **178.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}+\ln|x+\sqrt{x^2+2}|$. **179.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x\sqrt{\frac{2}{3}-x^2}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. **180.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}\right|\right)$. **181.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-3}{3}$.

182. $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x}-2\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x}|$. **183.** $\frac{2x+5}{4}\sqrt{x^2+5x+4}-$ $-\frac{9}{8}\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+4}\right|$. **184.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}$. **185.** $\frac{x-2}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}$. **186.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)$. **187.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}\sqrt{2-3\cos^2 x}+\arcsin\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{2}}\right]$. **188.** $\frac{e^x}{2}\sqrt{e^{2x}+3}+$ $+\frac{3}{2}\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+3})$. **189.** $\frac{\sin x}{2}\sqrt{\sin^2 x+3}+\frac{3}{2}\ln|\sin x+\sqrt{\sin^2 x+3}|$. **190.** $e^{\frac{x}{2}}\sqrt{4-e^x}+4\arcsin\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$. **191.** $\frac{\ln x}{2}\sqrt{\ln^2 x+1}+\frac{1}{2}\ln|\ln x+$ $+\sqrt{\ln^2 x+1}|$. **192.** $\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x-3}{3}+\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{3x-x^2}-\frac{2}{3}(3x-x^2)^{\frac{3}{2}}$. **193.** $\frac{1}{6}(5x+2x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{4\sqrt{2}}\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)\sqrt{\frac{5}{2}x+x^2}-\frac{25}{16}\ln\left|x+\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{5}{2}x+x^2}\right|\right]$. **194.** $-\frac{1}{3}(-6x-x^2)^{\frac{3}{2}}-2\left[(x+3)\sqrt{-6x-x^2}+9\arcsin\frac{x+3}{3}\right]$. **195.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. **196.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. **197.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4m}\sin 2mx$. **198.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4m}\sin 2mx$. **199.** $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$. **200.** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$. **201.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. **202.** $\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}-\cos x$. **203.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$. **204.** $\frac{\cos^3\frac{x}{2}}{12}-\frac{\cos\frac{x}{2}}{4}$. **205.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$. **206.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}$. **207.** $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}$. **208.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}$. **209.** $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}$. **210.** $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}$. **211.** $\frac{3}{8}x-\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{16}$. **212.** $3x+4\sin x+\sin 2x$. **213.** $\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}$. **214.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|$. **215.** $3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{6}\right)\right|$. **216.** $\frac{1}{9}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{9x}{2}\right|$. **217.** $\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2}\right)\right|$. **218.** $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right]$. **219.** $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)$. **220.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$. **221.** $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]$. **222.** $\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)$. **223.** $-\frac{1}{12}\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{8}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$. **224.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x$. **225.** $-\frac{1}{\sin x}-\sin x$. **226.** $\frac{1}{\cos x}+\cos x$. **227.** $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. **228.** $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}$. **229.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-\frac{\cos^2 x}{2}$. **230.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$. **231.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x$. **232.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}$. **233.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **234.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|$. **235.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$. **236.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$. **237.** $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. **238.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3\sin^3 x}$. **239.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|$. **240.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|$. **241.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right)$. **242.** $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|$. **243.** $\frac{1}{5}\ln|1-5\operatorname{ctg} x|$. **244.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$. **245.** $-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}$. **246.** $-\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{b}\right)$. **247.** $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|$. **248.** $\operatorname{tg}^2 x$. **249.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg}(e^x)$. **250.** $\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+4\ln(e^x+2)$. **251.** $\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+e^x+\ln|e^x-1|$. **252.** $e^x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$. **253.** $2\ln|e^x-1|-x$. **254.** $e^x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+e^x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}$. **255.** $\frac{3}{2}\ln(e^{2x}+4)-2\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}$. **256.** $\frac{e^{4x}}{4}-\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}-e^x+\ln(e^x+1)$. **257.** $\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$. **258.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg} x$. **259.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

260. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|)$. **261.** $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+\ln|\sin x|$. **262.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)$. **263.** $-(-x^2-8x)^{\frac{3}{2}}-\frac{13}{2}\left[(x+4)\sqrt{-x^2-8x}+16\arcsin\frac{x+4}{4}\right]$. **264.** $\frac{3}{2}x^2-17x+36\ln(x^2+6x+10)-46\operatorname{arctg}(x+3)$. **265.** $\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{2e^x-1-\sqrt{17}}{2e^x-1+\sqrt{17}}\right|-\frac{5}{2}\ln|e^x+4-e^{2x}|$. **266.** $\frac{5}{3}(x^2+3x+5)^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{4}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+3x+5}+\frac{11}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right|\right]$. **267.** $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x)$. **268.** $-\frac{2}{9}(3x^2+8x)^{\frac{3}{2}}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\left[\left(x+\frac{4}{3}\right)\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}-\frac{16}{9}\ln\left|x+\frac{4}{3}+\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}\right|\right]$. **269.** $6\sqrt{x^2+5x+17}-25\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+17}\right|$. **270.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+1)\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}}\right|\right]$. **271.** $4\sqrt{2-x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}$. **272.** $\frac{3}{2}\ln|x^2+10x+1|-\frac{7}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{6}}{x+5+2\sqrt{6}}\right|$. **273.** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. **274.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$. **275.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}$. **276.** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|$. **277.** $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{12}\right)\operatorname{arctg}(2x+1)-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{6}-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$. **278.** $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$. **279.** $-\operatorname{ctg}x\ln(\cos x)-x$. **280.** $2\sqrt{x-3}\ln(x+\sqrt{x^2-9})-4\sqrt{x+3}$. **281.** $\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right)$. **282.** $\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{5x}{2}+1}{2\sqrt{2}}$. **283.** $\frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-2+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-2-\sqrt{5}}\right|$. **284.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}}$. **285.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\sqrt{5}}\right|$. **286.** $\frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}3x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg}3x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|$. **287.** $\frac{10}{3}$. **288.** $\frac{1}{3}$. **289.** 2. **290.** 0. **291.** 5π. **292.** 1. **293.** $\operatorname{arctg}2$. **294.** $\frac{1}{4}\ln\frac{4}{e}$. **295.** $\frac{5}{6\sqrt{2}}$. **296.** $\frac{2}{3}$. **297.** $\frac{2}{15}$. **298.** $\frac{3(e-1)}{e}$. **299.** 0. **300.** $\frac{e^2-5}{e}$. **301.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$. **302.** $\frac{2}{15}R^5$. **303.** $e-2$. **304.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **305.** 1. **306.** $\frac{4}{3}$. **307.** $\frac{8}{3}$. **308.** $\frac{4}{3}$. **309.** $\frac{2}{3}$. **310.** $\frac{1}{3}$. **311.** $\frac{1}{6}$. **312.** $\frac{1}{2}$. **313.** $\frac{\pi-2}{4}$. **314.** $2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$. **315.** $\frac{3}{4}$. **316.** $\frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}$. **317.** $\frac{32}{3}$. **318.** $\frac{8}{3}$. **319.** $12-5\ln 5$. **320.** $\frac{3}{2}-2\ln 2$. **321.** $4\ln(4e)$. **322.** $\frac{3\pi}{2}a^2$. **323.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **324.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **325.** $\frac{9\pi}{2}$. **326.** $\frac{a^2(e^{4\pi}-1)}{4}$. **327.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **328.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **329.** $3\pi a^2$. **330.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **331.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **332.** $\frac{19}{3}$, $\frac{2e-1}{3}$, a^2, 2, $\frac{3\pi a^2}{8}$, $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. **333.** $\frac{256}{15}\pi$, 8π. **334.** $\frac{\pi}{30}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11}{30}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$. **335.** $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$, 2π. **336.** $\frac{128}{5}\pi$, 8π. **337.** $\frac{178}{15}\pi$, $\frac{21}{2}\pi$. **338.** $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{5}$. **339.** $\frac{4\pi ab^2}{3}$. **340.** $\pi(e-2)$, $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$, πe, $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$, $\frac{\pi(e^2+5)}{2}$, $\pi(4-e)$. **341.** $\frac{\pi^2}{2}$, $2\pi^2$, $6\pi^2$, $2\pi(\pi+2)$, $2\pi(\pi+4)$, $\frac{\pi(8-\pi)}{2}$, $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **342.** $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **343.** $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{\pi}{6}$. **344.** $\frac{\pi^2}{8}$, $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$. **345.** $\frac{\pi^2}{2}$, $10\pi^2$, $6\pi^2$, $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **346.** $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{15}$, $\frac{16\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{5}$. **347.** 12π, 24π. **348.** $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$, $\pi\ln 2$. **349.** $\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$. **350.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **351.** $\frac{670}{27}$. **352.** $\frac{28}{3}$. **353.** $\frac{a(e^2-1)}{2e}$. **354.** $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$. **355.** $\ln 3$.

356. $6a$. **357.** $8a$. **358.** 32. **359.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.
360. $\frac{e^2+1}{4}$. **361.** 1. **362.** $\frac{1}{\alpha-1}$ при $\alpha>1$; расходится при $\alpha\leqslant 1$.
363. $\frac{1}{4}\ln 3$. **364.** Расходится. **365.** Расходится. **366.** Расходится.
367. -1. **368.** $\frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha<1$; расходится при $\alpha\geqslant 1$. **369.** $\frac{\pi}{2}$. **370.** -1.
371. 2. **372.** Расходится. **373.** 0. **374.** Расходится. **375.** $6\sqrt[3]{2}$.
376. Расходится. **377.** Расходится. **378.** $\frac{1}{2}$.

Глава II

379. $y=e^{xy'/y}$. **380.** $y'=3y^{2/3}$. **381.** $y^2+y'^2=1$. **382.** $x^2y'-xy=yy'$.
383. $2xyy'-y^2=2x^3$. **384.** $y'^3=4y(xy'-2y)$. **385.** $x(x-2)y''-(x^2-2)y'+$
$+2(x-1)y=0$. **386.** $(yy''+y'^2)=-y^2y''$. **387.** $y''y^2(\ln y-1)=y'^2(xy'-y)$.
388. $y'''y'=3y''^2$. **400.** $y=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+1$. **401.** $y=3\ln x+2$. **402.** $y=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$.
403. $y=-\operatorname{ctg}x+1$. **404.** $y=\frac{1}{3}\sin 3x$. **405.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **406.** $y=-\frac{1}{x}+1$.
407. $x=-\ln|y|+2(1+\ln 2)$. **408.** $x=\frac{y^3}{3}+\frac{2}{3}$. **409.** $x=-\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{2}$.
410. $-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2y=c$. **411.** $\arcsin x+\ln|y+\sqrt{4+y^2}|=c$.
412. $\frac{1}{2}e^{x^2}-\ln|\cos y|=c$. **413.** $\ln|x|+\operatorname{arctg}y=\frac{\pi}{3}$. **414.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\operatorname{tg}y=1$.
415. $-\frac{1}{y-2}+\frac{1}{2(x+1)^2}=c$. **416.** $\operatorname{tg}^2x+\sin^2y=c$. **417.** $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=c$.
418. $\ln^2y=2\operatorname{tg}x$. **419.** $(1\mp x^2)(1+y^2)=c$. **420.** $\frac{1}{2}e^{x^2}+\ln|y|+y=c$.
421. $-xe^{-x}-e^{-x}+\operatorname{arctg}y=-1$. **422.** $y=(x-c)^3$. **423.** $y=\frac{2}{2-\sin 2x}$.
424. $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1+y^3}=c$. **425.** $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=c$. **426.** $\operatorname{tg}y=c(1-e^x)^3$.
427. $3y+\ln\frac{|x^3-1|}{(y+1)^6}=c$. **428.** $\frac{4x^2-3}{(1+y^2)^2}=c$. **429.** $y=\frac{1}{c-\sin x}$. **430.** $y=1+x^2$.
431. $y=x-1$. **432.** $2e^{\frac{y^2}{2}}=\sqrt{e}\,(1+e^x)$. **433.** $y=2-3\cos x$.
434. $y=(x-2)^3$. **435.** $y(1+x)=1$. **436.** $y^2-2=ce^{1/x}$.
437. $(ce^{-x^2}-1)y=2$. **438.** $e^{-y}=1+ce^x$. **439.** $y=-\lg(c-10^x)$.
440. $y=c(x+1)e^{-x}$. **441.** $\ln|x|=c+\sqrt{y^2+1}$. **442.** $y(\ln|x^2-1|+1)=1$.
443. $\ln|xy|+x-y=c$. **444.** $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+c$. **445.** $y^2+x^2-2x=c$.
446. $\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}=x+c$. **447.** $2x+y-1=ce^x$. **448.** $x+2y+2=0$.
449. $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x+c$. **450.** $y=ce^{\frac{x}{y}}$. **451.** $y=xe^{cx}$.
452. $(x+y+1)^3=c(x-y+3)$. **453.** $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=c$.
454. $y=ce^{y/x}$. **455.** $y^2-x^2=cy$. **456.** $\sin\frac{y}{x}=cx$. **457.** $y=-x\ln\ln cx$.
458. $\ln\frac{x+y}{x}=cx$. **459.** $\ln cx=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$. **460.** $x\ln cx=2\sqrt{xy}$.
461. $\arcsin\frac{y}{x}=\ln|cx|$. **462.** $(y-2x)^3=c(y-x-1)^2$. **463.** $2x+y-1=ce^{2y-x}$.
464. $(y-x+2)^2+2x=c$. **465.** $x+y=cx^2$. **466.** $\ln(x^2+y^2)=c-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
467. $x(y-x)=cy$. **468.** $x=\pm y\sqrt{\ln cx}$. **469.** $y=ce^{y/x}$.
470. $y=(x+c)\sin x$. **471.** $y=(x+c)e^x$. **472.** $y=2x^2+\frac{1}{x}$.

473. $y=(\operatorname{tg}x+c)\cos x$. **474.** $y=\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}\right)(1+x^2)$. **475.** $y=\frac{c}{x}+\frac{x^3}{4}$. **476.** $y=\frac{c}{\cos x}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2\cos x}$. **477.** $y=ce^{-x^2}+\frac{1}{2}$. **478.** $y=ce^{4x}-\frac{1}{2}e^{2x}$. **479.** $y=\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x+c)$. **480.** $y=\frac{x^2+c}{\cos x}$. **481.** $y=1+x^2$. **482.** $y=e^{-x}\sqrt{1-4x^2e^{2x}}$. **483.** $y=cx^2+x^4$. **484.** $y=(2x+1)(c+\ln|2x+1|)+1$. **485.** $y=\sin x+c\cos x$. **486.** $y=e^x(\ln|x|+c)$. **487.** $y=e^{-x}(xe^{\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+c)^2$. **488.** $y=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{c}{x^3}}$. **489.** $x=-\frac{1}{2}\cos 2y\cdot\frac{1}{\cos y}+\frac{c}{\cos y}$. **490.** $3x^2y-y^3=c$. **491.** $x^2-3x^3y^3+y^4=0$. **492.** $xe^{-y}-y^2=c$. **493.** $4y\ln x+y^4=c$. **494.** $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=c$. **495.** $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y^2)^{3/2}=c$. **496.** $x-y^2\cos^2 x=c$. **497.** $x^3+x^3\ln y-y^2=c$. **498.** $y^2=x^2(c-2y)$. **499.** $\ln|y|-ye^{-x}=c$. **500.** $y=x(ce^{-x}-1)$. **501.** $(cx+1)y=cx-1$, $y=1$. **502.** $y(x^2-c)=x$. **503.** $x(c-y)=c^2$, $x=4y$. **504.** $y(x+c)=x+1$, $y=0$. **505.** $x=cy+y^3$, $y=0$. **506.** $y=c_1$, $y=c+e^x$. **507.** $y\ln cx=-x$, $y=0$. **508.** $y^2=c(x^2-1)$, $x=\pm1$. **509.** $2y=2c(x-1)+c^2$, $2y=-(x-1)^2$. **510.** $x=cy+\ln^2 y$. **511.** $y=cx^2e^{-3/x}$. **512.** $(x-c)^2+y^2=c$, $4(y^2-x)=1$. **513.** $4x^2y=(x+2c)^2$, $y=0$. **514.** $x=ce^y+y^2+2y+2$, $xy=1$. **515.** $3y=3c(x-2)+c^3$, $9y^2=4(2-x)^3$. **516.** $y^2=c(xy-1)$, $xy=1$. **517.** $4(x-c)^3=27(y-c)^2$, $y=x-1$. **518.** $x+y=\operatorname{tg}(y-c)$. **519.** $x^3+y^2+7x=c$. **520.** $y=c_2+c_1(3x+2)^{4/3}$. **521.** $y=-\frac{x}{c_1}+\frac{c_1^2+1}{c_1^2}\ln|1+c_1x|+c_2$. **522.** $c_1y^2+1=c_1^2(x+c_2)^2$. **523.** $x=c_1-\frac{1}{c_2}\ln\left|\frac{y}{y+c_2}\right|$. **524.** $y=\frac{1}{16}(x+2)^4$. **525.** $y=\frac{4}{9}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{5}{9}$. **526.** $4(c_1y-1)=c_1^2(x+c_2)$. **527.** $y=e^x$. **528.** $y=\frac{1}{4c_1}\left[c_1^2(x-c_2)^2+4\right]$. **529.** $y=\frac{3(x+1)^2}{2}-x-\frac{1}{2}$. **530.** $y=c_1+c_2e^2+c_3e^{-x}+c_4\cos x+c_5\sin x-\frac{1}{2}x^2-x$. **531.** $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+3\sin x-\cos x$. **532.** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+$ $+c_4\sin x$. **533.** $y=c_1+c_2x+c_3e^{-\sqrt{3}\,x}+c_3e^{\sqrt{3}\,x}-\frac{x^4}{4}-x^2$. **534.** $y=$ $=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-2x(x^2+6x+18)e^{-x}$. **535.** $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$. **536.** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}+5x^2-12x+12$. **537.** $y=e^x(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)+$ $+\cos 3x-6\sin 3x$. **538.** $y=e^{3x}(c_1+c_2x)+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x$. **539.** $y=c_1e^{4x}+c_2e^x+$ $+\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}$. **540.** $y=c_1+c_2e^{-2x}+x\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)$. **541.** $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\frac{1}{3}e^{-2x}$. **542.** $y=4-3e^{-x}-x\left(\frac{x}{2}+1\right)e^{-x}$. **543.** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{16}$. **544.** $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{x^2}{6}+\frac{5}{9}x$. **545.** $y=c_1+c_2e^{-2x}-\frac{x}{2}e^{-2x}$. **546.** $y=c_1\sin 3x+$ $+c_2\cos 3x+\frac{1}{8}e^{3x}$. **547.** $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}(x^2-x)e^{-x}$. **548.** $y=xe^x+\frac{x^2}{2}e^x$. **549.** $y=\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$. **550.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-\frac{37}{50}\cos x+\frac{9}{50}\sin x$. **551.** $y=-2\cos x+3\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$. **552.** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{3}{10}e^{2x}(\cos x+$ $+2\sin x)$. **553.** $y=c_1e^x+c_2e^{-4x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{8}x-\frac{13}{32}+\frac{2}{5}xe^x-\frac{9}{50}\cos 3x-\frac{13}{50}\sin 3x$. **554.** $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x\left(\frac{3}{2}\sin x-\cos x\right)$. **555.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^x-$ $-\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{3}{5}\cos 2x-\frac{x}{2}e^x$.

Литература

1. *Бермант А. Ф.* Краткий курс математического анализа для втузов. М.: Наука, 1976.
2. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математке (типовые расчеты). М.: Высшая школа, 1983.
3. *Кузнецова, Щеглова.* Сборник задач по высшей математике. М.: Издательство Московского университета, 1983.
4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М.: Наука, 1976.
5. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
6. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Наука, 1970.
8. *Шипачёв В. С.* Высшая математика. М.: Высшая школа, 1990.