МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А. В. Самохин, Л. Д. Жулёва,
В. Н. Шевелёва, Ю .И. Дементьев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Часть II

Пределы
Производные
Графики функций

*для студентов I курса
всех специальностей
дневного обучения*

Москва – 2003

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра высшей математики

А. В. Самохин, Л. Д. Жулёва,
В. Н. Шевелёва, Ю .И. Дементьев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Часть II

Пределы
Производные
Графики функций

для студентов I курса
всех специальностей
дневного обучения

Москва – 2003

Оглавление

Предисловие

Сборник состоит из четырёх глав, приложения и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы, содержащие краткое изложение теории и примеры решения типовых задач. В конце параграфов представлены задачи для самостоятельного решения, ответы к которым находятся в конце сборника.

В первой главе приведены графики простейших элементарных функций, а также рассмотрены преобразования и показаны методы эскизирования графиков функций. Вторая глава сборника посвящена теории пределов: рассмотрены основные методы вычисления пределов и раскрытия неопределённостей. В третьей главе представлены правила нахождения производных и способы применения производных для вычисления пределов. В четвёртой главе показаны методы полного исследования функции и построения её графика, в этой главе используются понятия и факты, изученные в первых трёх главах. В приложении содержатся таблицы эквивалентностей, производных и таблица преобразований графика функции.

В конце сборника приведён список использованной и рекомендуемой литературы.

ГЛАВА I

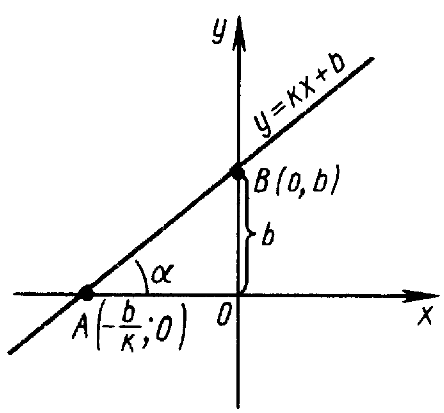
Графики элементарных функций

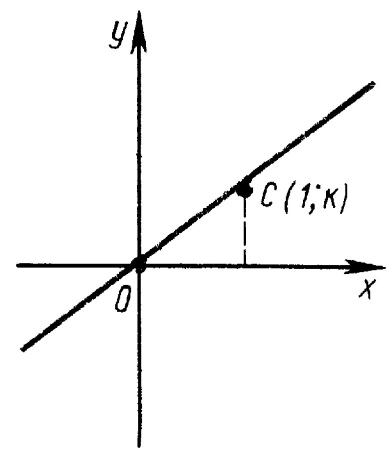
§1. Элементарные функции

1.1. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — числа. Функция определена при любом x.

Графиком линейной функции является прямая. Этот график удобно строить по двум точкам: точке B с координатами $x = 0$, $y = b$ и точке A с координатами $y = 0$, $x = -\frac{b}{k}$ (при $k \neq 0$) (см. левый рисунок). Эти точки являются точками пересечения прямой с осями координат.





В случае $b = 0$ прямая проходит через начало координат и для построения графика следует взять ещё одну точку, например, точку $C(1; k)$ (см. правый рисунок). В случае $k = 0$ прямая параллельна оси абсцисс.

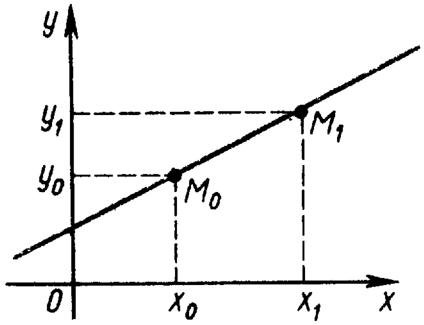
Коэффициенты k и b в уравнении прямой имеют наглядное геометрическое толкование. Значение коэффициента b определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент k является тангенсом угла α, образованного осью абсцисс и прямой; угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки.

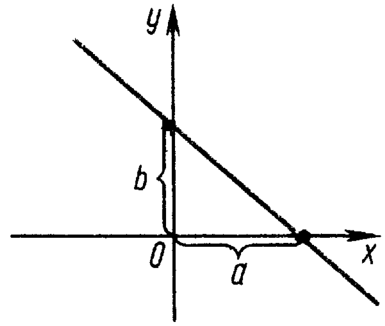
Уравнение прямой может быть представлено в различных видах:

$y = y_0 + k(x - x_0)$ — уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через точку $M(x_0; y_0)$;

$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ — уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_0(x_0; y_0)$ (см. левый рисунок);

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в отрезках (см. правый рисунок).



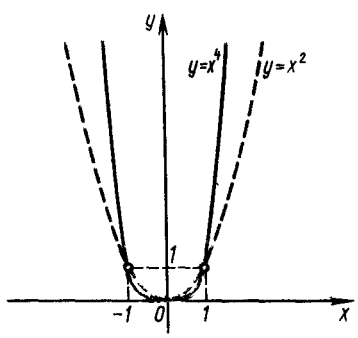


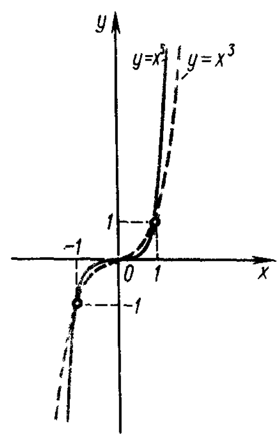
1.2. Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида $y = x^{\alpha}$. Рассмотрим вид графика степенной функции в зависимости от числа α.

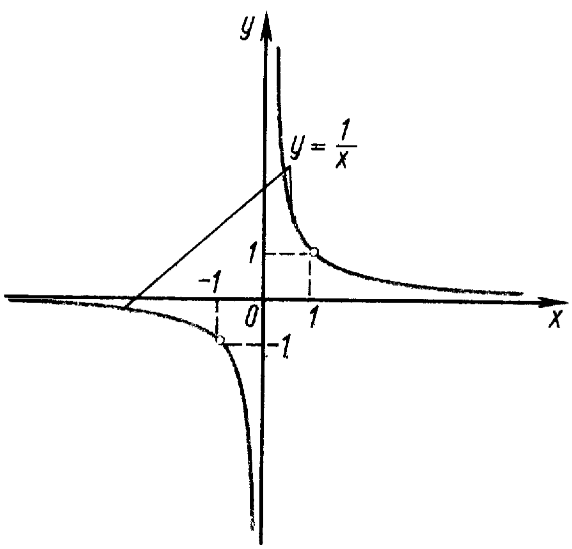
1. $\alpha = n$ ($n \geqslant 2$ — натуральное число).

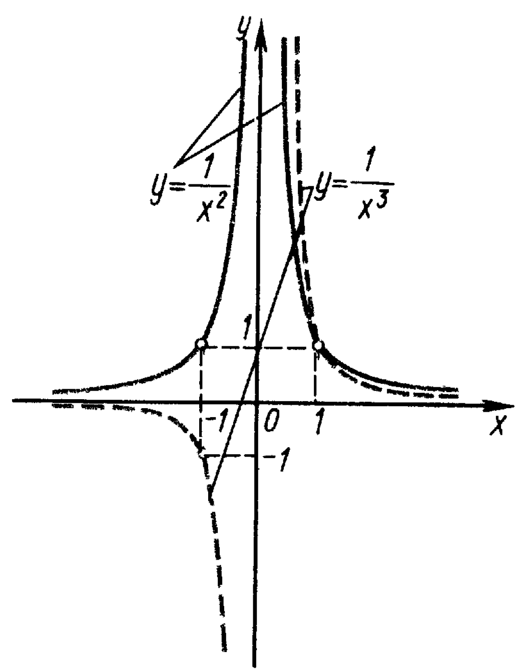
Функция определена при любом x. График функции проходит через точку $(1; 1)$ и касается оси абсцисс в начале координат. График функции при чётных и нечётных n имеет следующий вид.





2. $\alpha = -n$ (n — натуральное число).

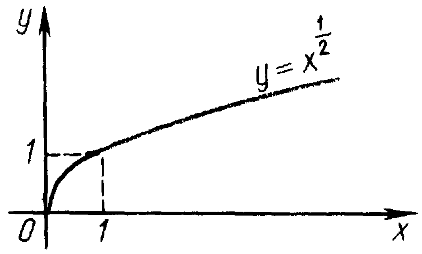


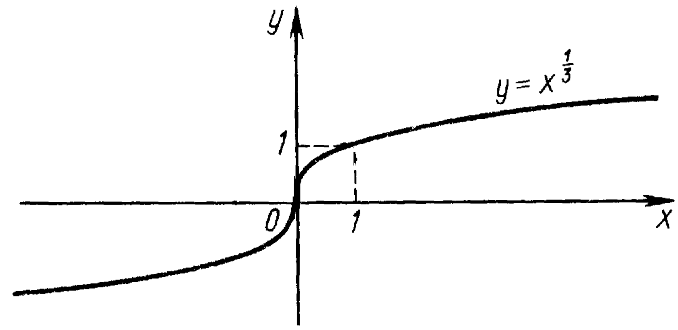


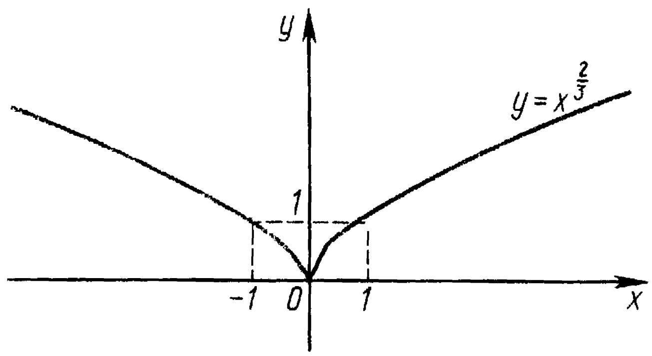
Функция определена при всех x, кроме $x = 0$. График функции проходит через точку $(1; 1)$. Примеры графика функции при $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ изображены на рисунках.

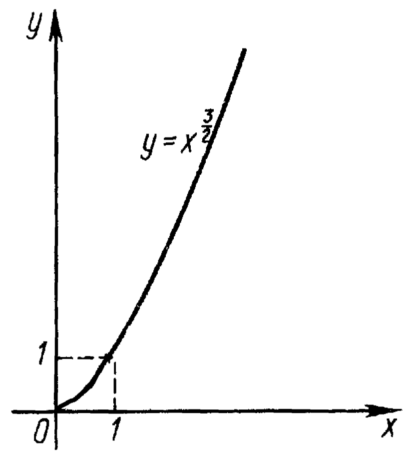
3. $\alpha = r$ ($r = \frac{m}{n}$, m и n — взаимно простые натуральные числа).

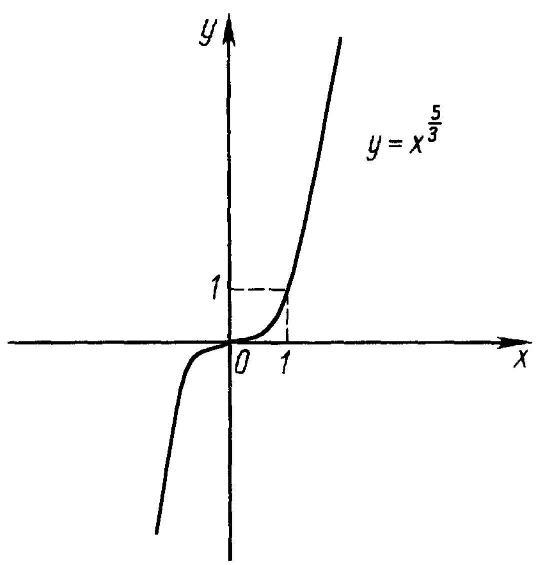
Функция имеет нуль в начале координат, а её график проходит через точку $(1; 1)$. При чётном n функция определена на множестве $[0; +\infty)$, а при нечётном n — на множестве $(-\infty; +\infty)$. Графики функций при различных m и n изображены на следующих рисунках.





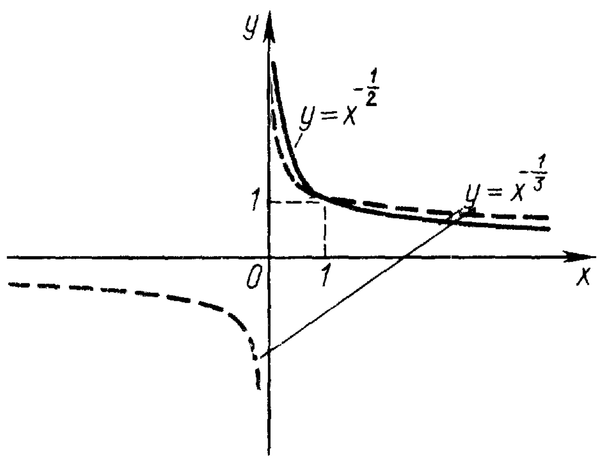


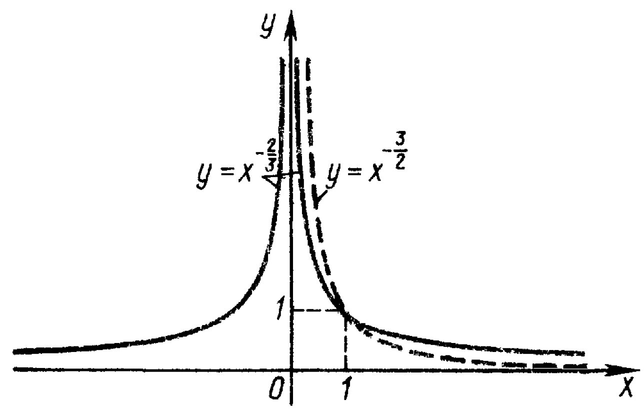




4. $\alpha = q$ ($q = \frac{m}{n} < 0$, m и n — взаимно простые целые числа, $n \neq -1$).

При чётном n функция определена на множестве $(0; +\infty)$, а при нечётном n — на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. График функции проходит через точку $(1; 1)$. Графики функций при различных m и n изображены на следующих рисунках.

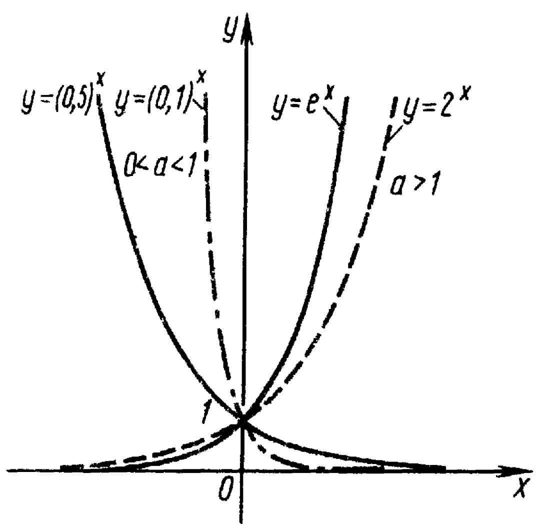




1.3. Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

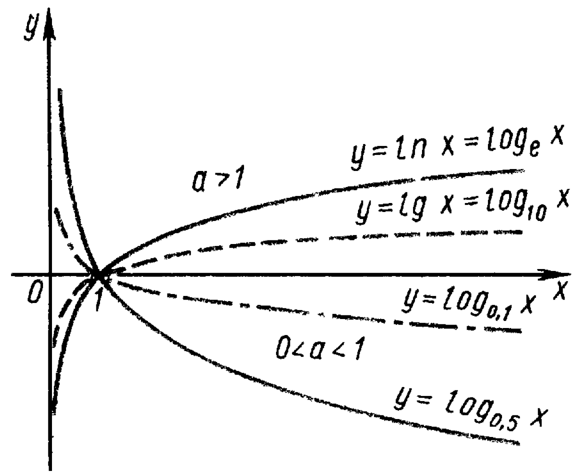
Функция определена при любом x. График функции $y = a^x$ в зависимости от a имеет следующий вид.



1.4. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

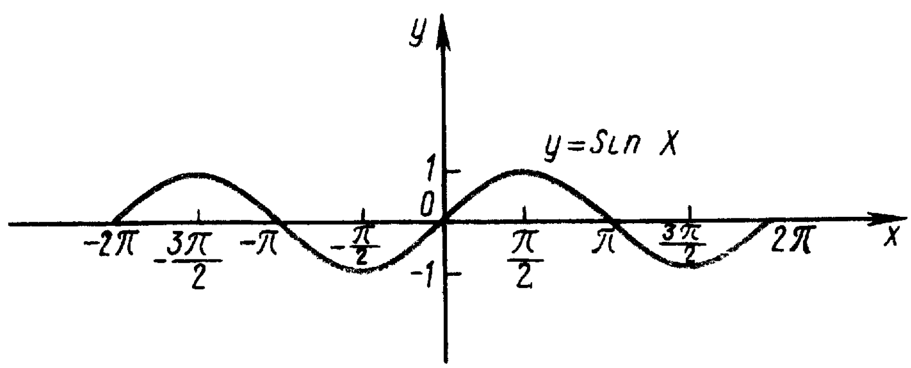
Функция определена при $x > 0$. График функции $y = \log_a x$ в зависимости от a имеет следующий вид.



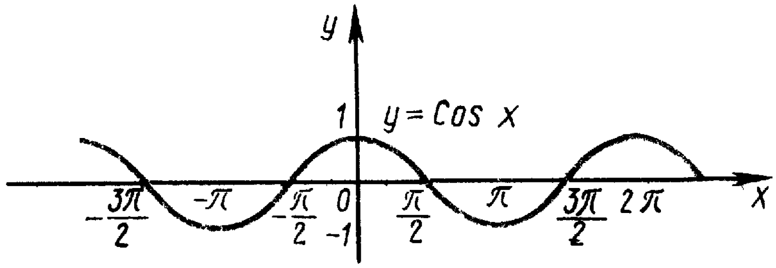
1.5. Тригонометрические функции

Тригонометрическими функциями называются функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

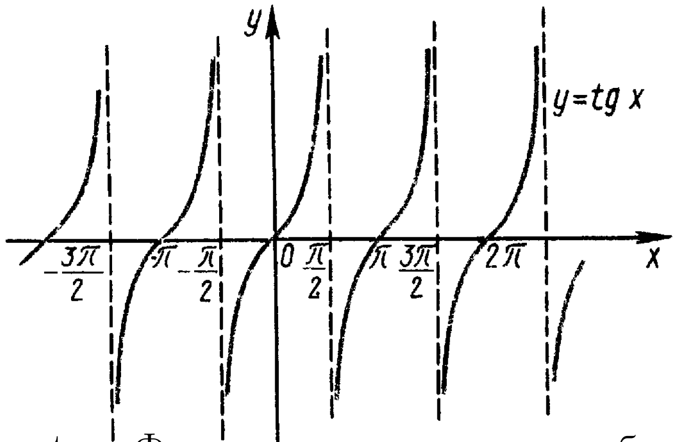
1. Синус $y = \sin x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.



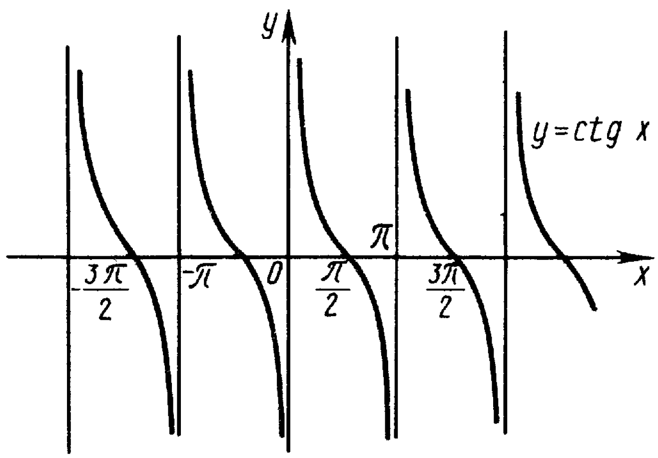
2. Косинус $y = \cos x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.



3. Тангенс $y = \operatorname{tg} x$. Функция определена при любом x, за исключением точек вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. График функции имеет следующий вид.



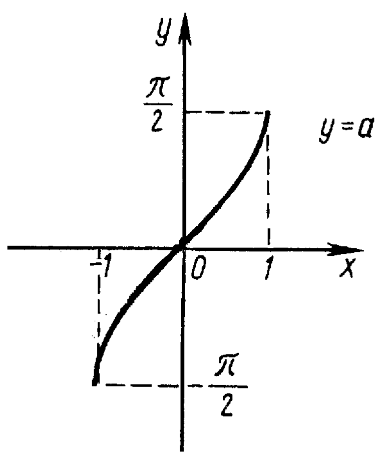
4. Котангенс $y = \operatorname{ctg} x$. Функция определена при любом x, за исключением точек вида πn, $n \in \mathbb{Z}$. График функции имеет следующий вид.



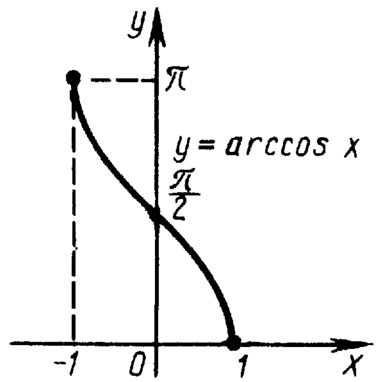
1.6. Обратные тригонометрические функции

Обратными тригонометрическими функциями называются функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

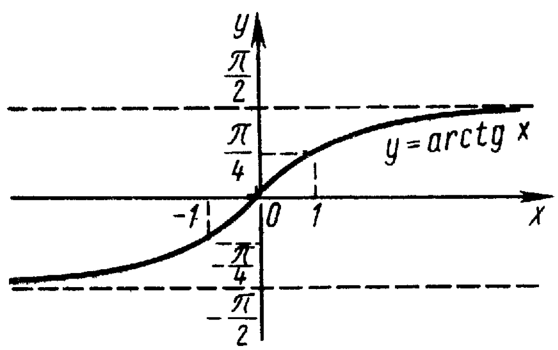
1. Арксинус $y = \arcsin x$. Функция определена при $x \in [-1; 1]$. График функции имеет следуюший вид.



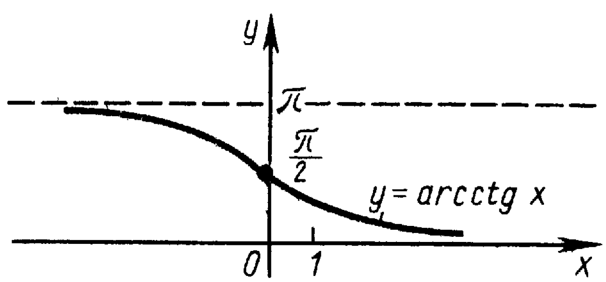
2. Арккосинус $y = \arccos x$. Функция определена при $x \in [-1; 1]$. График функции имеет следующий вид.



3. Арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.



4. Арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.

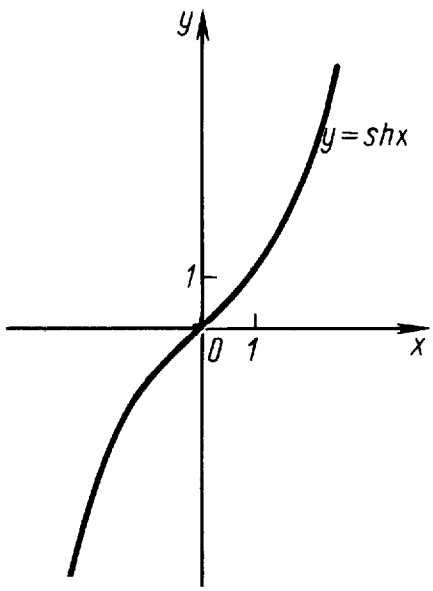


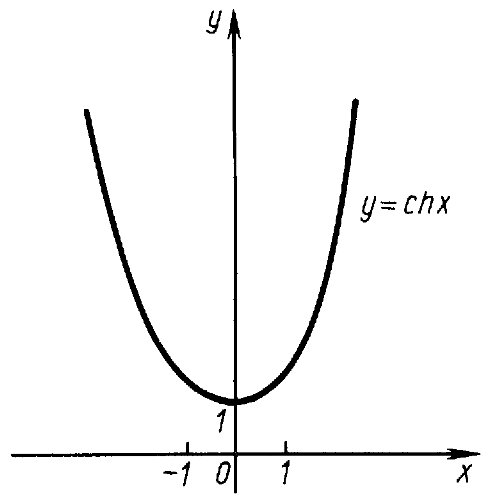
1.7. Гиперболические функции

Гиперболическими функциями называются функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

1. Гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Функция определена при любом x. График функции изображён на левом рисунке.

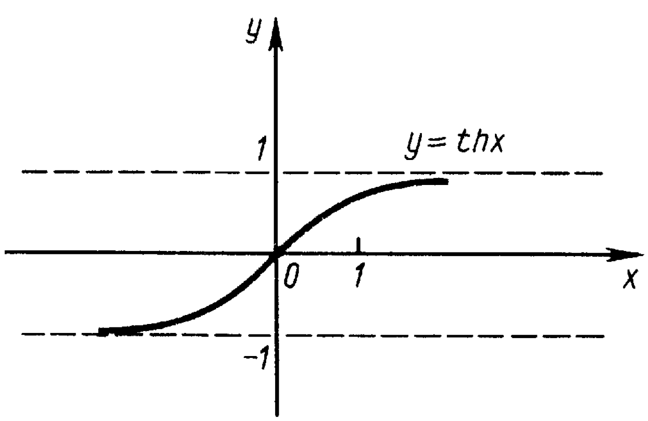
2. Гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Функция определена при любом x. График функции изображён на правом рисунке.

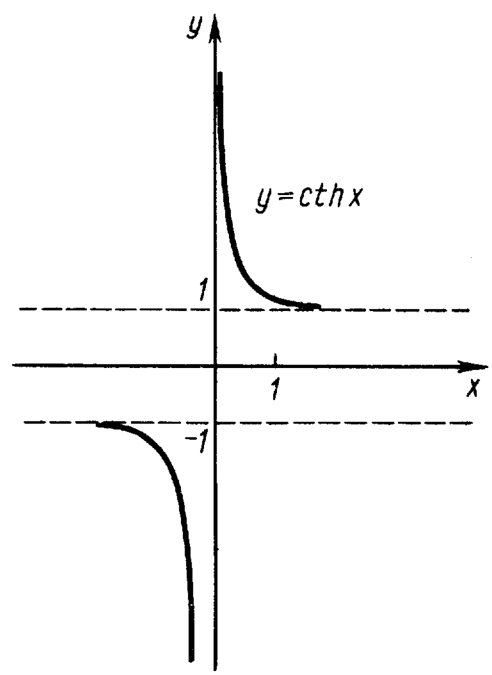




3. Гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Функция определена при любом x. График функции изображён на левом рисунке.

4. Гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Функция определена при любом x, кроме $x = 0$. График функции изображён на правом рисунке.





Приведём некоторые формулы с гиперболическими функциями:

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

из которых при $y = x$, в частности, следует

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

§2. Элементарные преобразования графиков функций

Пусть построен график функции $y = f(x)$. Рассмотрим, как изменяется график функции при определённом преобразовании функции $f(x)$ или её аргумента x.

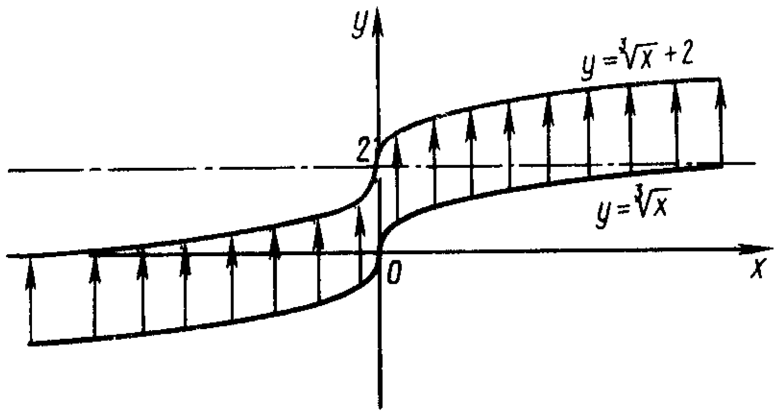
2.1. Сдвиг вдоль оси ординат

Преобразование: $f(x) \to f(x) + b$.

Для построения графика функции $y = f(x) + b$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ по оси Oy на b единиц вверх при $b > 0$, и на $|b|$ единиц вниз при $b < 0$.

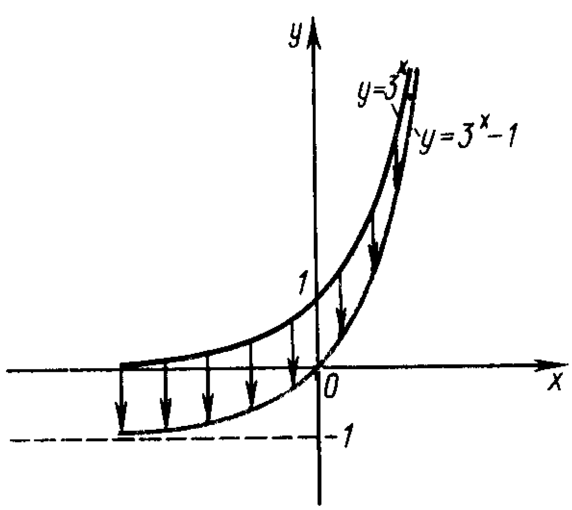
Пример 1. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x} + 2$.

Решение. Строим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и сдвигаем его на 2 единицы вверх.



Пример 2. Построить график функции $y = 3^x - 1$.

Решение. Строим график функции $y = 3^x - 1$ и сдвигаем его на 1 единицу вниз.



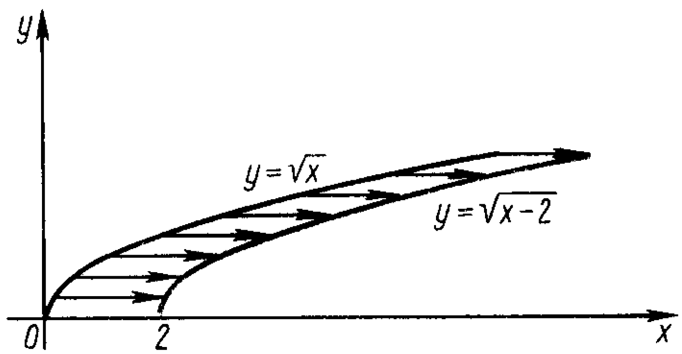
2.2. Сдвиг вдоль оси абсцисс

Преобразование: $f(x) \to f(x+a)$.

Для построения графика функции $y = f(x+a)$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ по оси Ox на a единиц влево при $a > 0$, и на $|a|$ единиц вправо при $a < 0$.

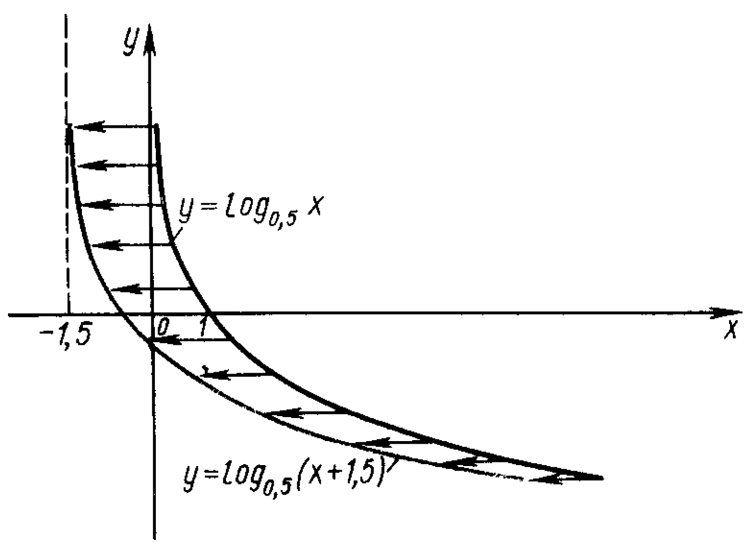
Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt{x-2}$.

Решение. Строим график функции $y = \sqrt{x-2}$ и сдвигаем его на 2 единицы вправо.



Пример 4. Построить график функции $y = \log_{0,5}(x+1,5)$.

Решение. Строим график функции $y = \log_{0,5} x$ и сдвигаем его на 1,5 единицы влево.

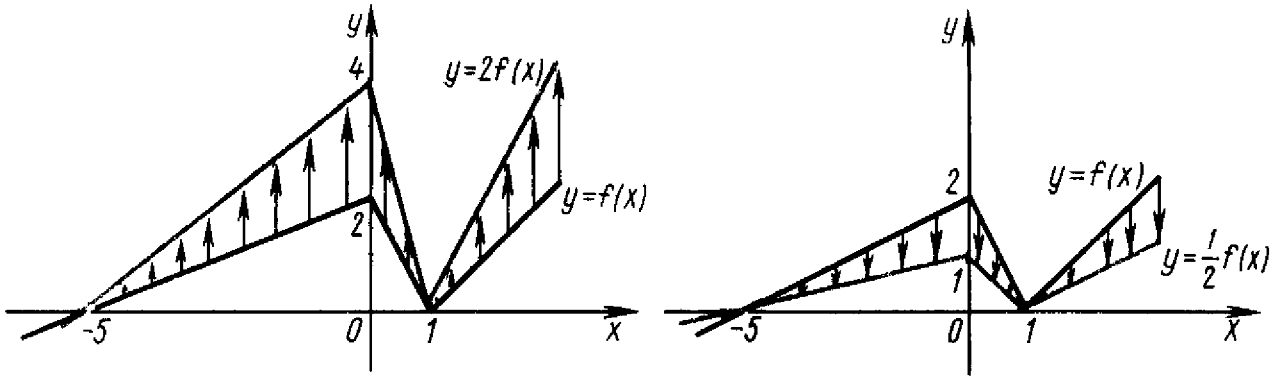


2.3. Растяжение и сжатие вдоль оси ординат

Преобразование: $f(x) \to kf(x)$ $(k > 0,\ k \neq 1)$.

При $k > 1$ график функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. левый рисунок).

При $0 < k < 1$ график функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. правый рисунок).

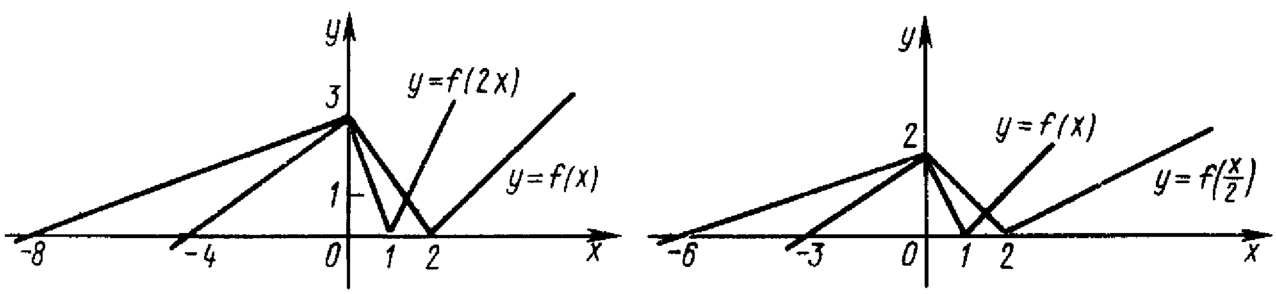


2.4. Растяжение и сжатие вдоль оси абсцисс

Преобразование: $f(x) \to f(kx)$ $(k > 0,\ k \neq 1)$.

При $k > 1$ график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз вдоль оси Ox к оси Oy (см. левый рисунок).

При $0 < k < 1$ график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox к оси Oy (см. правый рисунок).



2.5. Симметричное отражение относительно оси ординат

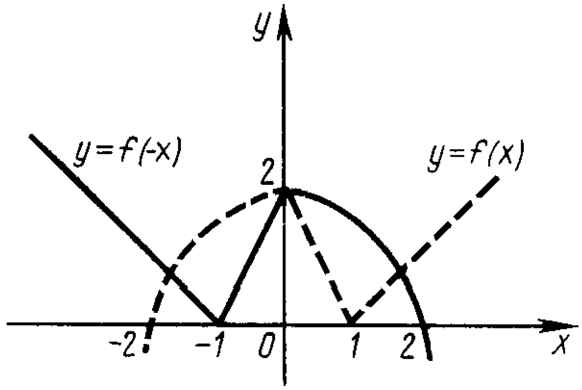
Преобразование: $f(x) \to f(-x)$.

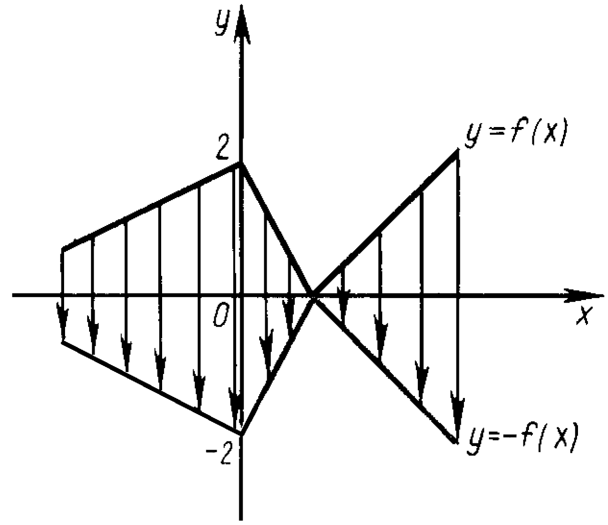
График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отражением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (см. левый рисунок).

2.6. Симметричное отражение относительно оси абсцисс

Преобразование: $f(x) \to -f(x)$.

График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отражением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox (см. правый рисунок).

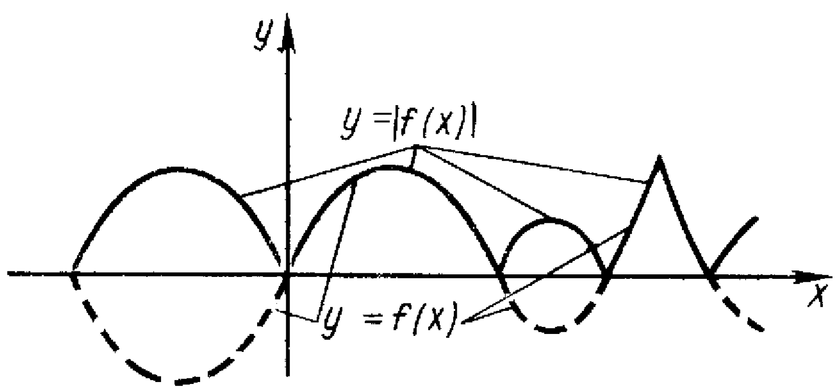




2.7. Модуль функции

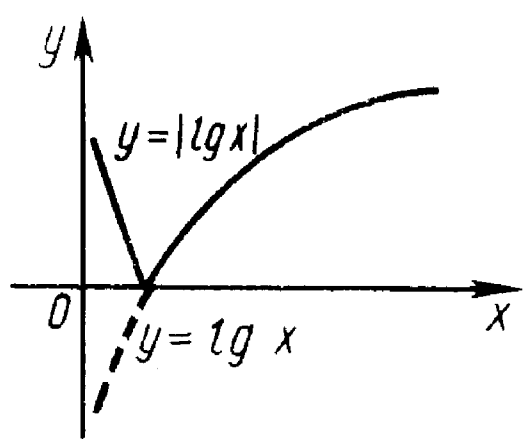
Преобразование: $f(x) \to |f(x)|$.

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо отразить относительно оси Ox часть графика функции $y = f(x)$, расположенную ниже оси Ox, остальная часть графика остаётся без изменений.



Пример 5. Построить график функции $y = |\lg x|$.

Решение. Строим график функции $y = \lg x$, а затем часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, симметрично отражаем наверх.

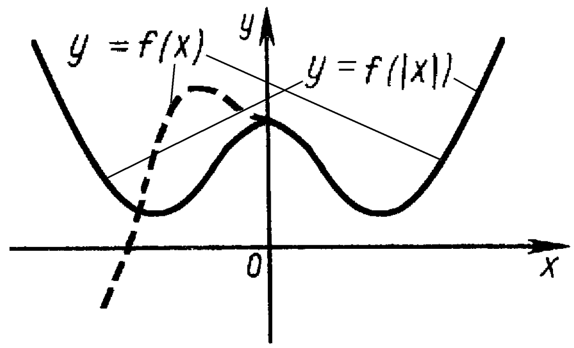


2.8. Модуль аргумента

Преобразование: $f(x) \to f(|x|)$.

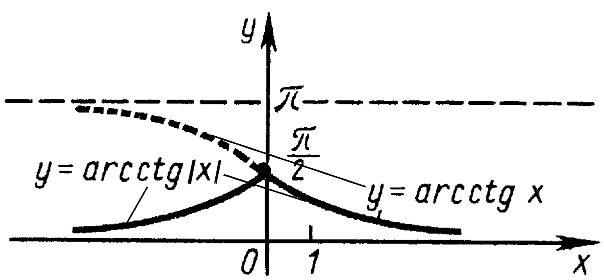
График функции $y = f(|x|)$ строится по графику функции $y = f(x)$ следующим образом:

1) всё, что левее оси Oy, исчезает;
2) всё, что правее оси Oy (включая точку на оси), остаётся;
3) правая часть симметрично относительно оси Oy отражается налево.



Пример 6. Построить график функции $y = \operatorname{arcctg}|x|$.

Решение. Строим график функции $y = \operatorname{arcctg} x$. Согласно приведённому алгоритму: левая часть графика функции $y = \operatorname{arcctg} x$ исчезает, а правая часть остаётся и симметрично отражается налево. Получается график функции $y = \operatorname{arcctg}|x|$.



2.9. Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований

Построение графика функции $y = cf(ax + b) + d$ сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, отражение,...) графика функции $y = f(x)$.

Элементарные преобразования рассмотрены в предыдущих пунктах и сведены в единую таблицу (см. таблицу **797.**).

Представим функцию y в виде $y = cf\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right] + d$.

Из такого представления следует, что для построение графика этой функции достаточно построить график функции $y_1 = cf\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right]$. Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2 =$

$= f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$. В свою очередь для построения графика функции y_2 достаточно построить график функции $y_3 = f(ax)$. Итак, для построения графика функции $y = cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right] + d$ надо с графиком функции $f(x)$ произвести следующие преобразования.

1. Сжать или растянуть график функции $f(x)$ вдоль оси Ox, если $a > 0$; симметрично отразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox, если $a < 0$.

2. Сдвинуть по оси Ox полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\frac{b}{a}\right|$ единиц влево при $\frac{b}{a} > 0$ и вправо при $\frac{b}{a} < 0$.

3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ вдоль оси Oy, если $c > 0$; симметрично отразить относительно оси Ox и сжать или растянуть вдоль оси Oy, если $c < 0$.

4. Сдвинуть полученный график функции $cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ на d единиц вверх при $d > 0$ и на $|d|$ единиц вниз при $d < 0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y = cf(ax+b)+d$ можно представить символически в виде цепочки:

$$f(x) \to f(ax) \to f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right] \equiv f(ax+b) \to cf(ax+b) \to cf(ax+b)+d.$$

На практике удобнее построения графика функции $y = cf(ax+b)+d$ начинать с написания цепочки:

$$cf(ax+b)+d \leftarrow cf(ax+b) \leftarrow f(ax+b) \equiv f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right] \leftarrow f(ax) \leftarrow f(x).$$

Отсюда видно, график какой функции в этой цепочке является базовым для построения графика последующей функции.

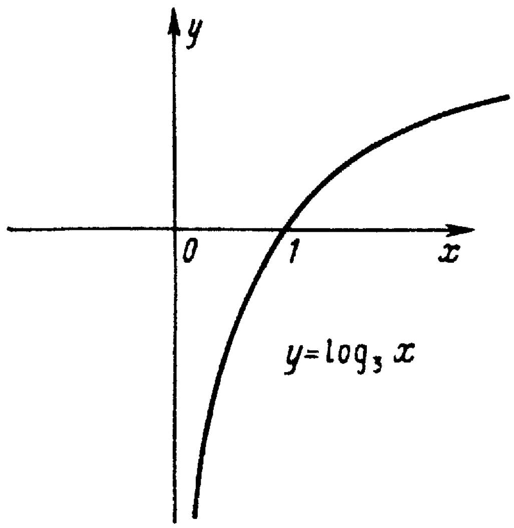
Пример 7. Построить эскиз графика функции $y = \log_3(1-2x)$.

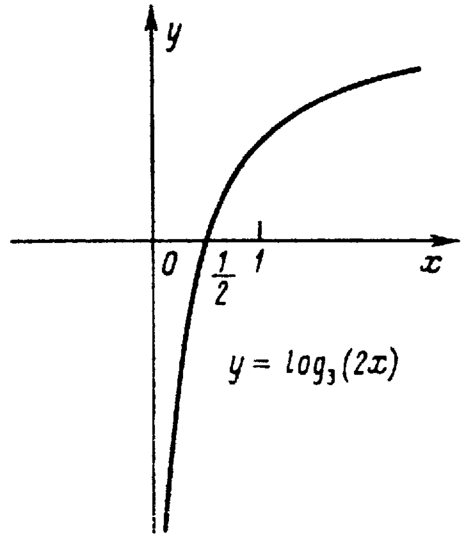
Решение. Напишем цепочку преобразований:

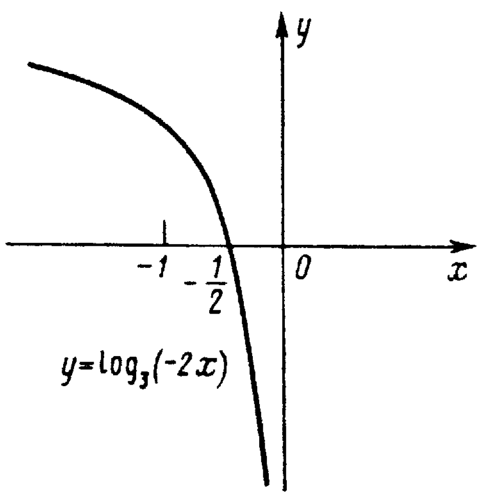
$$\log_3(1-2x) \equiv \log_3\left[-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \leftarrow \log_3(-2x) \leftarrow \log_3(2x) \leftarrow \log_3 x.$$

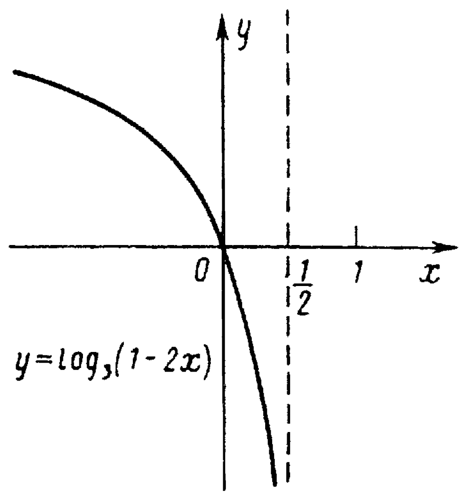
Итак, построение эскиза графика функции $y = \log_3(1-2x)$ начинается с построения графика $y_1 = \log_3 x$, затем сжатия этого графика вдоль оси Ox в два раза, затем симметричного отражения относительно оси Oy и, наконец, сдвига полученного графика на $\frac{1}{2}$ единицы вправо вдоль оси Ox (см. рисунки).

Замечание. Для избежания ошибок при построении графиков, подчеркнём, что величина сдвига вдоль оси Ox определяется тем числом, которое прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax. Поэтому









для нахождения этой константы выражение $ax+b$ сначала преобразуется к виду $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$.

Пример 8. Построить эскиз графика функции $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\arcsin\frac{x-2}{3} \equiv \arcsin\left[\frac{1}{3}\cdot(x-2)\right] \leftarrow \arcsin\left(\frac{1}{3}\cdot x\right) \leftarrow \arcsin x.$$

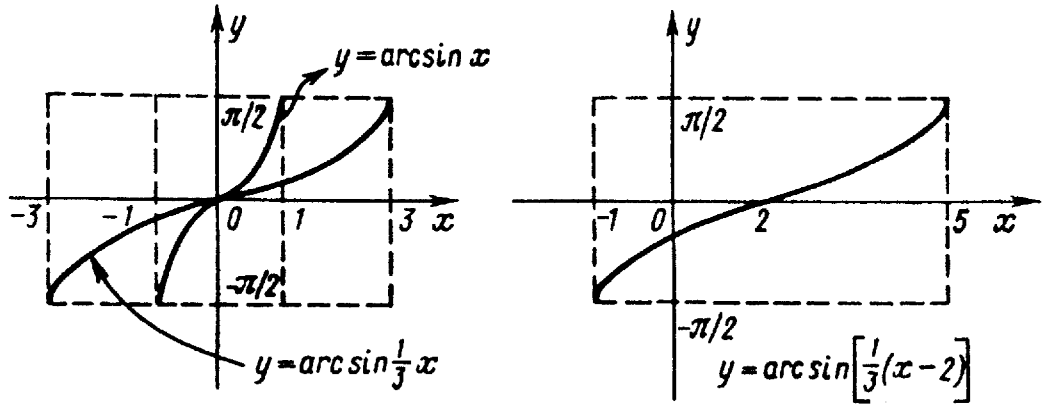
Эскизы графиков приведены на рисунках.

Пример 9. Построить эскиз графика функции $y=\arccos\left|\frac{1-2|x|}{3}\right|$.

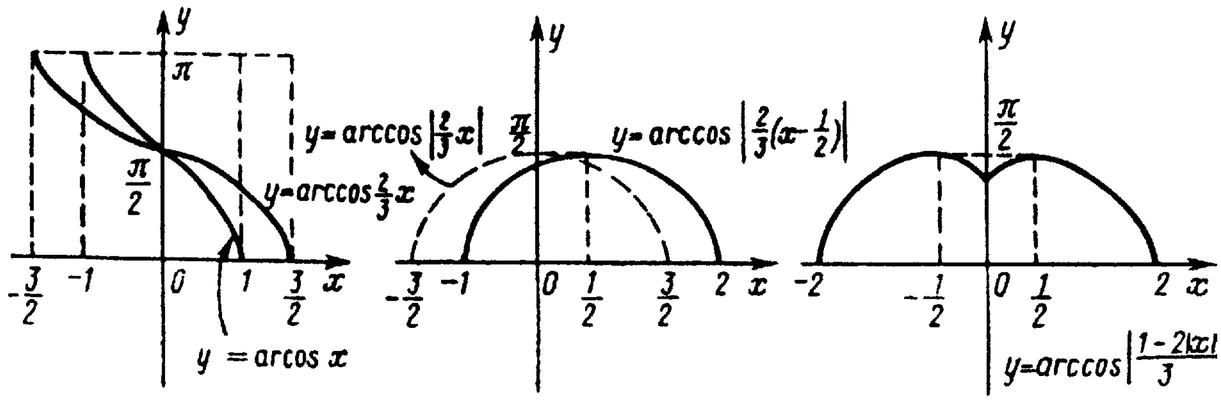
Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\arccos\left|\frac{1-2|x|}{3}\right| \xleftarrow{x>0} \arccos\left|\frac{1-2|x|}{3}\right| \equiv$$

$$\equiv \arccos\left|\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \leftarrow \arccos\left|\frac{2}{3}\cdot x\right| \xleftarrow{x>0} \arccos\left(\frac{2}{3}\cdot x\right) \leftarrow \arccos x.$$



Эскизы графиков изображены на рисунках.

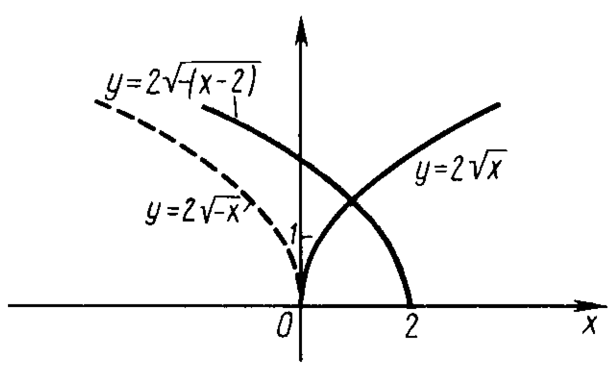


Пример 10. Построить эскиз графика функции $y = \sqrt{8-4x}$.

Решение. Запишем заданную функцию в виде

$$y = \sqrt{8-4x} = 2\sqrt{-(x-2)}.$$

Чтобы построить график этой функции, нужно сначала график функции $y = 2\sqrt{x}$ симметрично отразить относительно оси Oy, а затем сдвинуть полученный график на 2 единицы вправо (см. рисунок).

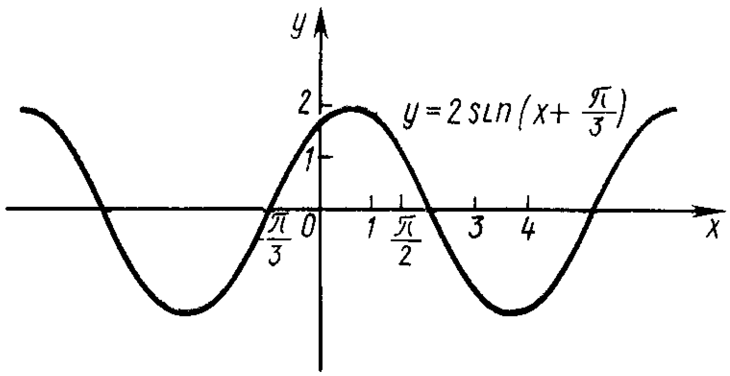


Пример 11. Построить эскиз графика функции $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \\ = 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Таким образом, нужно построить график функции $y = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. Это — график функции $y = 2\sin x$, смещённый на $\frac{\pi}{3}$ влево (см. рисунок).

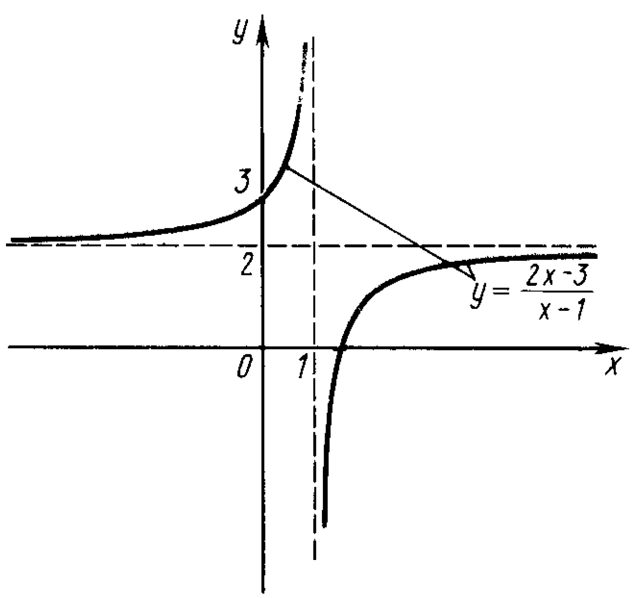


Пример 12. Построить эскиз графика функции $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

Таким образом, нужно построить график функции $y = -\frac{1}{x-1} + 2$. Это — график гиперболы $y = -\frac{1}{x}$, смещённый на единицу вправо и на две единицы вверх (см. рисунок).

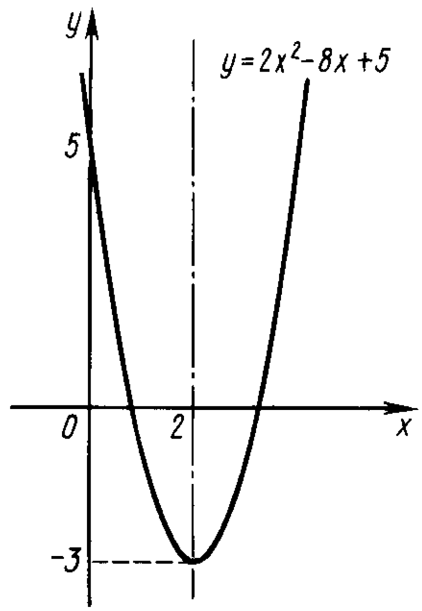


Пример 13. Построить эскиз графика функции $y = 2x^2 - 8x + 5$.

Решение. Преобразуем квадратный трёхчлен:

$$2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 4x + 4 - \frac{3}{2}\right) = 2(x-2)^2 - 3.$$

Итак, нужно построить график функции $y = 2(x-2)^2 - 3$. Это — график параболы $y = 2x^2$, смещённый на две единицы вправо и на три единицы вниз (см. рисунок).



Задачи для самостоятельного решения

Построить график функции:

1. $y = 4x + 8$;
2. $y = -\frac{x}{3} + 2$;
3. $y = 3x - 2$;
4. $y = |x|$;
5. $y = \frac{|x|}{x}$;
6. $y = 2|x+1|$;
7. $y = -|5x+2|$;
8. $y = |x| + 3$;
9. $y = |x| + x$;
10. $y = \frac{x}{2} + |x| - 1$;
11. $y = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$;
12. $y = x^2 + 2$;
13. $y = -x^2 + 3$;
14. $y = 2x^2 + 1$;
15. $y = |4 - x^2|$;
16. $y = -4x^2 + 1$;

17. $y = (x-4)^2$;
18. $y = -(x+1)^2$;
19. $y = (x+2)^2 - 1$;
20. $y = (x-2)^2 + 1$;
21. $y = 1 - 3(x-3)^2$;
22. $y = x^2 - 4x + 1$;
23. $y = x^2 - 5x + 6$;
24. $y = x^2 + 2x - 3$;
25. $y = 3x - x^2$;
26. $y = 2x^2 - 4x$;
27. $y = 4 - 2x^2 - 2x$;
28. $y = 4x - x^2 - 3$;
29. $y = 2|x| - x^2$;
30. $y = x|x-1|$;
31. $y = |x^2 - 3x - 4|$;
32. $y = (x-1)(1-|x|)$;
33. $y = |x - x^2 - 1|$;
34. $y = x^n$ при $n = 3, 4, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$;
35. $y = \sqrt{x+1}$;
36. $y = \sqrt{1-4x}$;
37. $y = -\sqrt{2x-1}$;
38. $y = \sqrt[3]{8x-1}$;
39. $y = 1 - \sqrt[3]{2x+1}$;
40. $y = \frac{k}{x}$ при $k = 1, -1, \frac{1}{2}$;
41. $y = \frac{1}{x} + 2$;
42. $y = -\frac{3}{x} - 1$;
43. $y = 3 - \frac{4}{x}$;
44. $y = 1 + \frac{1}{x-2}$;
45. $y = 2 - \frac{3}{x+1}$;
46. $y = \frac{1}{x+3} - 1$;
47. $y = -\frac{1}{x+2} - 3$;
48. $y = \frac{x+5}{x+3}$;
49. $y = \frac{5-2x}{x-2}$;
50. $y = \frac{4x+7}{2x-5}$;
51. $y = \frac{9x+4}{3x+2}$;
52. $y = \frac{3-3x}{2-6x}$;
53. $y = \frac{6x-2}{x-1}$;
54. $y = \left|\frac{7x+5}{5x+6}\right|$;

55. $y = \left|\frac{4-x}{5+2x}\right|$;
56. $y = \left|\frac{x}{3x+5}\right|$;
57. $y = \frac{2+x}{|x-1|}$;
58. $y = \frac{2|x|+3}{2-|x|}$;
59. $y = \frac{|7x+2|}{2x+1}$;
60. $y = \frac{2x+4}{|3x+5|}$;
61. $y = \frac{|2-x|}{4x-1}$;
62. $y = \frac{x+2}{|x+2|}$;
63. $y = \frac{|x-3|}{x-3}$;
64. $y = a^x$ при $a = 2, \frac{1}{2}, 3$;
65. $y = 3^{x-2}$;
66. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$;
67. $y = 5^{\frac{x}{2}-1}$;
68. $y = -2^{2x-1}$;
69. $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;
70. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3x} - 2$;
71. $y = 3^{\frac{x}{2}} - 2$;
72. $y = 2^{1-2x} - 1$;
73. $y = 2 - 3^{\frac{x+1}{2}}$;
74. $y = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$;
75. $y = 2^{1-2x} + 1$;
76. $y = a^{|x|}$ при $a = 2, \frac{1}{2}$;
77. $y = \log_a x$ при $a = 2, \frac{1}{2}, 10$;
78. $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$;
79. $y = \log_2(x-2)$;
80. $y = \log_{\frac{1}{2}}(3-2x)$;
81. $y = -\log_3\left(\frac{x}{2}+1\right)$;
82. $y = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(4-3x)$;
83. $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-5)$;
84. $y = \log_2(-x)$;
85. $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$;
86. $y = \log_{\frac{1}{3}}|3-2x|$;
87. $y = \log_4|x+2|$;
88. $y = |\log_3(4-3x)|$;
89. $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{x}{2}\right)\right|$;

90. $y = |\log_2 |3x+4||$;
91. $y = \sin ax$ при $a = 1, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$;
92. $y = \cos ax$ при $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}$;
93. $y = \operatorname{ctg} ax$ при $a = 1, 2, \frac{1}{2}, \pi$;
94. $y = \operatorname{tg} ax$ при $a = 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi$;
95. $y = \cos \frac{3}{2}x + 1$;
96. $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
97. $y = 2\sin 3x + 1$;
98. $y = \frac{1}{2} \cos \pi x - 1$;
99. $y = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}$;
100. $y = -2\sec \frac{x}{2}$, где $\sec x = \frac{1}{\cos x}$;
101. $y = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x$, где $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$;
102. $y = 1 - 2\sin \pi x$;
103. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
104. $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
105. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;
106. $y = \left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$;
107. $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;
108. $y = -2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$;
109. $y = 2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$;
110. $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$;
111. $y = \sin x + \cos x$;
112. $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$;
113. $y = |\sin 3x|$;
114. $y = \sin^2 x$;
115. $y = \cos^2 x$;
116. $y = \arcsin(x+1)$;
117. $y = \arccos(x-2)$;
118. $y = \arcsin(3x+1)$;
119. $y = -\arcsin \frac{x+2}{3}$;
120. $y = \frac{1}{2} \arccos(2x-3)$;
121. $y = 2\operatorname{arctg}(2x-1)$;
122. $y = -\operatorname{arcctg}(4x-1)$;
123. $y = 3\operatorname{arcctg}(3x+1)$;
124. $y = 2\arccos \frac{1-x}{2}$;
125. $y = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{x+2}{2}$;
126. $y = \frac{1}{3} \arccos 2x - 32$;
127. $y = 2\arcsin 2x + 33$.

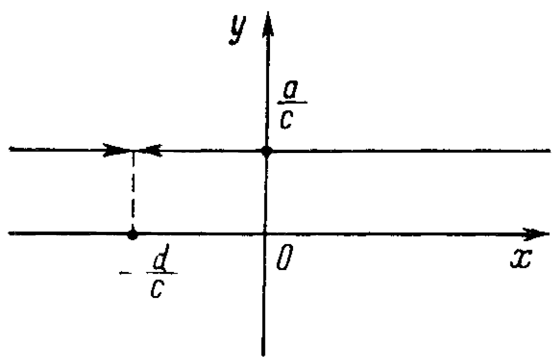
§3. Эскизирование графиков функций

3.1. График дробно-линейной функции

Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0.$$

Если числитель и знаменатель дробно-линейной функции имеют общий множитель $x-\alpha$, то функция всюду, кроме точки $x = -\frac{d}{c}$, есть постоянная $\frac{a}{c}$ и график её имеет вид, изображённый на рисунке. Обратите внимание на



отличие этого графика от графика функции $y = \frac{a}{c}$.

Далее предполагаем, что рассматриваемая дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ несократима, то есть $bc \neq ad$. Преобразуем дробь.

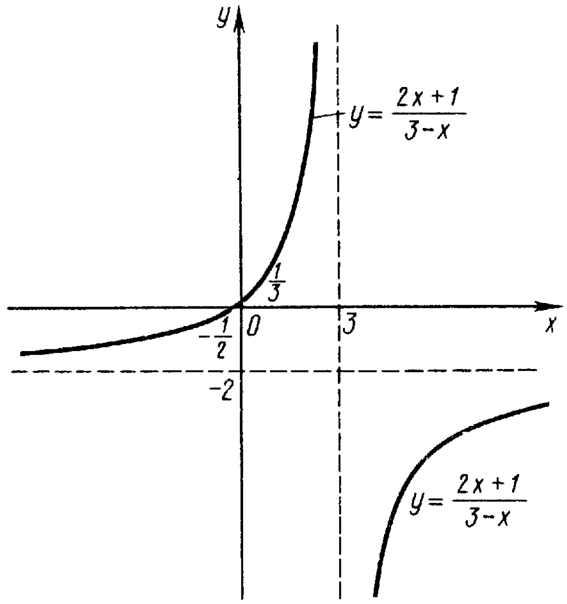
$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}.$$

График дробно-линейной функции $y = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}$ — гипербола $y = \frac{k}{x}$, сдвинутая по оси Ox на $\left|\frac{d}{c}\right|$ вправо или влево в зависимости от знака дроби $\frac{d}{c}$ и по оси Oy на $\left|\frac{a}{c}\right|$ вверх или вниз в зависимости от знака дроби $\frac{a}{c}$.

Таким образом, чтобы построить эскиз графика дробно-линейной функции, достаточно знать её асимптоты и расположение относительно них одной из ветвей гиперболы, так как вторая ветвь симметрична первой относительно точки пересечения асимптот. Асимптотами являются прямые $x = -\frac{d}{c}$ и $y = \frac{a}{c}$, полученные соответствующим сдвигом асимптот кривой $y = \frac{k}{x}$, а положение одной из ветвей определяется, например, точкой пересечения гиперболы с осью Ox или Oy.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{2x+1}{3-x}$.

Решение. Асимптотами данного графика функции являются прямые $x = -\frac{3}{-1} = 3$ и $y = \frac{2}{-1} = -2$. Точка пересечения гиперболы с осью Oy есть точка $(0; y(0)) = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Строим эскиз графика функции.



3.2. График алгебраической функции специального вида

Рассмотрим алгоритм построения графика функции вида

$$y=(x-b_1)^{a_1}(x-b_2)^{a_2}\dots(x-b_k)^{a_k}.$$

При построении эскиза графика данной функции в окрестности точки b_i $(i=1,2,\dots,k)$ эту функцию представляют в виде

$$y=(x-b_i)^{a_i}h(x),\ \text{где } h(b_i)\neq 0.$$

Тогда исходная функция имеет в точке $(b_i;0)$ вертикальную или горизонтальную касательную одновременно с графиком функции $y=(x-b_i)^{a_i}$.

Пример 2. Построить эскиз графика функции $y=x^2(x-2)(x+1)$.

Решение. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет. Функция обращается в нуль при $x=0$, $x=2$, $x=-1$.

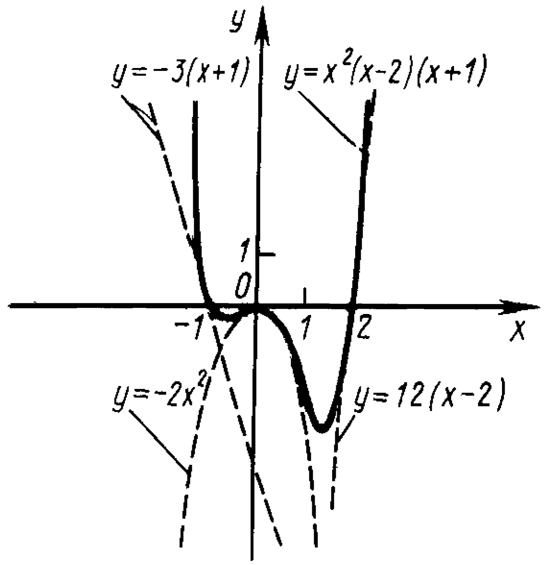
Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x\to 0, \text{ то } x^2(x-2)(x+1)\sim -2x^2;$$
$$\text{если } x\to -1, \text{ то } x^2(x-2)(x+1)\sim -3(x+1);$$
$$\text{если } x\to 2, \text{ то } x^2(x-2)(x+1)\sim 12(x-2).$$

Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\text{если } x\to +\infty, \text{ то } x^2(x-2)(x+1)\sim x^4;$$
$$\text{если } x\to -\infty, \text{ то } x^2(x-2)(x+1)\sim x^4.$$

Наносим полученные результаты на рисунок и отдельные части графика (в силу непрерывности) соединяем сплошной линией.



Замечание. Идея эскизирования графиков состоит в том, чтобы соединять сплошной линией не отдельные точки графика, а отдельные его части (куски).

Пример 3. Построить эскиз графика функции $y = x^3\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

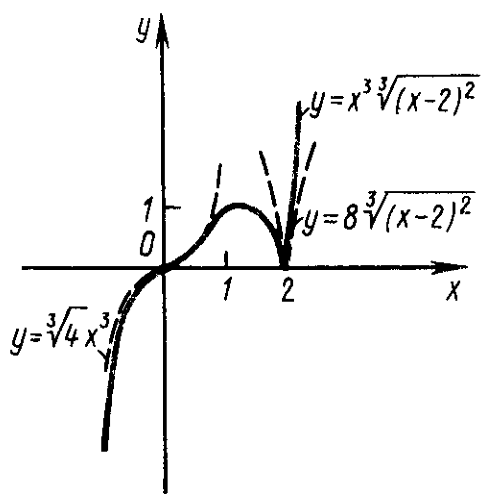
Решение. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет. Функция обращается в нуль при $x = 0$, $x = 2$.

Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x \to 0, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim \sqrt[3]{4}\,x^3;$$
$$\text{если } x \to 2, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim 8\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\text{если } x \to +\infty, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{\frac{11}{3}};$$
$$\text{если } x \to -\infty, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{\frac{11}{3}}.$$



Пример 4. Построить эскиз графика функции $y = \sqrt{x(1-x)(1+x)}$.

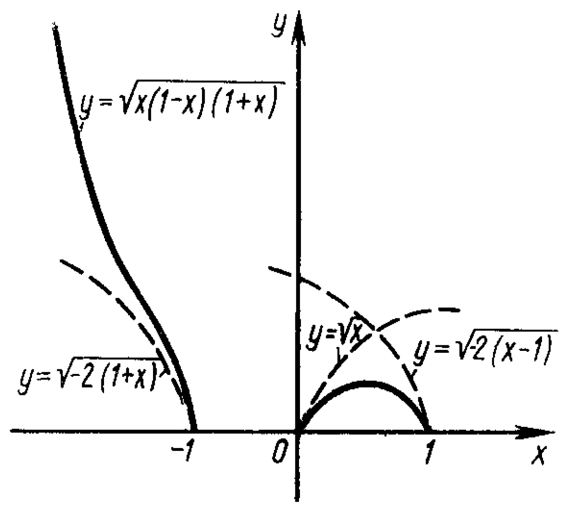
Решение. Область определения функции находим, решая неравенство $x(1-x)(1+x) \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Нули функции — точки $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x \to 0+, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{x};$$
$$\text{если } x \to -1-, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(x+1)};$$
$$\text{если } x \to 1-, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(x-1)}.$$

Исследуем поведение функции на минус бесконечности:

$$\text{если } x \to -\infty, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-x^3}.$$

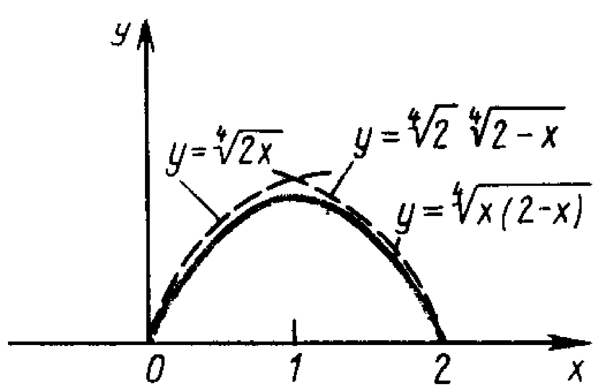


Пример 5. Построить эскиз графика функции $y = \sqrt[4]{x(2-x)}$.

Решение. Область определения функции находим, решая неравенство $x(2-x) \geqslant 0$, откуда $0 \leqslant x \leqslant 2$. Нули функции — точки $x = 0$, $x = 2$.

Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x \to 0+, \text{ то } \sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{x};$$
$$\text{если } x \to 2-, \text{ то } \sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2-x}.$$



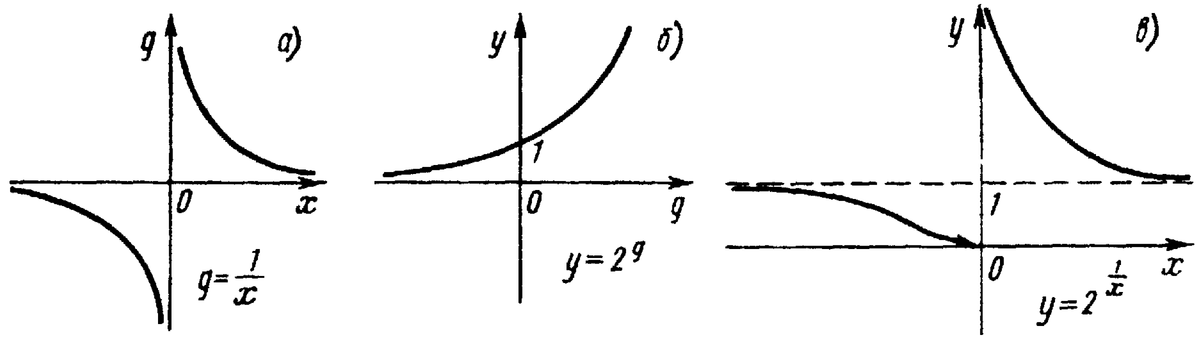
3.3. График сложной функции

Для построения эскиза графика сложной функции $y = f(g(x))$ строят графики функций $y = f(x)$ и $g = g(x)$. Затем необходимо отдельно рассмотреть участки монотонности $(a_k; a_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, функции $g = g(x)$. На каждом из участков монотонности $(a_k; a_{k+1})$ функции $g = g(x)$ рассматривается функция $y = f(g)$. В случае необходимости участок монотонности $(a_k; a_{k+1})$ делится на более мелкие $(b_l; b_{l+1})$ так, чтобы функция $y = f(g)$ была определена и монотонна на участке $(g(b_l); g(b_{l+1}))$. Результаты исследований заносят в таблицу.

x	$(a; b)$	Участки монотонности функции $g = g(x)$ с учётом монотонности и области определения функции $y = f(g)$
$g = g(x)$	$g(a) \nearrow g(b)$ $g(a) \searrow g(b)$	Указывается изменение функции $g = g(x)$ на участке $(a; b)$ (убывание или возрастание)
$y = f(g)$	$f(g(a)) \nearrow f(g(b))$ $f(g(a)) \searrow f(g(b))$	Указывается изменение функции $y = f(g)$ на участке $(g(a); g(b)$

Пример 6. Построить эскиз графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Графики функций $g = \frac{1}{x}$ и $y = 2^x$ см. на рис. а), б). Функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ определена на объединении множеств $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, то есть на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На множестве $(-\infty; 0)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to -\infty$ и монотонно стремится к $-\infty$ при $x \to 0$; на множестве $(0; +\infty)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $x \to 0$ и монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что функция $y = 2^g$ определена на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На множестве $(-\infty; 0)$, когда x стремится к $-\infty$, функция $y = 2^g$ стремится к единице, оставаясь меньше 1, а когда $x \to 0$, то стремится к 0. На множестве $(0; +\infty)$, когда $x \to 0$, функция $y = 2^g$ стремится к $+\infty$, а когда $x \to +\infty$, то стремится к единице, оставаясь больше 1. Теперь рисуем эскиз графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ (см. рис. в)).



Замечание. Результаты исследования полезно свести в таблицу и потом строить график.

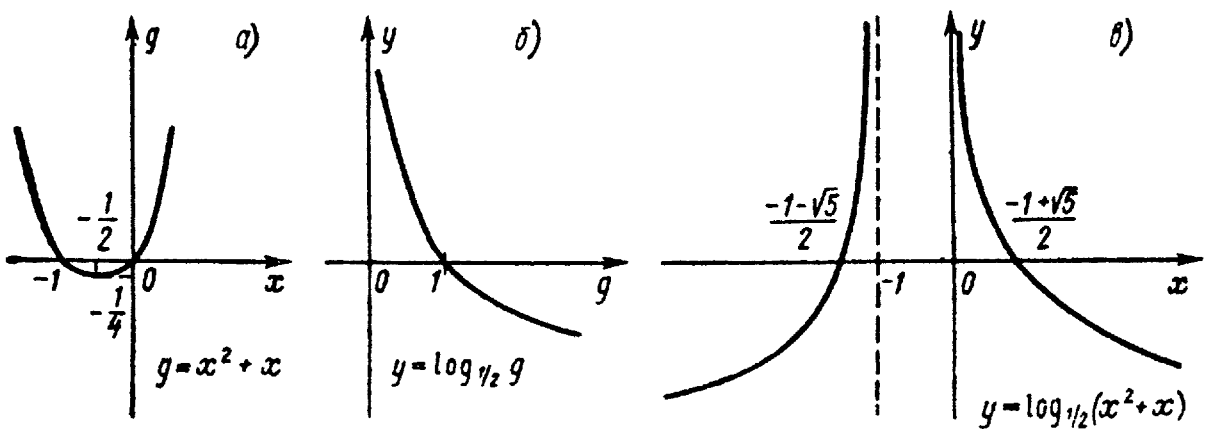
x	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	Участки монотонности функции $\frac{1}{x}$
$g = \frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	Изменение $g(x)$ на этих участках
$y = 2^{\frac{1}{x}}$	$1 \searrow 0$	$+\infty \searrow 1$	Изменение $y = y(g(x))$ на этих участках

Пример 7. Построить эскиз графика функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x)$.

Решение. Построим график функции $g = x^2 + x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} g$ (см. рис. а) и б)). Так как при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ функция $g = x^2 + x$ не положительна (рис. а)), то функция $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x)$ определена при $x \in (-\infty; -1) \cup 0; +\infty)$. Составим таблицу.

x	$-\infty \nearrow -1$	$0 \nearrow +\infty$
$g = x^2 + x$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$
$y = \log_{\frac{1}{2}} g$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$

Строим эскиз графика функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x)$ (см. рис. в)).



3.4. Кривые, заданные параметрически

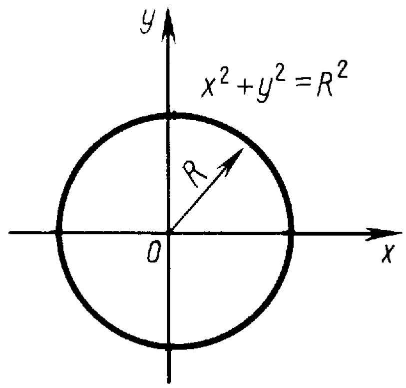
Кривой, заданной параметрически, называется множество точек плоскости xOy, координаты которых определяются из соотношений

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

при каждом фиксированном значении t из некоторого множества T.

Рассмотрим уравнения некоторых кривых в параметрической форме.

Окружность $x^2 + y^2 = R^2$. Обозначим через t угол, образованный радиусом, проведённым в некоторую точку $M(x, y)$ окружности и осью Ox. Тогда координаты любой точки окружности выразятся через параметр t

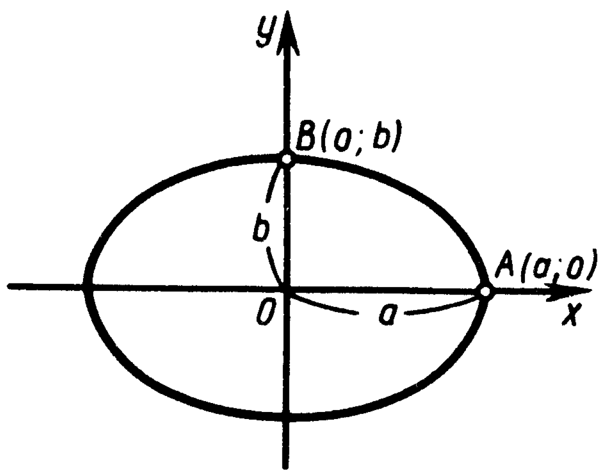


следующим образом:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Это параметрическое уравнение окружности.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Координаты любой точки эллипса выразятся через



параметр t следующим образом:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

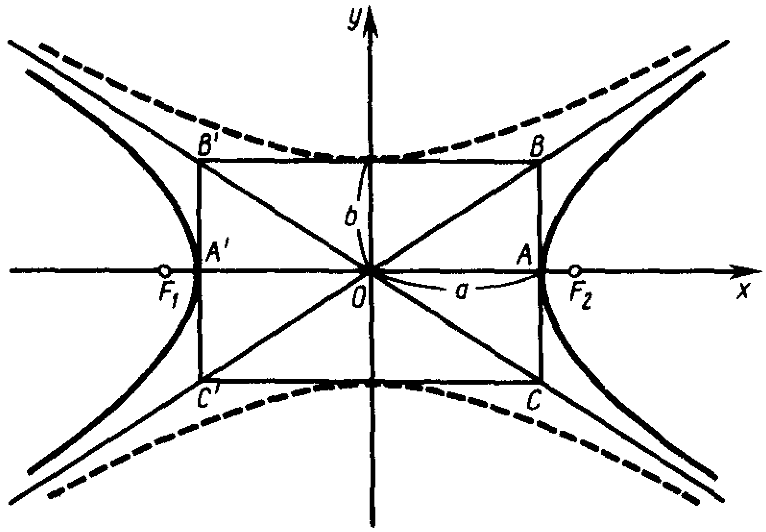
Это параметрическое уравнение эллипса.

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,t, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Это параметрическое уравнение гиперболы.

Для построения эскиза кривой, заданной параметрически на плоскости xOy, необходимо отдельно рассматривать участки монотонности $x(t)$, а затем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые проводятся при рассмотрении сложной функции.

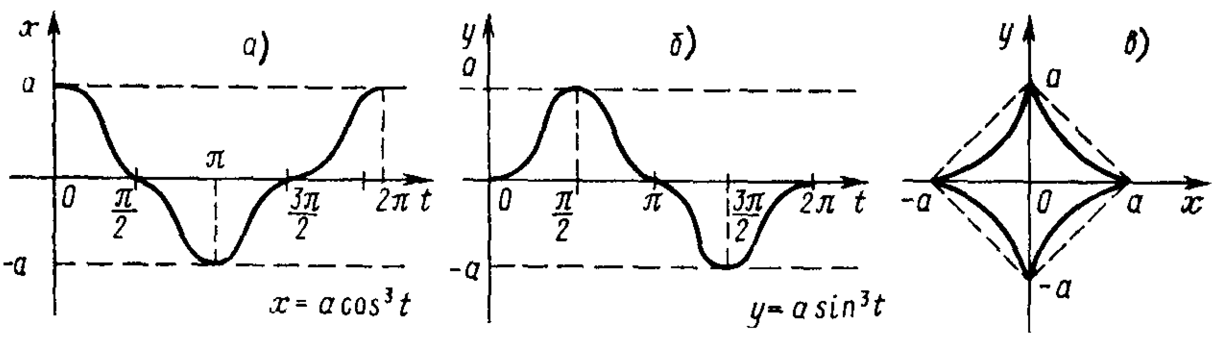


Пусть t возрастает. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ возрастают, то движение по кривой происходит направо вверх; если $x(t)$ убывает, а $y(t)$ возрастает, то движение по кривой происходит влево вверх и так далее. Если при $t \to t_0$ имеем $x \to a$, а $y(t)$ стремится к бесконечности, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x = a$. Если при $t \to t_0$ имеем, что $x(t)$ стремится к бесконечности, а $y(t) \to b$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = b$.

Таким образом, для построения эскиза кривой, заданной параметрически, важно точное определение участков монотонности функций $x(t)$ и $y(t)$.

Пример 8. Построить эскиз кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0 + 2\pi); y(t_0 + 2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0); y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке $[0; 2\pi)$. Построим эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рисунки а) и б)).



Промежутками монотонности $x(t)$ являются интервалы $(0; \pi)$ и $(\pi; 2\pi)$. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0); y(0)) = (a; 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right); y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0; a)$. Когда t растёт от $\frac{\pi}{2}$ до π, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi); y(\pi)) = (-a; 0)$. Когда t растёт от π до $\frac{3\pi}{2}$, движение по кривой происходит вправо вниз до точки $\left(x\left(\frac{3\pi}{2}\right); y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0; -a)$. Когда t растёт от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, движение по кривой происходит вправо вверх до точки $(x(2\pi); y(2\pi)) = (a; 0)$. Так как

$$x(2\pi - t_0) = x(t_0),\ y(2\pi - t_0) = -y(t_0),\ x(\pi - t_0) = -x(t_0),\ y(\pi - t_0) = y(t_0),$$

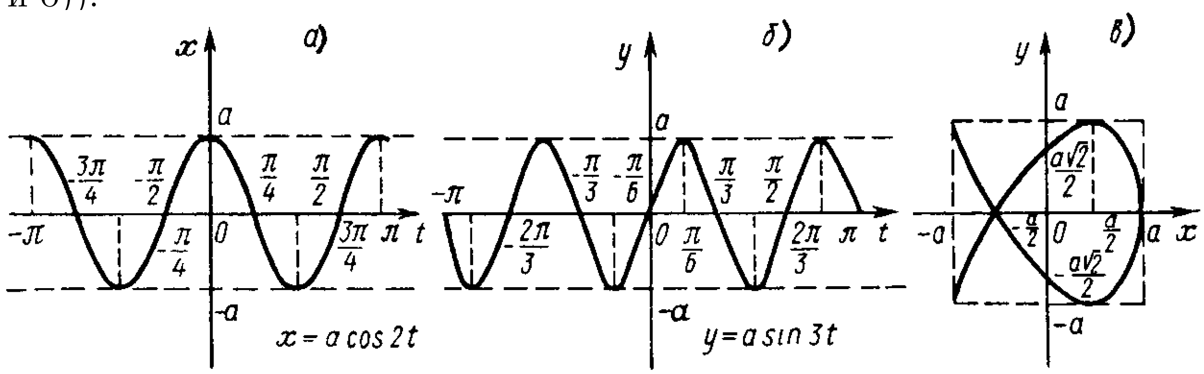
то вместе с точкой $(x_0; y_0)$ на кривой лежат точки $(-x_0; y_0)$ и $(x_0; -y_0)$, то есть она симметрична относительно обеих координатных осей. Пусть t меняется на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Соответствующие точки кривой лежат в первой четверти. Рассмотрим множество точек $\tilde{x} = a\cos^2 t$, $\tilde{y} = a\sin^2 t$. Это отрезок прямой $\tilde{x} + \tilde{y} = a$, лежащий в первой четверти. Так как при любом t, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $x < \tilde{x}$, $y < \tilde{y}$, то исследуемая кривая лежит ниже этой прямой. Эскиз кривой представлен на рисунке в).

Пример 9. Построить эскиз кривой $x = a\cos 2t$, $y = a\sin 3t$, $a > 0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0 + 2\pi); y(t_0 + 2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0); y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке длины 2π. Отметим ещё следующие соотношения:

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t), \quad x(\pi - t) = x(t), \quad y(\pi - t) = y(t).$$

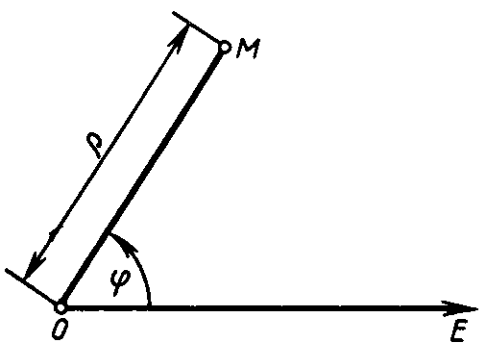
Отсюда следует, что при изменении t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получаются те же точки кривой, что и при изменении t на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, а при изменении t на промежутке $[-\pi; 0]$ получаются точки кривой, симметричные относительно оси Ox с точками, полученными при изменении t на $[0; \pi]$. Таким образом, достаточно рассматривать t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (см. рисунки а) и б)).

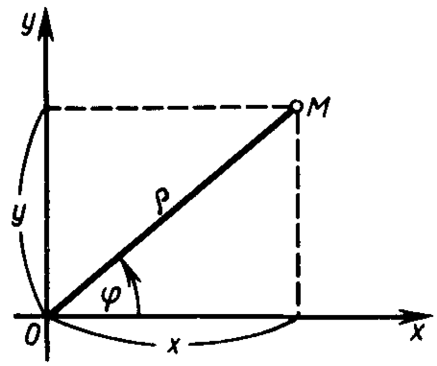


На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $x(t)$ монотонно убывает, следовательно, этому промежутку соответствует одна ветвь кривой. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{6}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0); y(0)) = (a; 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right); y\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{a}{2}; a\right)$. Когда t растёт от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой происходит влево вниз до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right); y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-a; a)$, пересекая ось Oy в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right); y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ и ось Ox в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right); y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{a}{2}; 0\right)$. При дальнейшем росте t от $\frac{\pi}{2}$ до π, как было отмечено выше, точки $(x(t); y(t))$ лежат на той же самой кривой. При изменении t от $-\pi$ до 0 получаем вторую ветвь кривой, симметричную первой ветви относительно оси Ox. Эскиз кривой представлен на рисунке в).

3.5. Полярная система координат. Уравнения кривых в полярной системе координат

Положение точки на плоскости можно определить с помощью полярной системы координат. Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, и выходящего из этой точки луча, называемого полярной осью. Положительными называем углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательными — по часовой стрелке.





Полярными координатами r и φ точки M, не совпадающей с полюсом, называются расстояние r от точки M до полюса O и угол φ от полярной оси до луча OM. Для полюса O полагается, что $r = 0$, а φ неопределён. Полярный угол точки M имеет бесконечно много значений, главным значением угла φ называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Установим связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси Ox совпадает с полярной осью. Тогда, между декартовыми координатами $(x; y)$ точки M и её полярными координатами (r, φ) имеют место соотношения

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

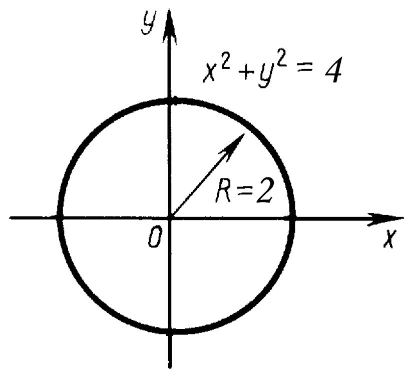
И обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Замечание. Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то угол φ можно найти из условия $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, причём за главное значение φ взять угол из $[0; 2\pi)$ такой, что знак $\sin\varphi$ совпадает со знаком y.

Пример 10. Нарисовать кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = 2$.

Решение. Поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то в декартовой системе координат уравнение имеет вид $2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ или $x^2 + y^2 = 4$ — это уравнение окружности радиусом 2 с центром в точке $(0; 0)$.



Пример 11. Пусть точка $M(x;y)$ имеет декартовы координаты $(-1;1)$. Найти полярные координаты этой точки, если системы совмещены.

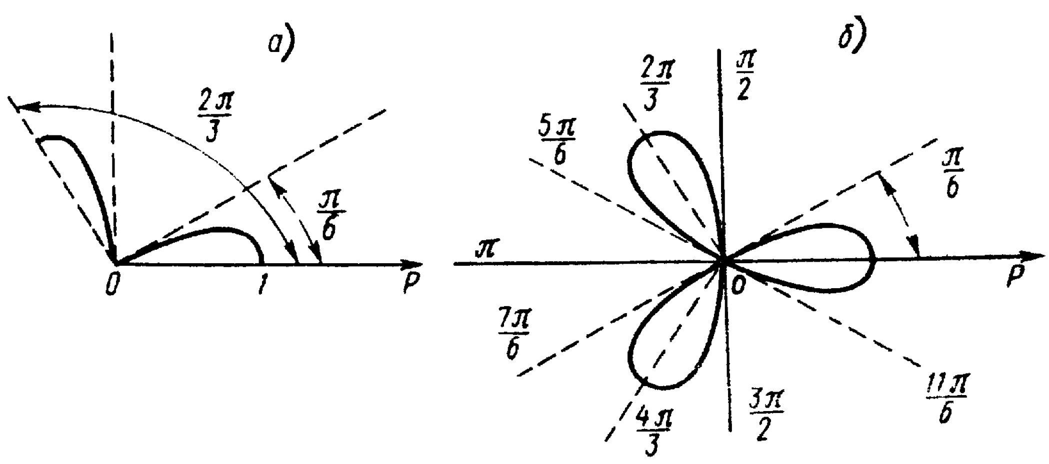
Решение. Вычисляем:

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\quad \cos\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то есть полярные координаты точки M есть $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 12. Нарисовать кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r=\cos 3\varphi$.

Решение. Функция $\cos 3\varphi$ — периодическая, с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{3}$, поэтому достаточно построить кривую для $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{3}$, а затем, используя периодичность, построить её для $\frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi<\frac{4\pi}{3}$ и, наконец, для $\frac{4\pi}{3}\leqslant\varphi<2\pi$. Построим ту часть кривой, которая расположена в угле $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{3}$. Функция $r=\cos 3\varphi$ на интервале $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ монотонно убывает от 1 до 0; на интервале $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ $r<0$, поэтому нет точек линии, расположенных внутри угла $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{2}$; на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$ кривая монотонно возрастает от 0 до 1. Для $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$ эскиз кривой представлен на рисунке а). Осталось построить кривую в других двух углах: $\frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi<\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}\leqslant\varphi<2\pi$, используя при этом периодичность функции $\cos 3\varphi$. Эскиз кривой приведён на рисунке б).



Пример 13. Определить вид кривой на декартовой плоскости xOy, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $r = \cos\varphi$.

Решение. Поскольку

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то в декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или $x^2 + y^2 = x$, откуда $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, — это есть уравнение окружности радиусом $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Заметим, что из условия $r = \cos\varphi$ следует, что $r^2 = r\cos\varphi$, откуда $x^2 + y^2 = x$.

Задачи для самостоятельного решения

Построить график функции:

128. $y = \frac{x+5}{x+3}$;
129. $y = \frac{5-2x}{x-2}$;
130. $y = \frac{4x+7}{2x-5}$;
131. $y = \frac{9x+4}{3x+2}$;
132. $y = \frac{3-3x}{2-6x}$;
133. $y = \frac{6x-2}{x-1}$;
134. $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$;
135. $y = \sqrt[3]{x(1+x^2)}$;
136. $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2}$;
137. $y = \sqrt[3]{x(2-x^2)}$;
138. $y = 3^{-\frac{1}{x}}$;
139. $y = 2^{2x-x^2}$;
140. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$;
141. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$;
142. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;
143. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$;
144. $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$;
145. $y = 2^{\frac{2-x}{x+1}}$;
146. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x-1}{3x+1}}$;
147. $y = 3^{\frac{x+1}{2x+1}}$;
148. $y = 1 + 3^{\frac{x}{x-1}}$;
149. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$;

150. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x}$;
151. $y = 2^{\sin x}$;
152. $y = 2^{4x-x^2-1}$;
153. $y = \log_2(x^2 + 2x)$;
154. $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+2}$;
155. $y = \log_2 \frac{x+4}{2-x}$;
156. $y = \log_3(x^2 - 6x + 5)$;
157. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 4x + 3)$;
158. $y = \log_{\frac{1}{4}}(4x - x^2)$;
159. $y = \log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$;
160. $y = \log_2 |\sin x|$;
161. $y = \log_{\frac{1}{2}} \cos x$;
162. $y = x \sin x$;
163. $y = x + \sin x$;
164. $y = x \sin^2 x$;
165. $y = |x| \sin x$;
166. $y = \arcsin \frac{1}{x}$;
167. $y = \arccos \frac{1}{x}$;
168. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;
169. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$;
170. $y = \arccos \frac{1}{x-3}$;
171. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+2}$;
172. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-1}{x+1}$;
173. $y = \arccos \frac{x}{x+1}$;
174. $y = -2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}$;
175. $y = 2 \arcsin \frac{x}{1-2x}$;
176. $y = \frac{1}{x^2-4}$;
177. $y = \frac{1}{1-x^2}$;
178. $y = \frac{1}{x^2-x}$;
179. $y = \frac{1}{x^3}$;
180. $y = \frac{1}{x^2-4x+1}$;
181. $y = \frac{1}{\log_2(3x+1)}$;
182. $y = \frac{1}{4^{3x-1}+2}$;
183. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1-3x)}$;
184. $y = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(1-4x)}$;
185. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}$;

186. $y = \frac{1}{3^x+3^{-x}}$;
187. $y = \frac{1}{\arcsin(3x+1)}$;
188. $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$;
189. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
190. $y = \frac{1-x^2}{x^2-4}$;
191. $y = \frac{1}{\arccos 2x}$;
192. $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;
193. $y = \log_2 \frac{x^2-1}{x+2}$;
194. $y = x^2 + \frac{1}{x}$;
195. $y = x^3 - \frac{1}{x}$;
196. $y = \frac{1}{\operatorname{arcctg}(x-1)}$;
197. $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2|x|-1}{|x|-2}$;
198. $y = \log_2 \left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)$;
199. $y = |\operatorname{tg} x + 1|$;
200. $y = |x| + \frac{1}{x}$;
201. $y = \sin x + |\sin x|$;
202. $y = \log_{\frac{1}{2}} |x^2 - 3x + 2|$;
203. $y = x^2 - |x| + 3x - 2$;
204. $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-2}$;
205. $y = \frac{1}{|2^{x-1}-1|}$;
206. $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$;
207. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$;
208. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;
209. $x = \frac{1}{\cos^3 t}$, $y = \operatorname{tg}^3 t$;
210. $r = \cos 2\varphi$;
211. $r = 3 \sin 2\varphi$;
212. $r = 4 \cos 3\varphi$;
213. $r = 2 \sin 3\varphi$;
214. $r = a \cos 4\varphi$;
215. $r = a \sin 4\varphi$;
216. $r = a(1 + \cos\varphi)$;
217. $r = 2 + \sin 2\varphi$;
218. $r = 4(1 - \cos\varphi)$;
219. $r = \frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1}$, $\varphi > 1$;
220. $\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}$.

ГЛАВА II

Пределы

§4. Предел функции

4.1. Определение предела

Пусть a — точка числовой прямой, $a \in (b; c)$. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве

$$E := \{x \mid x \in (b; c) \backslash \{a\}\}.$$

Число a называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (обозначается $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$), если для любого положительного числа ε $(\forall \varepsilon > 0)$ существует такое положительное число δ $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$, что для любого x $(\forall x)$ такого, что $0 < |x - a| < \delta$, $x \in E$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание. В определении предела нет никаких условий на значение функции $f(x)$ в точке a, более того, нет даже требования, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a.

Если в определении предела функции $f(x)$ заменить множество E на множество $E_+ = E \cap \{x > a\}$ $(E_- = E \cap \{x < a\})$, то получим определения односторонних пределов в точке $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a-} f(x)\right)$. Берётся правая (левая) полуокрестность точки a, то есть интервал вида $(a, a + \delta)$, $\delta > 0$ $\big((a - \delta, a)\big)$.

Пример 1. Показать, что $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$.

Решение. Как следует из определения предела, необходимо оценить разность $|x^2 - 16|$. Имеем, $|x^2 - 16| = |x - 4| \cdot |x + 4|$. Выделим некоторую окрестность точки 4, например, интервал $(3; 5)$. Для всех $x \in (3; 5)$ имеем $|x + 4| < 9$, следовательно, $|x^2 - 16| < 9 \cdot |x - 4|$. Так как δ-окрестность точки $x = 4$ $(4 - \delta; 4 + \delta)$ не должна выходить за пределы $(3; 5)$, то берём $\delta = \min\left\{1; \frac{\varepsilon}{9}\right\}$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $0 < |x - 4| < \delta$ следует неравенство $|x^2 - 16| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $\Big[x \to -\infty;$ $x \to \infty\Big]$ $\Big($ обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ $\Big[\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A;$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A\Big]\Big)$, если для любого положительного числа ε $(\forall \varepsilon > 0)$ существует такое положительное число C $(\exists C = C(\varepsilon))$, что для любого x, такого что $x > C$, $x \in E$

$\Big[x < -C, x \in E;\ |x| > C, x \in E\Big]$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 2. Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-10x+100} = 0$.

Решение. Рассмотрим луч $x > 20$, на котором будем производить дальнейшие оценки. Для $x > 20$ имеем:

$$x^2 - 10x + 100 > x^2 - 10x = x(x-10) > \frac{x^2}{2},$$

следовательно,

$$\left|\frac{x\cos x}{x^2 - 10x + 100}\right| < \frac{x}{x^2/2} = \frac{2}{x}.$$

Таким образом, если $C = \max\left\{20; \frac{2}{\varepsilon}\right\}$, то из неравенства $x > C$ следует

$$\left|\frac{x\cos x}{x^2 - 10x + 100}\right| < \varepsilon, \text{ то есть } \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 10x + 100} = 0.$$

Пример 3. Показать, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Запишем с использованием символов утверждение “число A не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$”:

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall\delta > \exists x_\delta = x(\delta) : 0 < |x_\delta - a| < \delta, x_\delta \in E, |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Если $A = 0$, то возьмём $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и $x_k = \frac{1}{2\pi k + \pi/2}$, тогда

$$\forall\delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : 0 < x_k < \delta \text{ и } |f(x_k) - 0| = |f(x_k| = 1 > \varepsilon_0,$$

таким образом, нуль не есть предел $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$. Если же $A \neq 0$, то возьмём $\varepsilon_0 = \frac{|A|}{2}$ и $x_k = \frac{1}{2\pi k}$. Тогда

$$\forall\delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : 0 < x_k < \delta \text{ и } |f(x_k) - A| = |A| > \varepsilon_0,$$

таким образом, и любое отличное от нуля число не есть предел функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

4.2. Свойства пределов

Сформулируем основные утверждения, используемые для вычисления пределов.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x);$$
$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x);$$

если $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)};$$

если в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$ имеем

$$f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) \text{ и } \lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = A, \text{ то } \lim_{x\to a} g(x) = A.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 + 3x^2 + 4x - 5)$.

Решение. Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения получаем, что

$$\lim_{x\to 2}(x^3 + 3x^2 + 4x - 5) = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 5 = 23.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-1}{x^3-2x+1}$.

Решение. Пользуясь утверждениями о пределе отношения получаем, что

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-1}{x^3-2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^3-2x+1)} = \frac{(-2)^2-1}{(-2)^3 - 2\cdot(-2)+1} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Замечание. В дальнейшем будем пользоваться тем, что для любой элементарной функции $f(x)$ и любой точки a из её области определения справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

При вычислении пределов часто применяется следующая теорема о пределе композиции: если функция $f(x)$ и существует $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, то

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f\left(\lim_{t\to t_0} x(t)\right) = f(a).$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 4\pi} \ln\left(1 + \sqrt{1+\sin^2 \frac{x}{2}}\right)$.

Решение. Напишем цепочку соотношений:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_2 = \sin y_1, \quad y_3 = y_2^2, \quad y_4 = 1 + y_3,$$
$$y_5 = \sqrt{y_4}, \quad y_6 = 1 + y_5, \quad y_7 = \ln y_6.$$

Применяя последовательно теорему о пределе композиции, получим

$$\lim_{x\to 4\pi} y_1(x) = 2\pi, \quad \lim_{x\to 4\pi} y_2(x) = \lim_{y_1\to 2\pi} \sin y_1 = 0,$$
$$\lim_{x\to 4\pi} y_3(x) = \lim_{y_2\to 0} y_2^2 = 0, \quad \lim_{x\to 4\pi} y_4(x) = \lim_{y_3\to 0}(1+y_3) = 1,$$
$$\lim_{x\to 4\pi} y_5(x) = \lim_{y_4\to 1} \sqrt{y_4} = 1, \quad \lim_{x\to 4\pi} y_6(x) = \lim_{y_5\to 1}(1+y_5) = 2,$$
$$\lim_{x\to 4\pi} \ln\left(1+\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}\right) = \lim_{x\to 4\pi} y_7(x) = \lim_{y_6\to 2} \ln y_6 = \ln 2.$$

Замечание. В теореме о пределе композиции условие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$ нельзя заменить на условие существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$. Дело в том, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ и $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t))$ существует, то верно равенство $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, но существование предела $f(x(t))$ не следует из существования пределов функций $f(x)$ и $x(t)$.

Пусть a — точка расширенной числовой прямой (то есть число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞). Обозначим через $U(a)$ окрестность точки a: если a — число, то $U(a)$ — интервал с центром в точке a; если $a = +\infty$, то $U(a)$ — любой луч $x > \alpha$; если $a = -\infty$, то $U(a)$ — любой луч $x < \alpha$; если $a = \infty$, то $U(a)$ — объединение двух лучей: $\{x > \alpha\} \cup \{x < \alpha\}$. Обозначим через $\dot{U}(a)$ проколотую окрестность точки a: $\dot{U}(a) = U(a)\setminus\{a\}$.

4.3. Бесконечно большая функция

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого положительного числа C существует окрестность $U(a)$ такая, что $|f(x)| > C$ для любого $x \in \dot{U}(a) \cap E$ (E — множество определения функции $f(x)$).

Заменяя в этом определении неравенство $|f(x)| > C$ на $f(x) > C$ ($f(x) < C$) получаем определение положительной (отрицательной) бесконечно большой функции.

Утверждение, что функция $f(x)$ при $x \to a$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой) записывается в виде:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\right).$$

Сформулируем основные соотношения для бесконечно больших функций.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$, и обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = +\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^3+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$.

Решение. Пользуясь утверждением о пределе произведения, получаем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^3+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)} = \lim_{x\to 0} \ln(x^3+4x+2) \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^{10}+x^3+x^2)} = \ln 2 \cdot 0 = 0.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{2^x}$.

Решение. Рассмотрим обратную величину $\frac{2^x}{x} = 2^x \cdot \frac{1}{x}$. Применяем утверждение о пределе произведения и получаем:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to -\infty} \left(2^x \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} 2^x \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{2^x} = -\infty$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+4x} + x\right)$.

Решение. Требуется вычислить предел суммы двух бесконечно больших при $x \to +\infty$ функций, поэтому

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+4x} + x\right) = +\infty.$$

§5. Вычисление предела в случае неопределённости

При вычислении пределов

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right), \quad \lim_{x\to a} \left(f(x) - g(x)\right)$$

могут возникнуть ситуации, когда непосредственное применение теорем о свойствах пределов и бесконечно больших функций не даёт возможность их вычислить. Такое положение возможно в следующих случаях.

1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (символически обозначается $\left[\frac{0}{0}\right]$);

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))$:
   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[0\cdot\infty]$).
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$:
   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[\infty-\infty]$).

В том случае, когда имеет место неопределённость, для вычисления предела - "раскрытия неопределённости" - преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные соотношения или сравнения поведения функции при стремлении $x \to a$ (соотношения эквивалентностей).

Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to a$ ($f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$), если существует такая функция $\alpha(x)$, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \to 1$ при $x \to 0$.

Соотношения эквивалентностей обладают следующими свойствами (везде подразумевается, что $x \to a$).

1. Если $f(x) \sim g(x)$, то $g(x) \sim f(x)$.
2. Если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) \sim h(x)$.
3. Если $f(x) \sim g(x)$ и $h(x) \sim s(x)$, то $f(x)\cdot h(x) \sim g(x)\cdot s(x)$.
4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$, то $f(x) \sim k$.

Справедливы следующие соотношения (два основных предела):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

В другой записи:

$$\sin x \sim x \text{ при } x \to 0, \quad e^x - 1 \sim x \text{ при } x \to 0.$$

Отсюда получаем, что при $x \to 0$:

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim x,$$
$$\arcsin x \sim \sin(\arcsin x) = x, \quad \ln(1+x) \sim e^{\ln(1+x)} - 1 = x.$$

Сведём полученные и аналогичные им соотношения в таблицу.

Эквивалентности при $x \to 0$
$\sin x \sim x$
$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$
$\operatorname{tg} x \sim x$
$\arcsin x \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\ln(1+x) \sim x$
$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \quad (m \geqslant 1, n \geqslant 1, a_n b_m \neq 0).$$

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^m.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)} =$$

$$= \frac{1}{b_m} \lim_{x\to+\infty} \left(a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{при } m > n, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{при } m > n, \\ \infty & \text{при } m > n. \end{cases}$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3+2x^2-4}{6x^2+8x+9}$.

Решение. Согласно примеру 1 $m = 2$, $n = 3$, отсюда $m < n$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+2x^2-4}{6x^2+8x+9} = \infty.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^3-3x+2}{8x^4-6x^3+5x+1}$.

Решение. Согласно примеру 1 $m = 4$, $n = 3$, отсюда $m > n$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{8x^4 - 6x^3 + 5x + 1} = 0.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3+6x^2-7x+2}{8x^3-12x+9}$.

Решение. Согласно примеру 1 $m = n = 3$, $b_m = 8$, $a_n = 5$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 + 6x^2 - 7x + 2}{8x^3 - 12x + 9} = \frac{5}{8}.$$

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt[3]{8x^3+7}}{\sqrt[5]{x^5+9}}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt[3]{8x^3+7}}{\sqrt[5]{x^5+9}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \frac{\sqrt[3]{8x^3+7}}{x}}{\frac{\sqrt[5]{x^5+9}}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + \sqrt[3]{8+\frac{7}{x^3}}}{\sqrt[5]{1+\frac{9}{x^5}}} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Сделаем следующие преобразования.

$$\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)} = \frac{2\ln|x| + \ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{10\ln|x| + \ln\left(1+\frac{x^3+x}{x^{10}}\right)} = \frac{2 + \frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10 + \frac{\ln\left(1+\frac{x^2+x}{x^{10}}\right)}{\ln|x|}}.$$

Применяя соотношения для бесконечно больших функций и для вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right) \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln|x|} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|} = 0,$$

откуда, применяя соотношения для вычисления пределов, окончательно получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5}.$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Если $x<0$, то

$$\sqrt{x^2+4x+5}+x=\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\frac{4+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)=-2$.

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$.

$$\sqrt{x^2+9x}-x=\frac{x^2+9x-x^2}{\sqrt{x^2+9x}+x}=\frac{9x}{\sqrt{x^2+9x}+x}=$$

$$=\frac{9}{\sqrt{\frac{x^2+9x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\frac{9}{\sqrt{1+\frac{9}{x}}+1},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right)=\frac{9}{2}$.

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. В проколотой окрестности точки $x=1$ функции

$$\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}\ \text{и}\ \frac{x^2+x+1}{x-3}$$

тождественно равны, значит, имеют при $x\to1$ один и тот же предел. Предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-3}$ вычисляется с использованием утверждения о пределе частного и пределе многочлена. Итак,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}}{\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-3}}=-\frac{3}{2}.$$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Пользуясь соотношениями эквивалентности получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Внимание! Соотношения эквивалентностей можно применять только в случае, когда функция, которую заменяют на эквивалентную, является множителем всего выражения. Замену на эквивалентную функцию в отдельном слагаемом алгебраической суммы делать нельзя.

В случае, когда $\lim\limits_{x\to a} t(x)=0$, справедливы следующие соотношения, следующие из определения эквивалентных функций и теоремы о пределе композиции функций.

Эквивалентности при $x \to a$ $\lim\limits_{x\to a} t(x)=0$
$\sin t(x) \sim t(x)$
$1-\cos t(x) \sim \frac{t^2(x)}{2}$
$\operatorname{tg} t(x) \sim t(x)$
$\arcsin t(x) \sim t(x)$
$\operatorname{arctg} t(x) \sim t(x)$
$e^{t(x)}-1 \sim t(x)$
$a^{t(x)}-1 \sim t(x)\ln a$
$\ln(1+t(x)) \sim t(x)$
$\log_a(1+t(x)) \sim \frac{t(x)}{\ln a}$
$(1+t(x))^m-1 \sim m\cdot t(x)$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\arcsin(x+3)}{x^2+3x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция

$$\arcsin(x+3)=\arcsin t(x), \text{ где } t(x)=x+3 \text{ и } \lim_{x\to -3} t(x)=0,$$

поэтому справедливо соотношение $\arcsin(x+3)\sim x+3$ при $x\to -3$. Итак,

$$\lim_{x\to -3}\frac{\arcsin(x+3)}{x^2+3x}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+3x}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x(x+3)}=-\frac{1}{3}.$$

Пример 12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{1-\cos 15x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим функцию

$$1-\cos 10x=1-\cos t(x), \text{ где } t(x)=10x \text{ и } \lim_{x\to 0} 10x=0,$$

поэтому $1-\cos 10x\sim\frac{(10x)^2}{2}$. Аналогично, $1-\cos 15x\sim\frac{(15x)^2}{2}$, отсюда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{1-\cos 15x}=\lim_{x\to 0}\frac{(10x)^2}{(15x)^2}=\frac{4}{9}.$$

Пример 13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4^x-64}{x-3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Представим функцию, стоящую в числителе, в виде

$$4^x - 64 = 4^x - 4^3 = \left(\frac{4^x}{4^3} - 1\right) \cdot 4^3 = 4^3 \cdot \left(4^{x-3} - 1\right).$$

Функция $4^{x-3} - 1 = 4^{t(x)} - 1$, где $t(x) = x - 3$ и $\lim\limits_{x \to 3} t(x) = \lim\limits_{x \to 3}(x-3) = 0$, отсюда видно, что $4^{x-3} - 1 \sim (x-3)\ln 4$ при $x \to 3$. Вычислим предел

$$\lim_{x \to 3} \frac{4^x - 64}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{4^3 \cdot \ln 4 \cdot (x-3)}{x - 3} = 4^3 \cdot \ln 4.$$

Пример 14. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4^x - 10^x}{3^x - 7^x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим выражение, стоящее в числителе: $4^x - 10^x = \left[\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1\right] \cdot 10^x$. Легко заметить, что при $x \to 0$ $\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1 \sim x \ln \frac{4}{10}$. Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе: $3^x - 7^x = \left[\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1\right] \cdot 7^x$ и при $x \to 0$ $\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1 \sim x \ln \frac{3}{7}$. Получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 10^x}{3^x - 7^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1\right) \cdot 10^x}{\left(\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1\right) \cdot 7^x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln \frac{4}{10} \cdot 10^x}{x \cdot \ln \frac{3}{7} \cdot 7^x} =$$

$$= \frac{\ln \frac{4}{10}}{\ln \frac{3}{7}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{10^x}{7^x} = \frac{\ln \frac{4}{10}}{\ln \frac{3}{7}} = \frac{\ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{3}{7}}.$$

Пример 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция, стоящая в числителе $\sqrt[3]{1+2x} - 1 \sim (2x) \cdot \frac{1}{3}$, так как $\lim\limits_{x \to 0} t(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, отсюда получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot 2x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{7^{x/2} - 1}{\ln(1+3x)}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция, стоящая в числителе $7^{x/2} - 1 \sim \frac{x}{2} \ln 7$ при $x \to 0$, а функция, стоящая в знаменателе $\ln(1+3x) \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{7^{x/2} - 1}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2} \ln 7}{3x} = \frac{\ln 7}{6}.$$

Пример 17. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x} - 1}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{1+2x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[7]{1-3x}=1$, то представим выражение, стоящее в числителе в виде

$$\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}=\sqrt[3]{1+2x}-1+1-\sqrt[7]{1-3x}$$

и вычислим сумму пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\sqrt[8]{1+x}-1}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x}-1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot 2x}{\frac{1}{8}\cdot x}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}\cdot 3x}{\frac{1}{8}\cdot x}=\frac{16}{3}+\frac{24}{7}=\frac{184}{21}.$$

Очень часто при работе с функциями вида:

$$\ln g(x) \text{ и } (g(x))^m-1, \text{ где } \lim_{x\to a} g(x)=1,$$

используется преобразование

$$g(x)=(g(x)-1)+1=t(x)+1, \text{ где } t(x)=g(x)-1 \text{ и } \lim_{x\to a} t(x)=0.$$

Отсюда получаем

$$\ln g(x)\sim g(x)-1 \text{ и } (g(x))^m-1\sim m\cdot(g(x)-1), \text{ где } \lim_{x\to a} g(x)=1.$$

Пример 18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе, в окрестности нуля.

$$\sqrt{1+x\sin x}-\cos x=\cos x\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}}-1\right).$$

Выражение, стоящее под знаком корня, стремится к 1: $\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}\to 1$ при $x\to 0$. Представим это выражение в виде

$$\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}=1+\left(\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}-1\right)=1+\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Отсюда и из сказанного выше следует, что

$$\sqrt{\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x+x\sin x}{\cos^2 x}.$$

Перейдём к вычислению предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\cos x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x+x\sin x}{\cos^2 x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(3x)^2}{\sin x(\sin x+x)}=18\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\sin x+x)}=18\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+x}.$$

Для вычисления последнего предела применим свойство:

$$\text{если }\lim_{x\to a}f(x)=b\neq 0,\ \text{ то }\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{b}.$$

Находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1+1=2.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+x}=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=18\cdot\frac{1}{2}=9.$$

Пример 19. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{3x-1}{3x-6}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[0\cdot\infty]$. Рассмотрим функцию $\ln\frac{3x-1}{3x-6}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{3x-6}=1$, то представим выражение, стоящее под знаком логарифма, в виде

$$\frac{3x-1}{3x-6}=1+\left(\frac{3x-1}{3x-6}-1\right)=1+\frac{5}{3x-6}=1+t(x),$$
$$\text{где }\lim_{x\to\infty}t(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3x-6}=0.$$

Справедливо соотношение

$$\ln\frac{3x-1}{3x-6}=\ln\left(1+\frac{5}{3x-6}\right)\sim\frac{5}{3x-6}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{3x-1}{3x-6}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{5}{3x-6}=\frac{5}{3}.$$

§6. Вычисление предела степенно-показательной функции

Степенно-показательной функцией называется функция вида $(u(x))^{v(x)}$, $u(x)>0$.

Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем
$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x))}.$$
Таким образом, нахождение предела степенно-показательной функции сводится к нахождению предела $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x))$.

Если $\lim\limits_{x\to a} v(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \ln u(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x) = e^B$, так как
$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln u(x)} = e^B.$$
Отсюда,
$$e^{\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x))} = e^{A\cdot B} = \left(e^B\right)^A = \left(\lim_{x\to a} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$
Другими словами, если
$$\lim_{x\to a} u(x) = u,\ u > 0 \text{ и } \lim_{x\to a} v(x) = v, \text{ то } \lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u^v.$$

Если $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x)) = +\infty$, то и $e^{(v(x)\ln u(x))} \to +\infty$ при $x \to a$. Если $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x)) = -\infty$, то $e^{(v(x)\ln u(x))} \to 0$ при $x \to a$.

Отсюда видно, что если $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x)) = \infty$ и произведение $v(x)\ln u(x)$ не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности точки a, то функция $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ не имеет предела при $x \to a$.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+5}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5) = 6$, то
$$\lim_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+5} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1}{8}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x}$.

Решение. Представим $\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x}$ в виде:
$$\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x} = e^{\ln x\cdot\ln\frac{x^2+3}{3x^2+1}}.$$
Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\cdot\ln\frac{x^2+3}{3x^2+1} = -\infty$, следовательно
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x} = 0.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Представим $\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}}$ в виде:

$$\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}\ln\sin^2 x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$, то

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\sin^2 x\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0}\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Пусть в произведении $v(x)\ln u(x)$ предел одного из сомножителей при $x\to a$ равен нулю, а второй сомножитель является бесконечно большой функцией при $x\to a$. Такое возможно в трёх случаях:

1) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$ (символически обозначается $\left[\infty^0\right]$);
2) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ (символически обозначается $\left[0^0\right]$);
3) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ (символически обозначается $[1^\infty]$).

В этих случаях для вычисления пределов применяют приёмы, которые были показаны при вычислении пределов в случаях неопределённостей.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[1^\infty]$. Представим в виде:

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2x}\ln(1+\sin x)}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Получим

$$\lim_{x\to 0+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a>1,\ p>0),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^q x}{x^p} = 0 \quad (p>0,\ q>0),$$

$$\lim_{x\to 0+} x^p\ln^q x = 0 \quad (p>0,\ q>0).$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[0^0\right]$. Представим $x^x = e^{x\ln x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\infty^0\right]$. Представим

$$\left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{5x^2+1}{x-4}}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{5x^2}{x-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x\cdot\frac{5x+\frac{1}{x}}{x-4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\ln x + \ln\frac{5x+\frac{1}{x}}{x-4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{5x^2+1}{x^2-4x} = 0+0=0.$$

Отсюда окончательно получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить предел:

221. $\lim\limits_{x\to-1}(x^3+5x^2+6x+1)$;

222. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$;

223. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$;

224. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$;

225. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$;

226. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 4x}$;

227. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$;

228. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$;

229. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

230. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$;

231. $\lim\limits_{x\to3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;

232. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

233. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$;

234. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}$;

235. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+5x+1}{3+14x^2+2x}$;

236. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$;

237. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2+2}$;

238. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+4}{x^2+5}$;

239. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$;

240. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5}$;

241. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$;

242. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$;

243. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

244. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

245. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$;

246. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$;

247. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$;

248. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$;

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{4-x^2}+2^{\frac{1}{x-1}}\right)$;

250. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

251. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$;

252. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$;

253. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$;

254. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$;

255. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

256. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

257. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{3+x+x^2}}{x^2-3x+2}-\frac{\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}\right)$;

258. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

259. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

260. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

261. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

262. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^3+2x^2}$;

263. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1}$;

264. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$;

265. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$;

266. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 10x}{\sin 9x}$;

267. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$;

268. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$;

269. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

270. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1}-1}$;

271. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$;

272. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$;

273. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$;

274. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sin(x-3)}{x^2-9}+4^{-\frac{1}{(x-3)^2}}\right)$;

275. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$;

276. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin x}{\frac{1}{\cos 2x}-1}$;

277. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x+b)+\sin(x-b)}{2x}$;

278. $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}x$;

279. $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\frac{x}{3^n}$;

280. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$;

281. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

282. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$;

283. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$;

284. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$;

285. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$;

286. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt[5]{x}-1)(2^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$;

287. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{\frac{4}{5}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$;

288. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$;

289. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$;

290. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^{10}-1}$;

291. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$;

292. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$;

293. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\lg \frac{x}{10}}{x-10}$;

294. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$;

295. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$;

296. $\lim\limits_{n\to \infty} n^2 \ln\cos\frac{\pi}{n}$.

297. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln\log_2 x}{x-2}$;

298. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$;

299. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4^x-64}{x-3}$;

300. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x}$;

301. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x}-e^{3x}}{\sin 4x-\sin 3x}$;

302. $\lim\limits_{x\to \infty} x\ln\frac{4+x}{2+x}$;

303. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$;

304. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\ln(2x+5)-\ln(2x+1)\right)$;

305. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lg(1+10x)}{\log_7(1+5x)}$;

306. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$;

307. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{3^x-1}$;

308. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4^x-1}{\arccos x}$;

309. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x}-3^{\sin x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

310. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4^{x-2}-1}{3^{x-2}-1}$;

311. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{5^x-5^5}{\operatorname{arctg}(x-5)}$;

312. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$;

313. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-2x)}$;

314. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$;

315. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln\ln x}{2x-2e}$;

316. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\log_3 x-1}{x-3}$;

317. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;

318. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

319. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$;

320. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

321. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$;

322. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^n$;

323. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

324. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

325. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$;

326. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

327. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+4)-\ln n)$;

328. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln n-\ln(n+2))$;

329. $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{3x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$;

330. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$;

331. $\lim\limits_{x\to 0} (2^x+\sin 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}$;

332. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

333. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos 4x+2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

334. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{1/\cos\frac{\pi x}{2}}$;

335. $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{x^2}+\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

336. $\lim\limits_{x\to 5} \left(2-\frac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{5}}$;

337. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3+x}{7+x}\right)^{1/\sin\frac{2}{x}}$;

338. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 7x-1}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$;

339. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$;

340. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{3+2x}$;

341. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

342. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$;

343. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$;

344. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$;

345. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-5^n}{1+5^{n+1}}$;

346. $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{3-10^n}{4+10^{n+1}}$;

347. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x\left(\sqrt[3]{1+3x^2}-1\right)}{x\ln\cos 3x}$;

348. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{6}}\frac{2^{3x}-\sqrt{2}}{6x-1}$;

349. $\lim\limits_{x\to\infty}2x\log_2\frac{3+x}{4+x}$;

350. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x)}{1-x^2}$;

351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{7}{x}\right)^{x^2}$;

352. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 2}{\sin 5x-\sin 4x}$;

353. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)\sin(x-2)}{x^2-4x+4}$;

354. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^a-2^a}{x^b-2^b}$;

355. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$;

356. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1+\operatorname{tg}x}{x}$;

357. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}$;

358. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$;

359. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cos(3x-9)-\cos(2x-6)}{\sqrt{x^2-6x+10}-1}$;

360. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\sqrt{x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}}-1}$;

361. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\log_3(3+x^2)-1}$;

362. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\log_3 x-1}$;

363. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log_4\cos(x-1)}{\sqrt[5]{2+x^2-2x}-1}$;

364. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4^x-16}{\sqrt[5]{3-x}-1}$;

365. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+5\sin x}{x+1}$;

366. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-3x-4}$;

367. $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}$;

368. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+1}$;

369. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)+\log_3(1-3x)}{x^2}$;

370. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sin x-\sin 5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

371. $\lim\limits_{x\to7}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{7}}{x-7}$;

372. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos\pi x}{\operatorname{ctg}7\pi x}$;

373. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{36x^2-\pi^2}$;

374. $\lim\limits_{x\to3}\frac{2^x-8}{\sin\pi x}$;

375. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}}$;

376. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}{\sin\pi x}$;

377. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{2+3x}-2}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}$;

378. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+\sin 6x+\sin 7x}{\sin 9x-\sin 4x}$;

379. $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{\log_3(2x-17)}$.

ГЛАВА III

Дифференциальное исчисление

§7. Производная функции

7.1. Определение производной

Рассмотрим функцию $y(x)$, определённую на некотором интервале $(a;b)$.

Разность $\triangle x = x - x_0$ $(x, x_0 \in (a;b))$ называется приращением аргумента x в точке x_0. Разность $\triangle y(x_0) = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)$ называется приращением функции y в точке x_0.

Если существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется производной (конечной или бесконечной) функции y в точке x_0 и обозначается $y'(x_0)$.

Для производной функции $y = f(x)$ используются следующие обозначения:

$$y', \quad y'(x), \quad f', \quad f'(x), \quad y'_x, \quad f'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy(x)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Замечание. Приращение $\triangle y(x_0)$ функции $y(x)$ в точке x_0 часто обозначают через $\triangle y$. Однако, не следует забывать, что эта величина зависит от точки x_0 и от приращения $\triangle x$.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, где α — угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

Механический смысл производной — это скорость (v) изменения пути (s) по времени (t): $v = s'(t)$.

Пример 1. Найти по определению производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \neq 0$. Так как $y(x) = \frac{1}{x}$, то $y(x_0) = \frac{1}{x_0}$ и $y(x_0 + \triangle x) = \frac{1}{x_0 + \triangle x}$, поэтому

$$\triangle\, y(x_0) = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = \frac{1}{x_0 + \triangle x} - \frac{1}{x_0} = \\ = \frac{x_0 - (x_0 + \triangle x)}{x_0(x_0 + \triangle x)} = \frac{-\triangle\, x}{x_0(x_0 + \triangle x)}.$$

Отсюда,

$$\frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x} = \frac{\frac{-\triangle x}{x_0(x_0 + \triangle x)}}{\triangle x} = -\frac{1}{x_0(x_0 + \triangle x)}.$$

Следовательно,

$$y'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \left(-\frac{1}{x_0(x_0 + \triangle x)} \right) = -\lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{x_0^2 + x_0 \triangle x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число неравное нулю, то для любого числа $x \neq 0$ получаем

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Например, $y'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$.

Пример 2. Найти по определению производную функции $y = \sin x$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку x_0. Так как $y(x) = \sin x$, то $y(x_0) = \sin x_0$ и $y(x_0 + \triangle x) = \sin(x_0 + \triangle x)$, поэтому

$$\triangle y(x_0) = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = \sin(x_0 + \triangle x) - \sin x_0.$$

Следовательно,

$$\frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x} = \frac{\sin(x_0 + \triangle x) - \sin x_0}{\triangle x} = \\ = \frac{2 \sin \frac{\triangle x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\triangle x}{2} \right)}{\triangle x} = \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} \cos \left(x_0 + \frac{\triangle x}{2} \right).$$

Воспользовавшись непрерывностью функции $\sin x$ и первым замечательным пределом

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

получаем

$$y'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0.$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число, то для любого числа x выводим

$$y'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Например, $y'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

7.2. Производные основных элементарных функций

Приведём производные основных элементарных функций.
$(c)' = 0$ (c — число);
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
$(e^x)' = e^x$;
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
$(\log_a x)'x = \frac{1}{x\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;
$(\sin x)' = \cos x$;
$(\cos x)' = -\sin x$;
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, где $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x \neq 0$, где $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Пример 3. Найти производные следующих выражений: 5, $\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}$, 6^x, $\log_3 x$.

Решение. Производная числа равна нулю, поэтому $5' = 0$, $\left(\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}\right)' = 0$, так как 5 и $\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}$ — числа.

Для нахождения производных функций 6^x и $\log_3 x$ воспользуемся табличными формулами для производных показательной (при $a = 6$) и логарифмической (при $a = 3$) функций, имеем: $(6^x)' = 6^x \ln 6$, $(\log_3 x)' = \frac{1}{x\ln 3}$.

Пример 4. Вычислить производные следующих функций: x^{17}, $x^{\pi-e}$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}$.

Решение. Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Имеем:

$$\left(x^{17}\right)' = 17x^{17-1} = 17x^{16};$$

$$\left(x^{\pi-e}\right)' = (\pi - e)x^{\pi-e-1};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}\right)' = \left(x^{-\frac{7}{5}}\right)' = -\frac{7}{5}x^{-\frac{7}{5}-1} = -\frac{7}{5}x^{-\frac{12}{5}} = -\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{12}{5}}} = -\frac{7}{5\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

7.3. Производная суммы, разности, произведения и частного

Производные суммы, разности, произведения и частного двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ находятся по следующим формулам:

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (u-v)' = u' - v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad (cu)' = cu',\ \text{с — число},$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0.$$

Пример 5. Найти производную функции $\frac{1}{x^3} - 5\ln x$.
Решение.

$$\left(\frac{1}{x^3} - 5\ln x\right)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' - (5\ln x)' = \left(x^{-3}\right)' - 5\,(\ln x)' =$$

$$= -3x^{-4} - 5\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x} = -\frac{3+5x^3}{x^4}.$$

Пример 6. Найти производную функции $\frac{2\operatorname{ch} x}{3} + \frac{\operatorname{cth} x}{4}$.
Решение.

$$\left(\frac{2\operatorname{ch} x}{3} + \frac{\operatorname{cth} x}{4}\right)' = \left(\frac{2\operatorname{ch} x}{3}\right)' + \left(\frac{\operatorname{cth} x}{4}\right)' = \frac{2}{3}(\operatorname{ch} x)' + \frac{1}{4}(\operatorname{cth} x)' =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{sh} x + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) = \frac{2\operatorname{sh} x}{3} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 x}.$$

Пример 7. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x + 7$, найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-1)$.

Решение. Сначала найдём производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = (5x^3 - 3x^2 - 2x + 7)' = (5x^3)' - (3x^2)' - (2x)' + 7' =$$
$$= 5(x^3)' - 3(x^2)' - 2x' + 0 = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 15x^2 - 6x - 2.$$

Итак, $f'(x) = 15x^2 - 6x - 2$. Теперь находим значения производных при конкретных значениях x:

$$f'(0) = 15 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 2 = 0 - 0 - 2 = -2,$$
$$f'(2) = 15 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2 = 60 - 12 - 2 = 46,$$
$$f'(-1) = 15 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 2 = 15 + 6 - 2 = 19.$$

Пример 8. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + x)\cos x$.
Решение.

$$f'(x) = \big((x^2 + x)\cos x\big)' = (x^2 + x)'\cos x + (x^2 + x)(\cos x)' =$$
$$= (2x + 1)\cos x + (x^2 + x)(-\sin x).$$

Пример 9. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}$.
Решение.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2^x}\right)' =$$
$$= \frac{(x^3 + 2x^2 + 5x + 1)'(x^2 + 2^x) - (x^3 + 2x^2 + 5x + 1)(x^2 + 2^x)'}{(x^2 + 2^x)^2} =$$
$$= \frac{(3x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2^x) - (x^3 + 2x^2 + 5x + 1)(2x + 2^x \ln 2)}{(x^2 + 2^x)^2}.$$

Пример 10. Найти производную функции $f(x) = \arccos x \ln x \operatorname{sh} x$.
Решение.

$$f'(x) = (\arccos x \ln x \operatorname{sh} x)' = ((\arccos x \ln x)\operatorname{sh} x)' =$$
$$= (\arccos x \ln x)' \operatorname{sh} x + (\arccos x \ln x)(\operatorname{sh} x)' =$$
$$= ((\arccos x)' \ln x + \arccos x (\ln x)')\operatorname{sh} x + (\arccos x \ln x)\operatorname{sh} x =$$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ln x + \arccos x \frac{1}{x}\right)\operatorname{sh} x + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ln x \operatorname{sh} x + \arccos x \frac{1}{x} \operatorname{sh} x + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x =$$
$$= \frac{\arccos x \operatorname{sh} x}{x} - \frac{\ln x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x.$$

Пример 11. Найти производную функции $f(x)=\frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}$.

Решение. Функция $\lg x$ — это десятичный логарифм, то есть $\lg x = \log_{10} x$. Применим формулы производных частного и произведения:

$$\left(\frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}\right)' = \frac{\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)'\cdot\lg x-\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot(\lg x)'}{(\lg x)^2} =$$
$$= \frac{\left(\left(x^{13}\right)'\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(\operatorname{arcctg} x\right)'\right)\cdot\lg x-\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot\frac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$
$$= \frac{\left(13x^{12}\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\right)\cdot\lg x - x^{13}\operatorname{arcctg} x\frac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$
$$= \frac{13x^{12}\operatorname{arcctg} x\lg x-\frac{x^{13}\lg x}{1+x^2}-\frac{x^{12}\operatorname{arcctg} x}{\ln 10}}{\lg^2 x}.$$

7.4. Производная сложной функции

Пусть функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в некоторой точке $x=x_0$, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда, сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет производную в точке $x=x_0$, которая вычисляется по формуле

$$[f(\varphi(x_0))]'=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

Для краткости используется следующая запись последней формулы:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Пример 12. Найти производную функции $\ln\sin x$.

Решение. Обозначим $y=\ln u$, $u=\sin x$, тогда $y=\ln\sin x$. По теореме о производной сложной функции $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. Находим:

$$y'_u=(\ln u)'_u=\frac{1}{u},\qquad u'_x=(\sin x)'_x=\cos x,$$

откуда

$$(\ln\sin x)'=y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\operatorname{ctg} x.$$

Пример 13. Найти производную функции $y(x)=e^{x^2}$.

Решение. Обозначим $u=x^2$, тогда $y(u)=e^u$. По теореме о производной сложной функции $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. Находим:

$$y'_u=(e^u)'_u=e^u,\qquad u'_x=\left(x^2\right)'_x=2x,$$

откуда

$$y'_x = \left(e^{x^2}\right)' = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Часто более удобно непосредственно находить производные промежуточных функций.

Пример 14. Найти производную функции $\ln\sin x$ (см. пример 12).

Решение.

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 15. Найти производную функции $y(x) = e^{x^2}$ (см. пример 13).

Решение.

$$y'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Пример 16. Найти производную функции e^{-x}.

Решение.

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

Пример 17. Найти производную функции $(\operatorname{tg}\sqrt{x})^3$.

Решение.

$$\left((\operatorname{tg}\sqrt{x})^3\right)' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2(\operatorname{tg}\sqrt{x})' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' =$$

$$= 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

Пример 18. Найти производную функции $\cos\log_6 5x - \log_6\cos 5$.

Решение.

$$(\cos\log_6 5x - \log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - (\log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x \cdot (\log_6 5x)' = -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{(5x)\ln 6} \cdot (5x)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{5x\ln 6} \cdot 5 = -\frac{\sin\log_6 5x}{x\ln 6}.$$

Замечание. Выражение $\log_6\cos 5$ из примера 18 является числом, поэтому $(\log_6\cos 5)' = 0$.

Пример 19. Найти производную функции $\operatorname{arctg}^2 e^{-x}$.

Решение.

$$\left(\operatorname{arctg}^2 e^{-x}\right)' = \left(\left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)^2\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)' =$$
$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2}\cdot\left(e^{-x}\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot e^{-x}\cdot(-x)' =$$
$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x}\cdot\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot e^{-x}\cdot(-1) = -\frac{2e^{-x}\operatorname{arctg} e^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$

Пример 20. Найти производную функции $2\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}$.
Решение.

$$\left(2\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = 2\left(\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = 2\left(\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)^3\right)' =$$
$$= 2\cdot\left(3\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)^2\right)\cdot\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = 6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\cdot\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' =$$
$$= 6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}\cdot\left(\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = \frac{6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}\cdot\left((\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}}\right)' =$$
$$= \frac{6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}\cdot\frac{1}{4}\cdot(\operatorname{tg} 5x)^{-\frac{3}{4}}\cdot(\operatorname{tg} 5x)' = \frac{6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4(\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}}(\operatorname{tg} 5x)^{\frac{3}{4}}}\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot(5x)' =$$
$$= \frac{3\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4\operatorname{tg} 5x\cos^2 5x}\cdot 5 = \frac{15\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4\sin 5x\cos 5x} = \frac{15\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{2\sin 10x}.$$

Замечание. В некоторых случаях удобнее упростить функцию до взятия производной. Если в примере 20 сначала преобразовать функцию следующим образом, то вычисления будут проще:

$$2\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x} = 2\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)^3 = 2\left(\ln(\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}}\right)^3 =$$
$$= 2\left(\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg} 5x\right)^3 = \frac{1}{32}\left(\ln\operatorname{tg} 5x\right)^3.$$

Пример 21. Вычислить производную функции $y(x) = \frac{\sin 14x}{2\cos 7x}$.
Решение. Сначала преобразуем функцию $y(x)$:

$$y(x) = \frac{\sin 14x}{2\cos 7x} = \frac{2\sin 7x\cos 7x}{2\cos 7x} = \sin 7x.$$

Теперь находим производную функции $y(x)$:

$$y'(x) = (\sin 7x)' = \cos 7x\cdot(7x)' = 7\cos 7x.$$

7.5. Производная степенно-показательной функции

Для вычисления производной функции вида $u(x)^{v(x)}$ предварительно надо представить данную функцию в виде

$$u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Пример 22. Найти производную функции $y(x) = x^x$.

Решение.

$$y'(x) = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' =$$
$$= x^x(x\ln x)' = x^x\left[(x'\ln x + x(\ln x)'\right] = x^x\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Замечание. Функция x^x из примера 22 не является ни функцией вида x^α, ни функцией вида a^x, поэтому будет ошибкой вычислять производную данной функции одним из следующих способов:

$$(x^x)' = x\cdot x^{x-1}, \qquad (x^x)' = x^x\ln x.$$

Пример 23. Найти производную функции $y(x) = (\sin x)^{\ln x}$.

Решение.

$$y'(x) = \left((\sin x)^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln(\sin x)^{\ln x}}\right)' = \left(e^{\ln x\ln\sin x}\right)' =$$
$$= e^{\ln x\ln\sin x}(\ln x\ln\sin x)' = (\sin x)^{\ln x}\left[(\ln x)'\ln\sin x + \ln x(\ln\sin x)'\right] =$$
$$= (\sin x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln\sin x + \ln x\frac{1}{\sin x}(\sin x)'\right] =$$
$$= (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\sin x}{x} + \frac{\ln x\cos x}{\sin x}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти по определению производную функции:

380. $y = x^2$;
381. $y = x^3$;
382. $y = x^4$;
383. $y = \sqrt{x}$;
384. $y = \frac{1}{x^2}$;
385. $y = \frac{1}{x^3}$;
386. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
387. $y = \sin 2x$;
388. $y = \cos\frac{x}{2}$;

389. $y = \operatorname{tg} x$;
390. $y = \frac{1}{2x+2}$;
391. $y = \sqrt{1+3x}$;
392. $y = \sqrt{1+x^2}$.

Найти производную функции:

393. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$;
394. $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$;
395. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4$;
396. $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$;
397. $y = 4x^5 - 3\sin x + 5\operatorname{ctg} x$;
398. $y = 3\sqrt{x} + 4\cos x - 2\operatorname{tg} x + 3$;
399. $y = 3 + 4x^2 = \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x$;
400. $y = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5\ln x - 7\cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
401. $y = \log_2 x + 3\log_3 x$;
402. $y = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x$;
403. $y = e^x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x^4}{4}$;
404. $y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$;
405. $y = \arcsin x + 3\sqrt[3]{x} + 5\arccos x$;
406. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$;
407. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;
408. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$;
409. $y = x\sin x$;
410. $y = x^2\operatorname{tg} x$;
411. $y = \sqrt[7]{x}\ln x$;
412. $y = x\arccos x$;
413. $y = \sqrt[3]{x}\operatorname{arcctg} x$;
414. $y = x^2\log_3 x$;
415. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
416. $y = \frac{\ln x}{\sin x} + x\operatorname{ctg} x$;
417. $y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$;
418. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;
419. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$;
420. $y = \frac{x\operatorname{tg} x}{1+x^2}$;
421. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$;
422. $f(x) = \frac{x^2}{3} - x^2 + x$, найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$;
423. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$, найти $f'(2)$, $f'(-2)$;
424. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$;

425. $f(x)=\frac{1-10^x}{1+10^x}$, найти $f'(0)$;
426. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, найти $f'(e)$, $f'(\frac{1}{e})$, $f'(e^2)$;
427. $f(x)=x\ln x$, найти $f'(1)$, $f'(e)$, $f'(\frac{1}{e})$, $f'(\frac{1}{e^2})$;
428. $y=\sin 3x$;
429. $y=\sin(x^2+5x+2)$;
430. $y=\sqrt{1-x^2}$;
431. $y=\sqrt{1+5\cos x}$;
432. $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$;
433. $y=\sin^2 x$;
434. $y=\sin^3 x$;
435. $y=\cos^{100} x$;
436. $y=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})$;
437. $y=\operatorname{tg}(x^2+3)$;
438. $y=\ln\cos x$;
439. $y=\ln\operatorname{tg} 5x$;
440. $y=\ln(1+\cos x)$;
441. $y=e^{\operatorname{tg} x}$;
442. $y=\ln(x^2-3x+7)$;
443. $y=\ln(x^2+2x)$;
444. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+5})$;
445. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$;
446. $y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}$;
447. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}$;
448. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$;
449. $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;
450. $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$;
451. $y=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;
452. $y=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$;
453. $y=x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}$;
454. $y=\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x+3x$;
455. $y=\sin^2 x^3$;
456. $y=\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}$;
457. $y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$;
458. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;
459. $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;
460. $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;
461. $y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\frac{1}{x}$;

462. $y = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$;
463. $y = x^2e^{-x}$;
464. $y = (x+2)e^{-x^2}$;
465. $y = e^{\frac{x}{3}}\cos\frac{x}{3}$;
466. $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$;
467. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$;
468. $y = 10^{3-\sin^3 2x}$;
469. $y = \sin 2^x$;
470. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;
471. $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1}\right)$;
472. $y = \ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$;
473. $y = \frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;
474. $y = \log_5\cos 7x$;
475. $y = \log_7\cos\sqrt{1+x}$;
476. $y = e^{\sqrt[7]{x^2}}$;
477. $y = \ln\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)$;
478. $y = \ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$;
479. $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$;
480. $y = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;
481. $y = \arccos(1-2x)$;
482. $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$;
483. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$;
484. $y = \arcsin e^{4x}$;
485. $y = \arcsin\sqrt{x}$;
486. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$;
487. $y = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln\sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}}$;
488. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;
489. $y = \ln\arccos 2x$;
490. $y = \operatorname{arctg}\ln(5x+3)$;
491. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+3}{x-3}$;
492. $y = \operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$;
493. $y = \arccos e^{-\frac{x^2}{2}}$;
494. $y = \operatorname{tg}\sin\cos x$;
495. $y = e^{x^2\operatorname{ctg} 3x}$;
496. $y = \ln\sin\operatorname{tg} e^{-\frac{x}{2}}$;
497. $y = \ln^5\sin x$;

498. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$;
499. $y = \sqrt[5]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$;
500. $y = e^{\sqrt{1+\ln x}}$;
501. $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$;
502. $y = \sqrt{1-\arccos^2 x}$;
503. $y = \operatorname{arctg} \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$;
504. $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;
505. $y = \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right)$;
506. $y = 2\ln(x^2+5) - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}}$;
507. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$;
508. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$;
509. $y = \ln \left(x \sin x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$;
510. $y = x^{\frac{1}{x}}$;
511. $y = x^{\sin x}$;
512. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$;
513. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

§8. Дифференциал функции

8.1. Понятие дифференциала

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение $\triangle y$ в этой точке можно представить в виде

$$\triangle y = A \triangle x + \alpha(\triangle x) \triangle x,$$

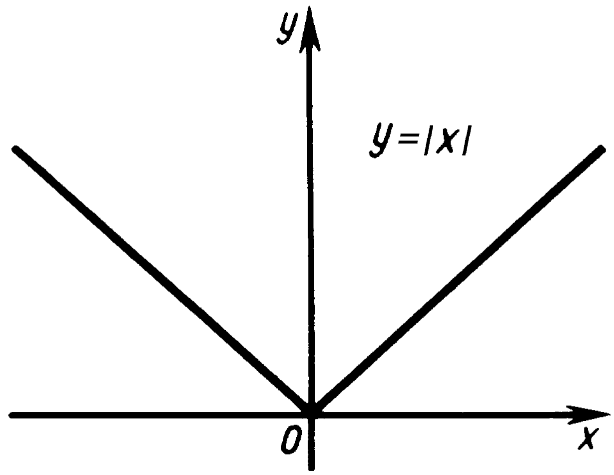
где A — некоторое число, независящее от $\triangle x$, а $\alpha(\triangle x)$ — функция аргумента $\triangle x$, являющаяся бесконечно малой при $\triangle x \to 0$, то есть $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$.

Существуют зависимости между понятиями дифференцируемости функции в точке, существованием производной и непрерывностью функции в той же точке.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, то есть не иметь производной в этой точке. Примером такой функции является функция $y = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет в этой точке производной, то есть не является дифференцируемой.



Если функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то будем говорить, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на указанном промежутке.

Дифференциалом dx независимой переменной x назовём приращение $\triangle x$ этой переменной: $dx = \triangle x$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то есть её приращение $\triangle y$ в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\triangle y = A \triangle x + \alpha(\triangle x) \triangle x,$$

где A — число и $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$. Выражение $A \triangle x$ называется дифференциалом функция $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy:

$$dy = A \triangle x.$$

Учитывая зависимость между понятиями дифференцируемости и существования производной функции в точке, получаем, что $A = f'(x_0)$. Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 записывается в виде

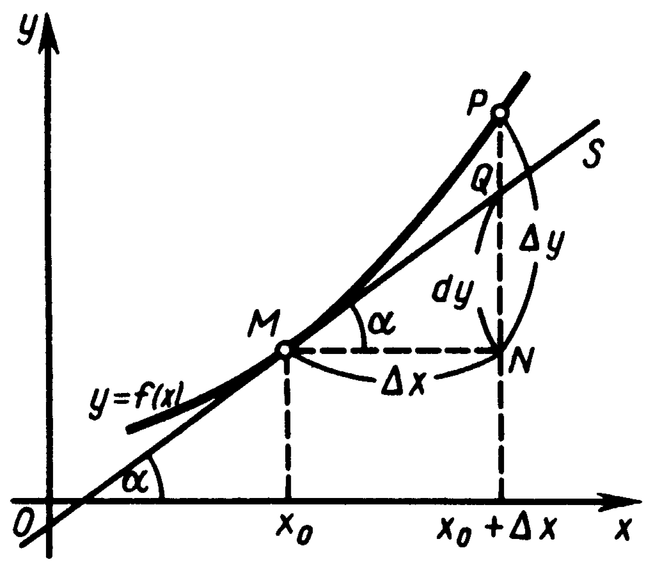
$$dy = d(f(x_0)) = f'(x_0)dx.$$

Заметим, что с помощью последней формулы производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной, то есть

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции в точке x_0 имеет геометрический смысл. Пусть точка M на графике функции $y = f(x)$ соответствует значению аргумента x_0, точка P — значению аргумента $x_0 + \triangle x$, прямая MS — касательная к графику $y = f(x)$ в точке M, α — угол между касательной и осью Ox. Пусть, $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, Q — точка пересечения касательной MS с прямой PN. Тогда приращение функции $\triangle y$ равно величине отрезка NP. В то же время из прямоугольного треугольника MNQ получаем: $NQ = \triangle x \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \triangle x = dy$, то есть дифференциал функции dy равен величине отрезка NQ. Мы получили, что величины отрезков NP и NQ различны.

Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению “ординаты касательной” MS к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$, а приращение функции $\triangle y$ есть приращение “ординаты самой функции” $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента, равному $\triangle x$.



8.2. Вычисление дифференциала

Правила дифференцирования функций аналогичны правилам нахождения производных. Для функций u, v и f справедливы свойства:

$d(u+v) = du + dv;$ $\qquad d(u-v) = du - dv;$

$d(uv) = udv + vdu;$ $\qquad d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0;$

$d(f(x)) = f'(x)dx,$ в частности, если c — число, то

$d(cx) = c\,dx,$ $\qquad d(x+c) = dx.$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y(x) = x^2$.

Решение. Дифференциал dy функции $y(x)$ находится по формуле $dy = y'(x)dx$, поэтому

$$dy = dx^2 = (x^2)'dx = 2xdx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y(x) = 5\cos 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение. По правилу нахождения дифференциала функции в точке, имеем

$$dy = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Находим,

$$y'(x) = (5\cos 3x)' = -15\sin 3x \quad \Rightarrow \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -15\sin\frac{3\pi}{2} = 15.$$

Следовательно, дифференциал dy в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равен $15\,dx$:

$$dy = 15\,dx.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $y = \sin^2 x^3$.

Решение.

$$dy = y'dx = \left(\sin^2 x^3\right)' = 2\sin x^3(\sin x^3)'dx =$$
$$= 2\sin x^3\cos x^3(x^3)'dx = 2\sin x^3\cos x^3\cdot 3x^2dx = 3x^2\sin 2x^3dx.$$

Пример 4. Найти дифференциал функции xe^{x^2}.

Решение.

1-й способ. Воспользуемся формулой $df(x) = f'(x)dx$.

$$d\left(xe^{x^2}\right) = \left(xe^{x^2}\right)'dx = \left(x'e^{x^2} + x\left(e^{x^2}\right)'\right)dx =$$
$$= \left(e^{x^2} + x\cdot e^{x^2}2x\right)dx = e^{x^2}\left(2x^2+1\right)dx.$$

2-й способ. Применим формулу $d(uv) = udv + vdu$, имеем

$$d\left(xe^{x^2}\right) = e^{x^2}dx + xd\left(e^{x^2}\right).$$

По формуле $df(u) = f'(u)du$ получаем

$$d\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2}d\left(x^2\right) = e^{x^2}2xdx.$$

Таким образом,

$$d\left(xe^{x^2}\right) = e^{x^2}dx + x(2xe^{x^2}dx) = e^{x^2}\left(2x^2+1\right)dx.$$

8.3. Инвариантность формы первого дифференциала

Главным свойством дифференциала является инвариантность (неизменность) его формы относительно замены переменных. Если $y = y(x)$, $x = x(t)$, то

$$dy = y'_t\,dt = y'_x\,dx.$$

Это свойство называется свойством инвариантности формы первого дифференциала относительно замены аргумента.

Задачи для самостоятельного решения

Найти дифференциал функции:

514. $y = x^5$;
515. $y = \operatorname{tg} x$;
516. $y = \sin^3 2x$;
517. $y = \ln x$;
518. $y = \ln(\sin\sqrt{x})$;
519. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$;
520. $y = 2^{-x^2}$.

Найти дифференциал функции в точке x_0:

521. $y = x^{-4}$, $x_0 = -1$;
522. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x_0 = 0$;
523. $y = \sqrt{1+x^2}$, $x_0 = -3$;
524. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
525. $y = \ln\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
526. $y = e^{-2x}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$;
527. $y = \sqrt{x} + 1$, $x_0 = 4$;
528. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$, $x_0 = 3$.

§9. Производные и дифференциалы высших порядков

9.1. Понятие производной n-го порядка

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является функцией аргумента x. Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовём $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$.

Производная от производной некоторой функции называется производной второго порядка (или второй производной) этой функции. Производная от второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и так далее. Производные, начиная со второй, называются производными высших порядков и обозначаются

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}, \dots$$

(вместо y'' и y''' иногда пишут $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$) или

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$$

Производная n-го порядка функции является производной от производной $(n-1)$-го порядка, то есть

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x, а вторая производная равна скорости изменения скорости, то есть ускорению движущейся точки в этот момент.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Сначала найдём производную первого порядка.

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Теперь находим вторую производную.

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x.$$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = x\sin x$.

Решение. Последовательно находим первую, вторую и третью производные данной функции:

$$\begin{aligned}
&y' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x;\\
&y'' = (y')' = (\sin x + x\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x;\\
&y''' = (y'')' = (2\cos x - x\sin x)' = -2\sin x - (\sin x + x\cos x) =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -3\sin x - x\cos x.
\end{aligned}$$

9.2. Формулы для n-х производных некоторых функций

Пример 3. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = x^\alpha$, $x > 0$, α — любое действительное число.

Решение. Последовательно дифференцируя, имеем:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y^{(2)} = (y')' = \big(\alpha x^{\alpha-1}\big)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y^{(3)} = (y^{(2)})' = \big(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\big)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \ldots$$
$$\ldots, y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}.$$

Введём понятия факториала и двойного факториала числа.

Факториал натурального числа n определяется формулой

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$

читается "эн факториал". Например, $7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$. По определению полагают $0! = 1$. В вычислениях часто применяется следующая формула:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!.$$

Двойной факториал натурального числа n определяется равенством

$$n!! = n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots, \qquad 0!! = 1,$$

читается "двойной факториал эн" или "эн двойной факториал". Двойной факториал для чётных и нечётных чисел записывается так:

$$(2n)!! = 2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2,$$
$$(2n+1)!! = (2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1.$$

Например, $10!! = 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 3840$, $7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1 = 105$.

Пример 4. Найти n-ю производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Воспользуемся формулой n-й производной степенной функции, найденной в примере 3. В нашем случае $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Следовательно, $\alpha = -1$. Получаем

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot x^{-1-n} = \frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}.$$

Пример 5. Найти производную n-го порядка от функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение. Применим формулу n-й производной, найденную в примере 3. В данном случае $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, $\alpha = -\frac{1}{2}$. Имеем,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-n} =$$
$$= \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2x)^n\cdot\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(2x)^n\cdot\sqrt{x}}.$$

Пример 6. Найти производные всех порядков от функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Решение. Найдём n-ю производную функции $y = \sin x$. Последовательно дифференцируя, имеем:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(2)} = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(3)} = \left(y^{(2)}\right)' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ldots$$
$$\ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, производную любого порядка функции $\sin x$ можно вычислять по формуле

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Например, $(\sin x)^{(10)} = \sin\left(x + 10\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+5\pi) = -\sin x$.

Аналогично можно получить формулу n-й производной функции $\cos x$:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

9.3. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций

Для записи формулы Лейбница введём понятие числа сочетаний из n элементов по k элементам (каждое из чисел n и k предполагается натуральным числом или нулём, причём $0 \leqslant k \leqslant n$). Итак, для заданных чисел n и k определим число C_n^k по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

произносится “цэ из эн по ка”. Отметим, что число C_n^k обязательно натуральное при любых n и k.

Пример 7. Вычислить а) C_5^3; б) C_6^2; в) C_{10}^4.

Решение.

а) $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2!} = \dfrac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10;$

б) $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{2!\cdot 4!} = \dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15;$

в) $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \dfrac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!\cdot 6!} = \dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210.$

Пусть $y = u\cdot v$, где u и v — некоторые функции от переменной x, имеющие производные любого порядка. Тогда справедлива формула Лейбница:

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} = (uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \ldots \\
\ldots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)} = \\
= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \ldots \\
\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + n u' v^{(n-1)} + u v^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Формулу Лейбница удобно применять в случае “простых” функций u и v.

В случаях $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ формула Лейбница принимает вид:

$$
y' = (uv)' = u'v + uv'; \quad y'' = (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';
$$
$$
u''' = (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.
$$

Заметим, что первая из этих формул является формулой производной произведения двух функций.

Использование следующей формулы часто позволяет сократить вычисления коэффициентов.

$$
C_n^k = C_n^{n-k}.
$$

Пример 8. Вычислить пятую производную функции $y = x^5 e^x$.

Решение. Полагая $u = x^5$ и $v = e^x$, находим:

$$
u' = 5x^4, \quad u'' = 20x^3, \quad u''' = 60x^2, \quad u^{(4)} = 120x, \quad u^{(5)} = 120,
$$
$$
v' = v'' = v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = e^x.
$$

Теперь вычисляем коэффициенты при производных:

$$
C_5^0 = \frac{5!}{0!\cdot(5-0)!} = 1, \quad C_5^1 = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = 5, \quad C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = 10,
$$
$$
C_5^3 = C_5^{5-2} = C_5^2 = 10, \quad C_5^4 = C_5^{5-1} = C_5^1 = 5, \quad C_5^5 = C_5^{5-0} = C_5^0 = 1.
$$

Подставляя найденные производные и числа в формулу Лейбница при $n = 5$, получаем

$$y^{(5)} = (uv)^{(5)} =$$
$$= C_5^0 u^{(5)} v + C_5^1 u^{(5-1)} v' + C_5^2 u^{(5-2)} v'' + C_5^3 u^{(5-3)} v''' + C_5^4 u' v^{(5-1)} + C_5^5 u v^{(5)} =$$
$$= 1 \cdot 120 \cdot e^x + 5 \cdot 120x \cdot e^x + 10 \cdot 60x^2 \cdot e^x + 10 \cdot 20x^3 \cdot e^x + 5 \cdot 5x^4 \cdot e^x + 1 \cdot x^5 \cdot e^x =$$
$$= (120 + 600x + 600x^2 + 200x^3 + 25x^4 + x^5)e^x.$$

Пример 9. Вычислить 55-ю производную функции $y = (x^2 - 17)\cos 3x$.

Решение. Полагая $u = \cos 3x$ и $v = x^2 - 17$, находим (см. пример 6):

$$u^{(n)} = 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = v^{(54)} = v^{(55)} = 0.$$

Следовательно, все слагаемые в формуле Лейбница, содержащие производные функции v выше второго порядка, будут равны нулю. Вычисляем коэффициенты при функциях v, v' и v'':

$$C_{55}^0 = 1, \quad C_{55}^1 = 55, \quad C_{55}^2 = \frac{55 \cdot 54}{2!} = 1485.$$

Подставляя найденные выражения в формулу Лейбница при $n = 55$, получаем:

$$y^{(55)} = (uv)^{(55)} = C_{55}^0 u^{(55)} v + C_{55}^1 u^{(54)} v' + C_{55}^2 u^{(53)} v'' =$$
$$= 1 \cdot 3^{55} \cos\left(3x + 55 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot (x^2 - 17) + 55 \cdot 3^{54} \cos\left(3x + 54 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2x +$$
$$+ 1485 \cdot 3^{53} \cos\left(3x + 53 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 =$$
$$= 3^{55}(x^2 - 17)\sin(3x) - 110x \cdot 3^{54}\cos(3x) - 2970 \cdot 3^{53}\sin(3x).$$

9.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка. Тогда её дифференциал dy вычисляется по формуле

$$dy = f'(x)dx$$

и называется дифференциалом первого порядка функции $f(x)$.

Дифференциал $d(dy)$ от дифференциала dy называется дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ и обозначается d^2y, то есть

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично, дифференциал $d(d^2y)$ от дифференциала d^2y называется дифференциалом третьего порядка функции $f(x)$ и обозначается d^3y. Вообще, дифференциал $d(d^{n-1}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$ называется дифференциалом n-го порядка (или n-м дифференциалом) функции $f(x)$ и обозначается d^ny.

Для n-го дифференциала функции $y(x)$ справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Из последней формулы следует, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}.$$

Замечание. Свойством инвариантности (см. пункт 8.3) обладает только первый дифференциал. Второй и последующие дифференциалы этим свойством не обладают.

Пример 10. Вычислить дифференциал d^3y функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x) = 4x^3 - 6x, \quad y''(x) = 12x^2 - 6, \quad y'''(x) = 24x.$$

Следовательно,

$$d^3y = y'''(x)(dx)^3 = 24x(dx)^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производную второго порядка от функции:

529. $y = e^{-x^2}$;

530. $y = \operatorname{tg} x$;

531. $y = \arcsin \frac{x}{2}$;

532. $y = \sqrt{1 + x^2}$;

533. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Найти производную третьего порядка от функции:

534. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

535. $y = xe^{-x}$;

536. $y = x^2 \sin x$;

537. $y = x^3 2^x$.

Найти производную n-го порядка от функции:

538. $y = e^x$;

539. $y = \ln x$;

540. $y = 3^x$;

541. $y = x^m$, m — натуральное;

542. $y = \sin 3x$;
543. $y = \ln(1 + x)$;
544. $y = 2^{3x}$;
545. $y = \sin^2 x$;
546. $y = \cos^2 x$;
547. $y = \ln(2 - 3x)$;
548. $y = (4x + 1)^n$;
549. $y = x \cos x$, $n = 10$;
550. $y = (x^3 - 1)e^{5x}$, $n = 37$;
551. $y = x^2 \sin \frac{x}{3}$, $n = 73$;
552. $y = x^2 \ln x$, $n = 100$.

Найти дифференциал второго порядка от функции:

553. $y = \operatorname{ctg} x$;
554. $y = \cos^2 x$;
555. $y = \ln(2x - 3)$.

Найти дифференциал третьего порядка от функции:

556. $y = e^x \cos x$;
557. $y = x \ln x$.

Найти дифференциал n-го порядка от функции:

558. $y = \sin x$;
559. $y = \cos x$;
560. $y = e^{\frac{x}{2}}$.

§10. Производная функции, заданной параметрически

10.1. Производная первого порядка

Пусть даны две функции

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

одной независимой переменной t, определённые и непрерывные на некотором промежутке. Предположим теперь, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные, причём $x(t) \neq 0$ на этом промежутке. Тогда y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t, называемой параметром. В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически.

Производная функции y по переменной x вычисляется по формуле

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Замечание. Индекс x у функции y' означает, что производная функции y находится по переменной x. Если индекс у функции не указан, то производная находится по аргументу. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ зависят от параметра t, то $x'(t)$ и $y'(t)$ означают производные по переменной t.

Пример 1. Найти $y'_x(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \cos^4 2t, \quad y(t) = \sin^4 2t.$$

Решение. Находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = 4\cos^3 2t \cdot (-2\sin 2t) = -8\cos^3 2t \sin 2t,$$
$$y'(t) = 4\sin^3 2t \cdot (2\cos 2t) = 8\sin^3 2t \cos 2t,$$
$$x'(t) \neq 0 \text{ при } t \neq \frac{\pi}{4}k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

В точках, в которых $x'(t) \neq 0$, имеем

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{8\sin^3 2t \cos 2t}{-8\cos^3 2t \sin 2t} = -\frac{\operatorname{tg}^3 2t}{\operatorname{tg} 2t} = -\operatorname{tg}^2 2t.$$

Итак, $y'_x(t) = -\operatorname{tg}^2 2t$.

10.2. Производная второго порядка

Вторая производная функции y (заданной параметрически) по переменной x находится по одной из следующих формул:

$$y''_{xx}(t) = (y'_x(t))'_x = \frac{(y'_x(t))'}{x'(t)};$$
$$y''_{xx}(t) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

Замечание. Индекс xx у функции y'' означает, что берётся вторая производная функции y по переменной x. Там, где индекс не указан, производная ищется по аргументу, в данном случае по переменной t.

Пример 2. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = 7(t - \sin t), \quad y(t) = 7(1 - \cos t).$$

Решение. Находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = 7(1 - \cos t), \quad y'(t) = 7\sin t,$$
$$x'(t) \neq 0 \text{ при } t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

В точках, в которых $x'(t) \neq 0$, имеем

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{7\sin t}{7(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\left(\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Для нахождения производной $y''_{xx}(t)$ по первой формуле вычислим сначала $(y'_x(t))'$:

$$(y'_x(t))' = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)' = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Теперь находим $y''_{xx}(t)$:

$$y''_{xx}(t) = \frac{(y'_x(t))'}{x'(t)} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{7(1-\cos t)} = -\frac{1}{28\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Итак, $y'_x(t) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $y''_{xx}(t) = -\frac{1}{28\sin^4\frac{t}{2}}$.

Пример 3. Найти $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \ln(1-t), \quad y(t) = (t+1)^2.$$

Решение. Воспользуемся формулой:

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

Для этого вычислим производные $x'(t)$, $x''(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$:

$$x'(t) = (\ln(1-t))' = \frac{1}{1-t}(1-t)' = -\frac{1}{1-t};$$
$$x''(t) = (x'(t))' = \left(-\frac{1}{1-t}\right)' = -\left((1-t)^{-1}\right)' = (1-t^{-2})(1-t)' = -\frac{1}{(1-t)^2};$$
$$y'(t) = \left((t+1)^2\right)' = 2(t+1);$$
$$y''(t) = (y'(t))' = (2(t+1))' = 2.$$

Подставляя найденные выражения в формулу, окончательно получаем:

$$y''_{xx}(t) = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{1-t}\right) - \left(-\frac{1}{(1-t)^2}\right)\cdot 2(t+1)}{\left(-\frac{1}{1-t}\right)^3} =$$
$$= \left(2\cdot\frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2}\cdot 2(t+1)\right)\cdot(1-t)^3 =$$
$$= 2(1-t)^2 - 2(1-t)(t+1) = 4t^2 - 4t.$$

Итак, $y''_{xx}(t) = 4t^2 - 4t$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

561. $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = -2\sin t$;

562. $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t^3}{3} - t$;

563. $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = e^{3t}$;

564. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 + t$;

565. $x(t) = 4\cos^3 t$, $y(t) = 4\sin^3 t$;

566. $x(t) = \frac{1-t}{(t+1)^2}$, $y(t) = \frac{t(1-t)}{(t+1)^2}$;

567. $x(t) = \frac{t}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$.

§11. Производная функции, заданной неявно

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$. Это означает, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на некотором интервале (конечном или бесконечном). Тогда функция $y = f(x)$ называется неявно заданной функцией.

11.1. Производная первого порядка

Если функция $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, то её производную можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(F(x, f(x))\right) = 0.$$

Пример 1. Найти производную y' функции y, заданной неявно уравнением $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда

$$x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 \equiv 4x \quad \text{или} \quad x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 - 4x \equiv 0$$

на некотором интервале. Поскольку все слагаемые в тождестве дифференцируемы, то после дифференцирования получаем

$$2x + 2f(x) + 2xf'(x) - 2f(x)f'(x) - 4 \equiv 0,$$

откуда

$$f'(x) = \frac{f(x) + x - 2}{f(x) - x}, \; f(x) \neq x.$$

Итак, $y' = \frac{y+x-2}{y-x}$.

Пример 2. Найти y' из уравнения $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Решение. Подставив в данное уравнение дифференцируемое решение $y = f(x)$, получим тождество

$$x^{\frac{2}{3}} + (f(x))^{\frac{2}{3}} \equiv 1,$$

дифференцируя которое, имеем

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(f(x))^{-\frac{1}{3}} f'(x) \equiv 0.$$

Отсюда находим

$$f'(x) = -\sqrt[3]{\frac{f(x)}{x}}, \; x \neq 0.$$

Итак, $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

11.2. Производная второго порядка

Пример 3. Найти производные y' и y'' функции y, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 5xy^3$.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — дважды дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда дифференцируя тождество

$$x^2 + (f(x))^2 \equiv 5x\,(f(x))^3$$

по x, получаем

$$2x + 2f(x)f'(x) \equiv 5\,(f(x))^3 + 15xf^2(x)f'(x),$$

откуда

$$f'(x) = \frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}, \quad \text{если } 15xf^2(x) - 2f(x) \neq 0.$$

Далее, по определению второй производной по правилу дифференцирования частного, имеем

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}\right)' =$$
$$= \frac{(2x - 5f^3(x))'(15xf^2(x) - 2f(x)) - (2x - 5f^3(x))(15xf^2(x) - 2f(x))'}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2} =$$
$$= \frac{(20f^3(x) - 75xf^4(x) - 60x^2f(x) + 4x)f'(x) - 4f(x) + 75f^5(x)}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2}.$$

Подставляя значение $f'(x)$, окончательно получаем

$$f''(x) = \frac{1500xf^6(x) - 120x^3 + 150x^2f^3(x) - 250f^5(x)}{(15xf^2(x) - 2)^3f^2(x)}.$$

Итак,

$$y' = \frac{2x - 5y^3}{15xy^2 - 2y}, \quad y'' = \frac{1500xy^6 - 120x^3 + 150x^2y^3 - 250y^5}{(15xy - 2)^3y^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти y' из уравнения:

568. $x^2 + y^2 - xy = 0$;
569. $x^2 + xy + y^2 = 6$;
570. $x^2 + y^2 = a^2$;
571. $y^2 = 2px$;
572. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
573. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
574. $e^y - e^{-x} + xy = 0$;
575. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$;
576. $x = y + \operatorname{arctg} y$;
577. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
578. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;
579. $\operatorname{ctg} y = xy$;
580. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$;
581. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$;
582. $\operatorname{arctg} y = x + y$;
583. $x^2 = \frac{y-x}{x+2y}$.

Найти y'' из уравнения:

584. $x^2 + y^2 = a^2$;

585. $ax + by - xy = c$;
586. $x^m y^n = 1$;
587. $x^2 - y^2 = a^2$;
588. $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$;
589. $\operatorname{arctg} y = x + y$;
590. $x^2 + xy + y^2 = a^2$.

§12. Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталя

12.1. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределённость вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределённость — значит вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Сформулируем первое правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{и} \quad g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём справедлива формула

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Формула (правило Лопиталя) остаётся верной и в случае, когда $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-16)'}{(x^2-5x+4)'} = \lim_{x\to 4} \frac{2x}{2x-5} = \frac{8}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\ln(e-x)+x-1)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\frac{1}{e-x}+1}=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{2e}{e-1}.$$

Замечание. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Напомним, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и по первому замечательному пределу.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

12.2. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty,\ +\infty \text{ или } -\infty.$$

Сформулируем второе правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \quad \text{и} \quad g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём справедлива формула

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Приведённое правило раскрытия неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ аналогично правилу раскрытия неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Замечания, относящиеся к неопределённости вида $\frac{0}{0}$ остаются в силе и для всех других неопределённостей.

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2-11}{5x^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{(6x^2-11)'}{(5x^2+4)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{10x} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^{100}\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{100\cdot x^{99}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(100\cdot x^{99}\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{100\cdot 99\cdot x^{98}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot x^{97}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{100!}{e^x} = 0.$$

12.3. Раскрытие неопределённостей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределённости вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Решение. Имеем неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Так как $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$, то получаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \to 0+} x = 0.$$

Пример 10.

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1/2}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{(-1/2)x^{-3/2}} = -2 \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\infty - \infty$. Так как

$$\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

то при том же условии $x \to \frac{\pi}{2}$ получаем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Воспользовавшись первым правилом Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Пример 12.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x \ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

12.4. Раскрытие неопределённостей вида 0^0, 1^∞ и ∞^0

Неопределённости вида 0^0, 1^∞ и ∞^0 имеют место при рассмотрении функций вида $y = f(x)^{g(x)}$, если при $x \to a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞, а функция $g(x)$ — соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределённости с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

сводятся к неопределённости вида $0 \cdot \infty$.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$.

Решение. Имеем неопределённость вида 0^0. Так как $x^x = e^{x\ln x}$, то в показателе степени получена неопределённость вида $0\cdot\infty$, которая рассмотрена в примере 9. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Решение. Имеем неопределённость вида 1^∞. Так как

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}},$$

то в показателе степени получена неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Применяя первое правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}} = e^2.$$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида ∞^0. Так как

$$(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cos x\ln\operatorname{tg} x} = e^{\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{1/(\cos x)}},$$

то в показателе степени получена неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{1/(\cos x)} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{1/(\cos x)} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)} =$$
$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos x\ln\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

В следующем примере перейдём к другой неопределённости с помощью операции логарифмирования.

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида ∞^0. Положим $y(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ и прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \sin x \ln\frac{1}{x} = -\sin x \ln x.$$

Так как $x \to 0$, то получили неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Преобразуем её к неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применим второе правило Лопиталя и воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\ln y(x) = \lim_{x\to 0}(-\sin x \ln x) = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x = 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} e^{\ln y(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y(x)} = e^0 = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти предел:

591. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

592. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x}$;

593. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$;

594. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$;

595. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$;

596. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-1+\cos 3x}{e^x-e^{-x}}$;

597. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$;

598. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$;

599. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

600. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

601. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$;

602. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-2x}{x^3}$;

603. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$;

604. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^5}{e^{3x}}$;

605. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$;

606. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{e^{2x}}$;

607. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}$;

608. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x+1}{x+\sin x}$;

609. $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{tg} x\ln x$;

610. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x+2\sin\frac{x}{2}}{x+1}$;

611. $\lim\limits_{x\to 1+}\ln x\ln(x-1)$;

612. $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}$;

613. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\log_2(1+x)}{\log_3(1+2x)}$;

614. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\operatorname{tg} x$;

615. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$;

616. $\lim\limits_{x\to \infty}\Big((x+3)e^{\frac{1}{x}}-x\Big)$;

617. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

618. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

619. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$;

620. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$;

621. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}}{e^{x^3}-1}$;

622. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{9}{4}}\left(\sqrt[4]{x^3+1}-\sqrt[4]{x^3-1}\right)$;

623. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$;

624. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)$;

625. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

626. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$;

627. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1-x\ln 2}{(1-x)^{10}-1+10x}$;

628. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

629. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\ln^2(1+x)}{e^{x^2}-1}$;

630. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^{\cos x}$;

631. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$;

632. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

633. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$;

634. $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{tg} x)^{x}$;

635. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

636. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

637. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

638. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(2\sin x)^{\operatorname{ctg} 6x}$.

ГЛАВА IV

Построение графиков функций

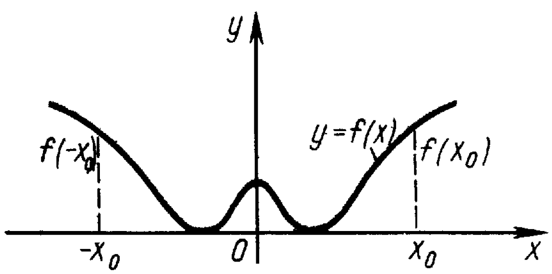
§13. Общие свойства функций

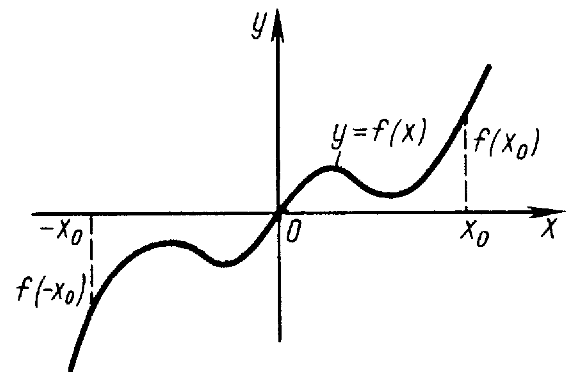
13.1. Чётность и нечётность

Функция $y = f(x)$ называется чётной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Чётная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат. График чётной функции симметричен относительно оси ординат (оси Oy, см. левый рисунок).

Примеры чётных функций: $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^8}$, $y = \ln|x|$, $y = \cos x$.





Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (см. правый рисунок).

Примеры нечётных функций: $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x^7}$, $y = \sin x$, $y = x\sqrt{1+x^2}$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

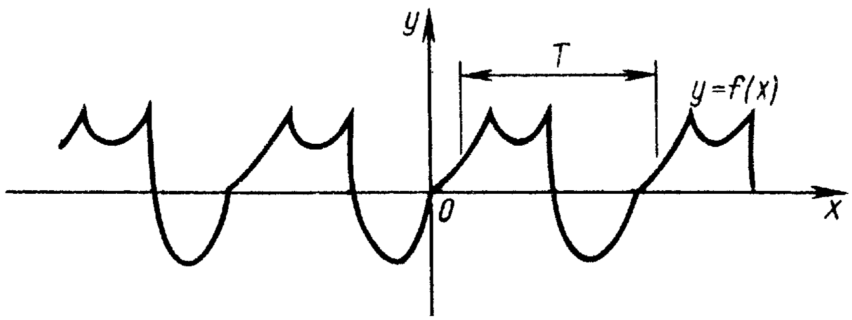
При построении графиков чётных и нечётных функций достаточно построить только правую ветвь графика — для положительных и нулевого значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно оси ординат для чётной функции и кососимметрично (то есть симметрично относительно начала координат) для нечётной функции.

Отметим, что произведение двух чётных или двух нечётных функций представляет собой чётную функцию, а произведение чётной и нечётной функций — нечётную функцию.

Большинство функций не являются ни чётными, ни нечётными. Таковы, например, функции $y = x^2 - x$, $y = \sqrt[3]{x-2}$, $y = \sin(2x-1)$.

13.2. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения x, взятого из области определения, значения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$.



Число T называется периодом функции. Заметим, что всякая периодическая функция имеет бесконечно много периодов. Действительно, числа вида nT при любом целом $n \neq 0$ также являются периодами функции $f(x)$, так как

$$f(x+nT) = f((x+n-1)T+T) = f(x+(n-1)T) = \ldots = f(x).$$

Иногда периодом называют наименьшее из всех чисел $T > 0$, удовлетворяющее данному выше определению.

Примеры периодических функций: $y = \sin x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = -\sin^3 x$, $y = \ln\cos x$. Периодической является и всякая постоянная функция, причём её периодом служит любое ненулевое число.

Отметим, что периодическую функцию достаточно исследовать в пределах одного периода.

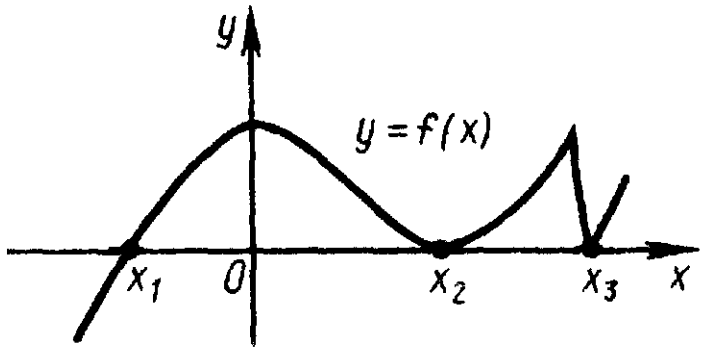
Примеры непериодических функций: $y = x^3$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \sin(x^2+1)$.

Функция, не являющаяся ни чётной, ни нечётной, ни периодической называется функцией общего вида.

13.3. Нули функции

Нулём функции $y = f(x)$ называется такое действительное число x, при котором значение функции равно нулю: $f(x) = 0$.

Для того чтобы найти нули функции $y = f(x)$, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается её, либо имеет общую точку с этой осью.

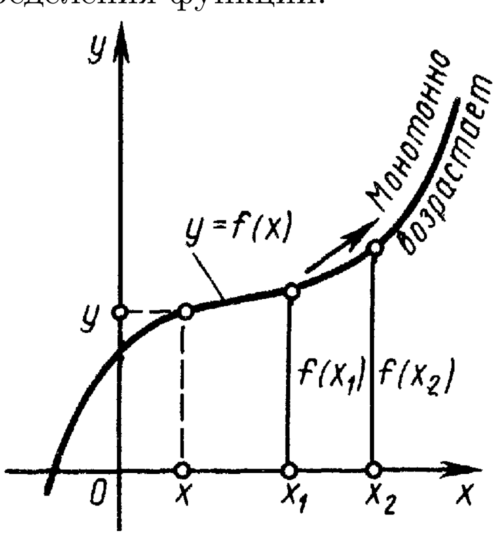


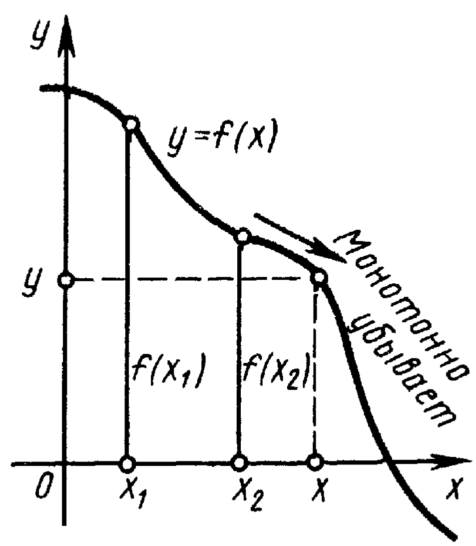
Например, функция $y = x^3 - 3x$ имеет нули в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$, а функция $y = \ln(x-1)$ имеет нуль в точке $x = 2$.

Функция может и не иметь нулей. Таковы, например, функции $y = 7^x$, $y = \cos x - 2$.

13.4. Монотонность

Функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ называется монотонно убывающей на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Интервал $(a; b)$ предполагается взятым из области определения функции.



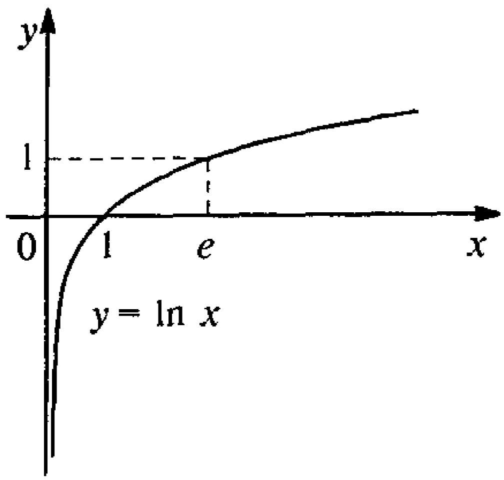


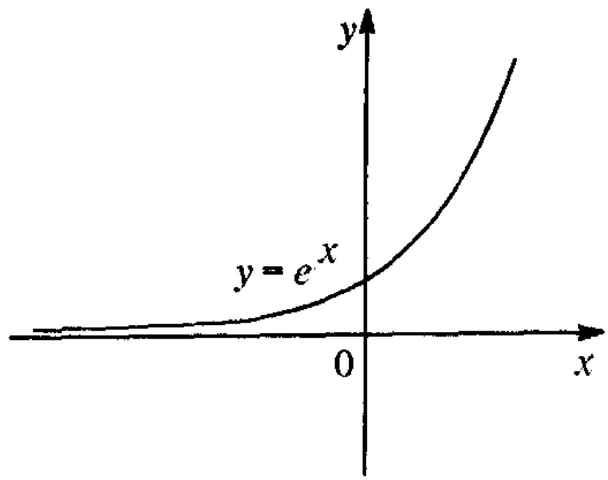
Итак, функцию называют монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается (левый рисунок), и монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается (правый рисунок).

13.5. Понятие обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$ и пусть отрезок $[\alpha; \beta]$ является множеством значений этой функции. Пусть, кроме того, каждому y из отрезка $[\alpha; \beta]$ соответствует только одно значение x из отрезка $[a; b]$, для которого $f(x) = y$. Тогда на отрезке $[\alpha; \beta]$ определена функция, которая каждому y из $[\alpha; \beta]$ ставит в соответствие то значение x из $[a; b]$, для которого $f(x) = y$. Эта функция называется обратной для функции $y = f(x)$ и обозначается $x = f^{-1}(y)$.

Например, для функции $y = 8^x$ обратной служит функция $y = \log_8 x$, а для функции $y = \ln x$ — функция $y = e^x$. Отметим, что графики пря-





мой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать функцию на чётность м нечётность:

639. $y = \cos x + x \sin x$;

640. $y = x \cdot 2^{-x}$;

641. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}$;

642. $y = 2x \sin^2 x - 3x^3$;

643. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x$;

644. $y = \frac{x}{\sin x}$;

645. $y = 5 \log_2(x+1)$;

646. $y = x \cdot 4^{-x^2}$;

647. $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$;
648. $y = \frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$;
649. $y = 5^{-x^2}$;
650. $y = x^2 - x$;
651. $y = x^3 + x^2$.

Найти наименьший период функции:

652. $y = \sin 4x$;
653. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
654. $y = \sin x + \cos 2x$;
655. $y = \cos^2 3x$;
656. $y = \sin 3x + \sin 2x$;
657. $y = |\sin x|$;
658. $y = \sin(3x+1)$;
659. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;
660. $y = \sin^2 \frac{x}{3}$;
661. $y = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.

§14. Непрерывность и точки разрыва функции

14.1. Непрерывность

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если функция определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму точку) и предел функции в точке x_0 существует и равен значению функции в самой этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Замечание. Приращение непрерывной функции $\triangle f(x) = f(x) - f(x_0)$ стремится к нулю при приращении аргумента $\triangle x$, стремящемся к нулю, то есть

$$\lim_{\triangle x\to 0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0.$$

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале, если она определена на этом интервале и непрерывна в каждой точке интервала.

Итак, если при постепенном изменении аргумента функции её значение также меняется постепенно, то функция непрерывна. При этом малому изменению аргумента отвечает малое изменение функции.

Геометрически непрерывность функции на интервале означает, что график этой функции на данном интервале есть сплошная линия без скачков и разрывов.

14.2. Классификация точек разрыва

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 (в самой точке x_0 функция может существовать, а может и не существовать), но не является непрерывной в точке x_0.

Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если функция $f(x)$ имеет в этой точке конечные левый и правый пределы:

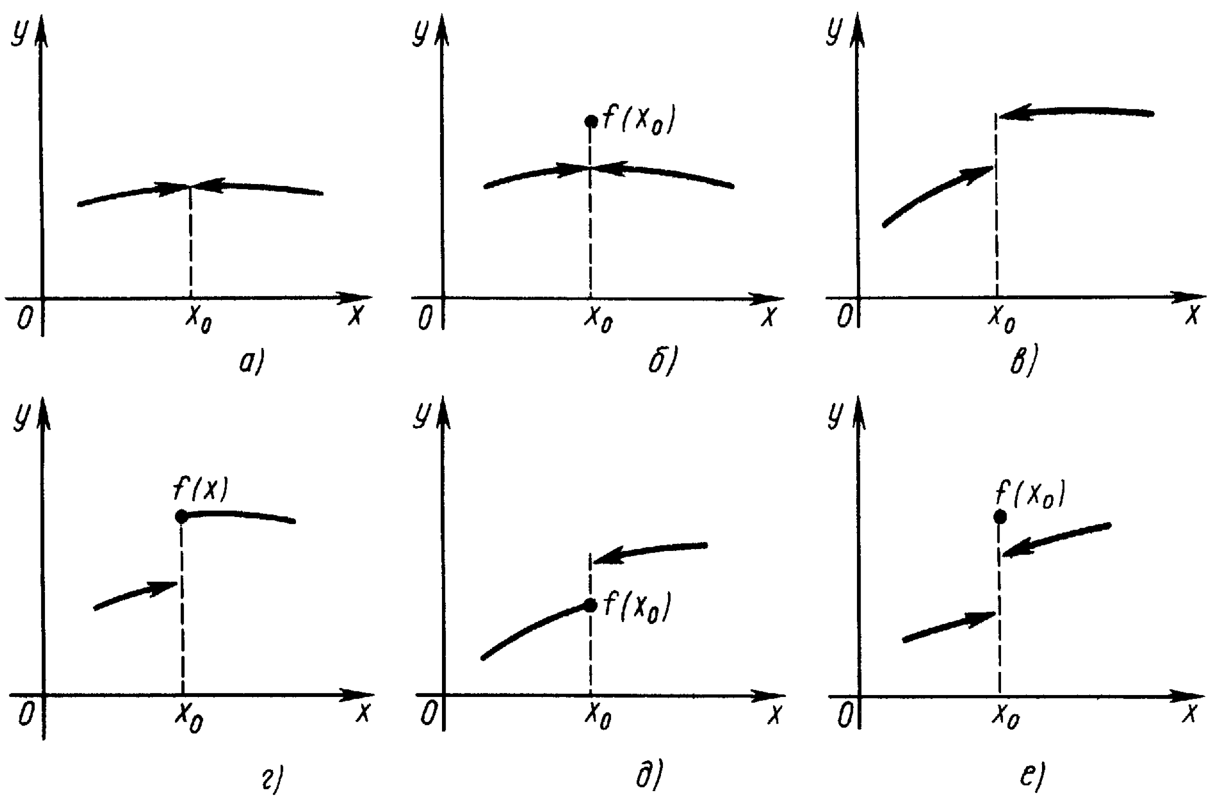
$$\lim_{x \to x_0-} f(x), \quad \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

Точка разрыва первого рода называется точкой устранимого разрыва, если

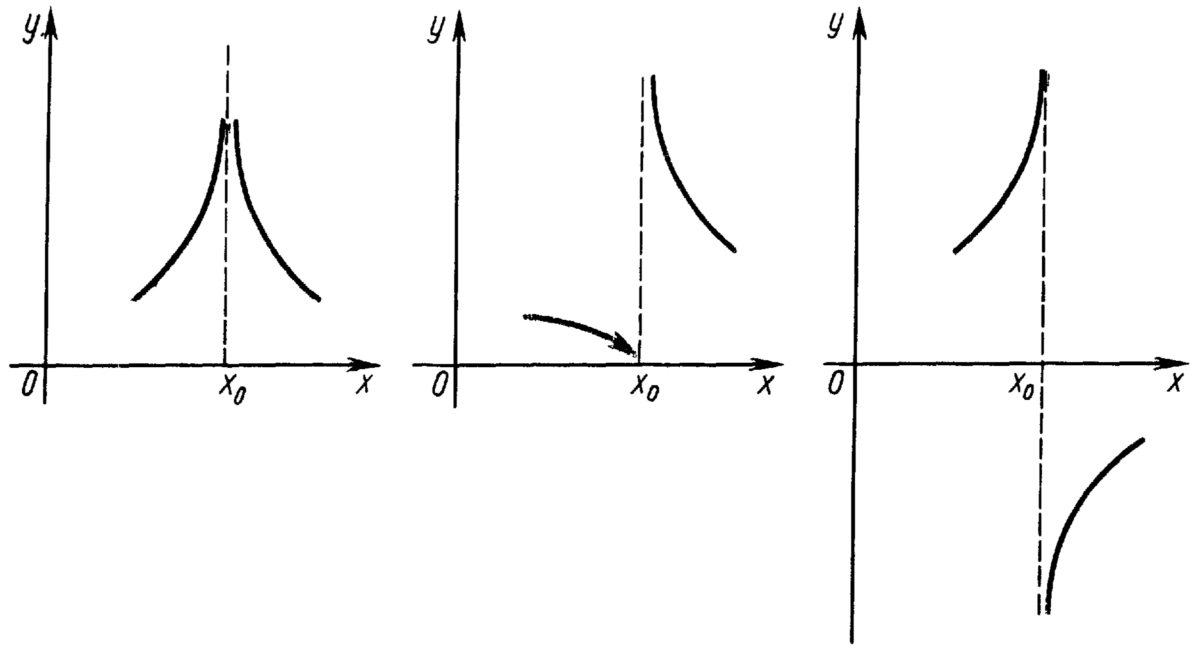
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x), \quad (\text{рисунки а) и б)})$$

и точкой скачка, если

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x) \quad (\text{рисунки в) — е)}).$$



Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов, или хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности. На следующих рисунках показаны некоторые (но не все) примеры точек разрыва второго рода.

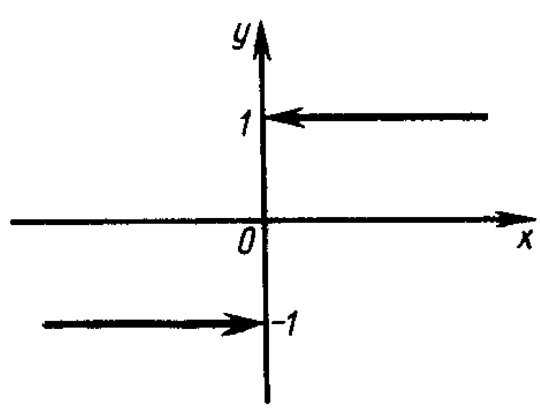


Замечание. Пусть функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0. В этом случае, если переопределить (или доопределить) функцию $f(x)$ в точке x_0, полагая $f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$, то функция $f(x)$ станет непрерывной в точке x_0. Если же точка разрыва x_0 функции $f(x)$ не является точкой устранимого разрыва, то подобным образом сделать функцию $f(x)$ непрерывной в точке x_0 нельзя.

Пример 1. Найти и классифицировать точки разрыва функции $\operatorname{sgn} x$.

Решение. Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$



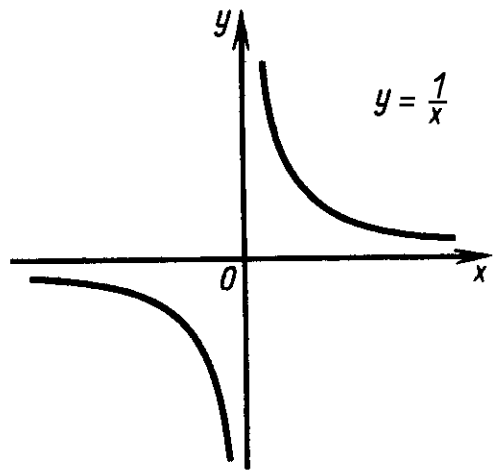
На множествах $x < 0$ и $x > 0$ функция $\operatorname{sgn} x$ непрерывна. В точке $x = 0$ функция не является непрерывной. Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода (точка скачка), так как существуют конечные (не равные между собой) левый и правый пределы функции $\operatorname{sgn} x$ в этой точке

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1, \quad 1 \neq -1.$$

Пример 2. Найти и классифицировать точки разрыва функции $\frac{1}{x}$.

Решение. Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна на множествах $x < 0$ и $x > 0$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

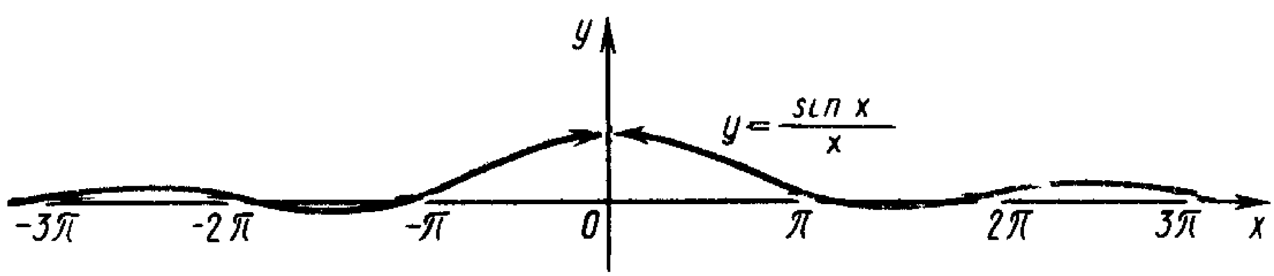


Пример 3. Определить точки разрыва функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$, в которой функция не определена. Поскольку

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{(первый замечательный предел)},$$

то точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода (устранимый разрыв).



Доопределим функцию по непрерывности:

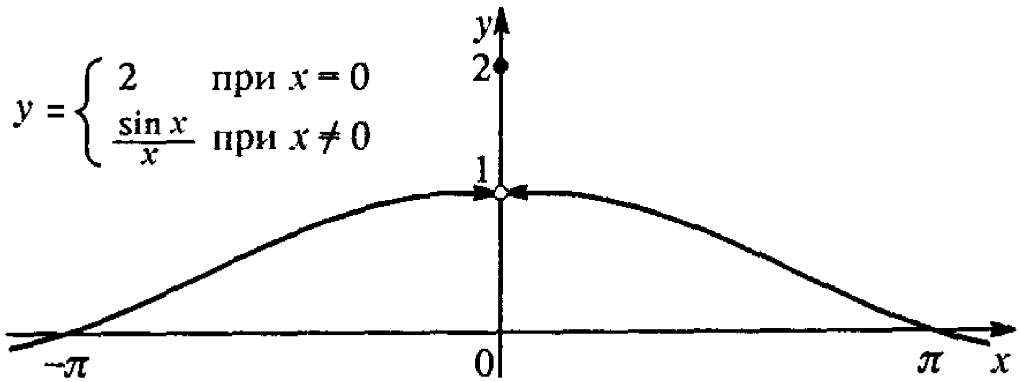
$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определённая таким образом функция непрерывна на всей числовой оси.

Если же переопределить функцию следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

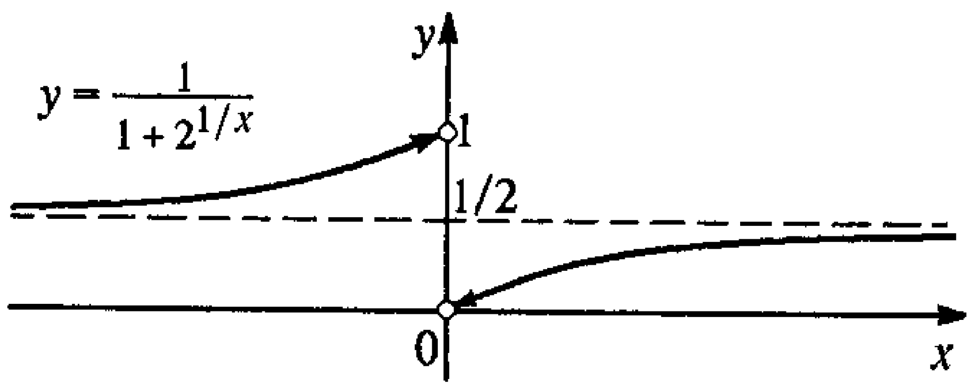
то точка $x = 0$ останется точкой разрыва первого рода (устранимым разрывом), в то же время функция будет всюду определена.



Пример 4. Найти точки разрыва функции $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$.

Решение. Единственной точкой разрыва данной функции является точка $x = 0$. Эта точка является точкой разрыва первого рода (точкой скачка), так как пределы функции слева и справа от точки 0 существуют, но не равны между собой. Действительно,

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = 1, \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = 0.$$



Пример 5. Определить точки разрыва функции $y = \frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1}$.

Решение. Единственной точкой разрыва функции $y = \frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1}$ является точка $x = 0$. В этой точке функция терпит разрыв первого рода (скачок), так как пределы функции слева и справа от точки 0 существуют, но не равны между собой. Действительно,

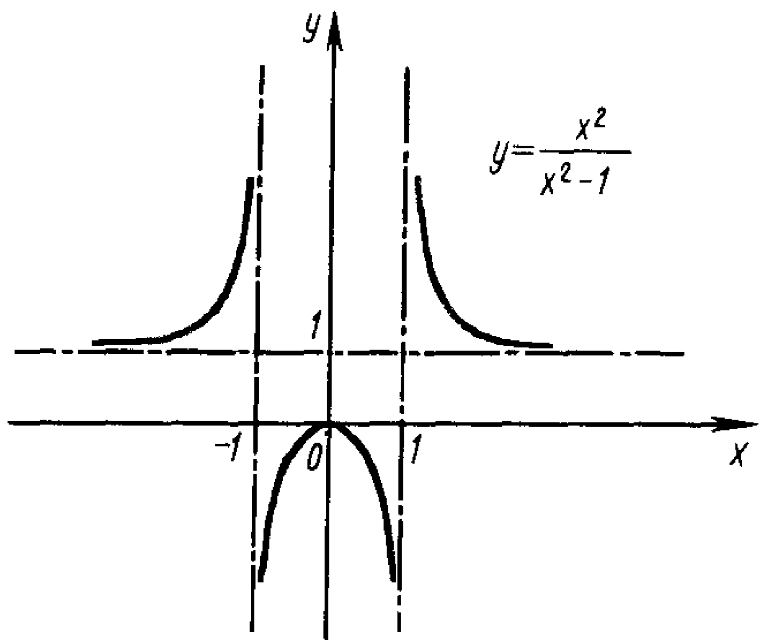
$$\lim_{x \to 0-} \frac{2^{1/x}}{2^{1/x} + 1} = 0, \quad \lim_{x \to 0+} \frac{2^{1/x}}{2^{1/x} + 1} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{1/x}}} = 1.$$

Пример 6. Определить точки разрыва функции $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Решение. Точками разрыва функции $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ служат точки $x = 1$ и $x = -1$, в которых данная функция не определена. Так как

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -1-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty,$$

то точки $x = 1$ и $x = -1$ являются точками разрыва второго рода.



Пример 7. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку для неё не существует правый предел:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}.$$

Заметим, что левый предел существует и равен нулю:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти и классифицировать точки разрыва функции:

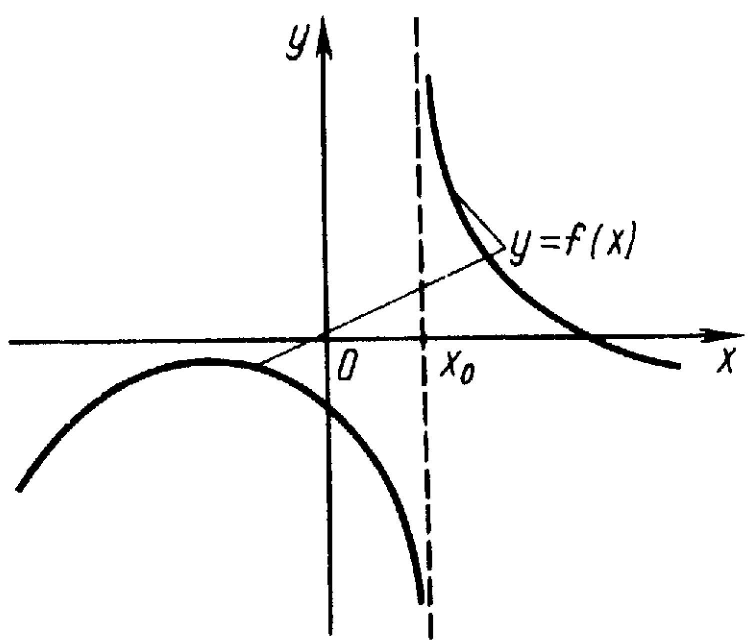
662. $y = -\frac{6}{x}$;

663. $y = 2 - \frac{|x|}{x}$;
664. $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$;
665. $y = \frac{x^3-x^2}{2|x-1|}$;
666. $y = \operatorname{tg} x$;
667. $y = \frac{4}{4-x^2}$;
668. $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x+2}$;
669. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;
670. $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$;
671. $y = \frac{x^3+x}{2|x|}$;
672. $y = \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$.

§15. Асимптоты

15.1. Понятие асимптоты

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.



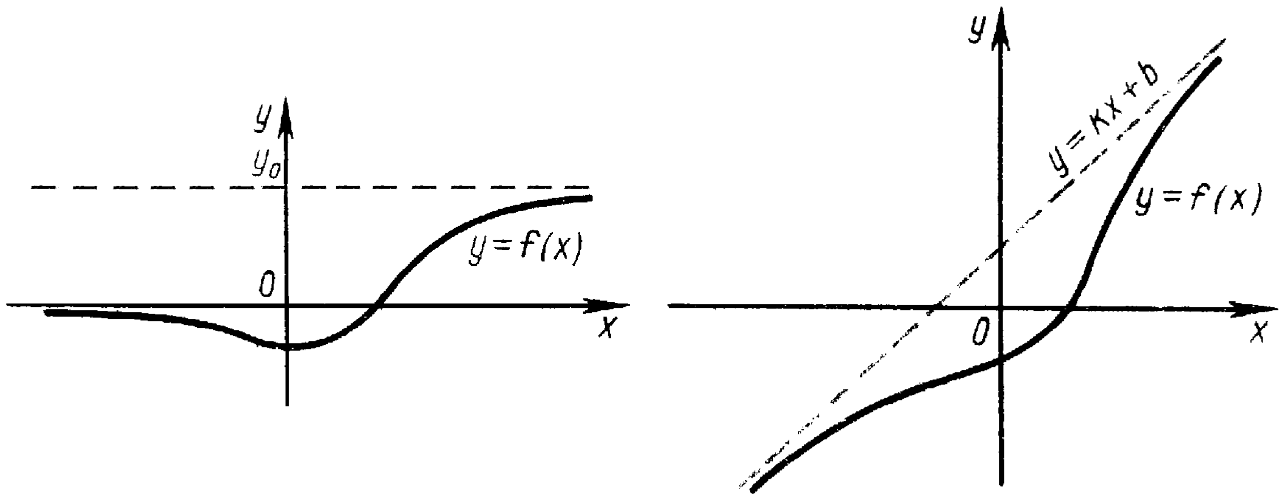
Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$.

При $k = 0$ наклонная асимптота называется горизонтальной.

Аналогично определяются асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (kx+b)) = 0$.

Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx+b)) = 0$.



Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = 4 + \frac{1}{x}$.

Решение. Находим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right) = 4,$$

поэтому $y = 4$ — горизонтальная асимптота графика данной функции. Далее, так как

$$\lim_{x\to0+}\left(4+\frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to0-}\left(4+\frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

то $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = 2^{-x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0. \quad \lim_{x\to-\infty} 2^{-x} = +\infty,$$

то ось абсцисс (прямая $y = 0$) является горизонтальной асимптотой графика данной функции при $x \to +\infty$. Вертикальных асимптот нет.

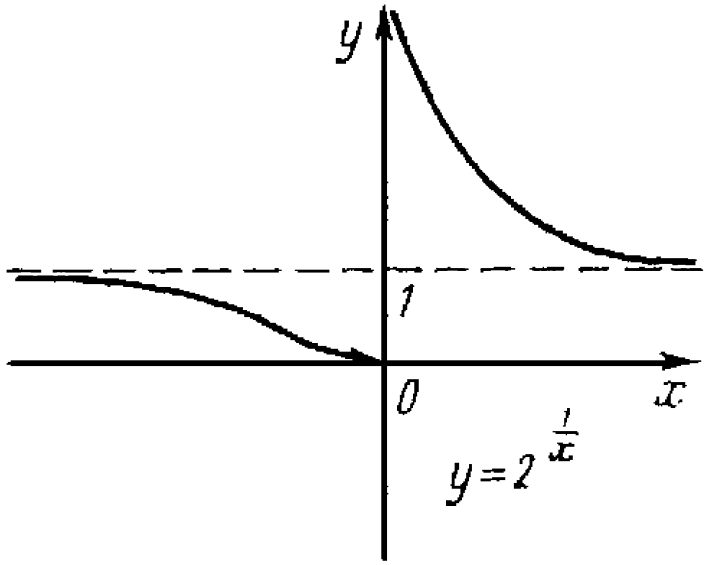
Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1,$$

значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Ось ординат (прямая $x = 0$) является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x\to0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \left(\lim_{x\to0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0\right).$$



Пример 4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода (см. пример 3 §14), поэтому вертикальных асимптот нет. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Наклонных асимптот нет.

Замечание. Асимптота графика функции может пересекать сам график функции. Более того, асимптота графика функции может бесконечное число раз пересекать сам график функции (см. пример 4).

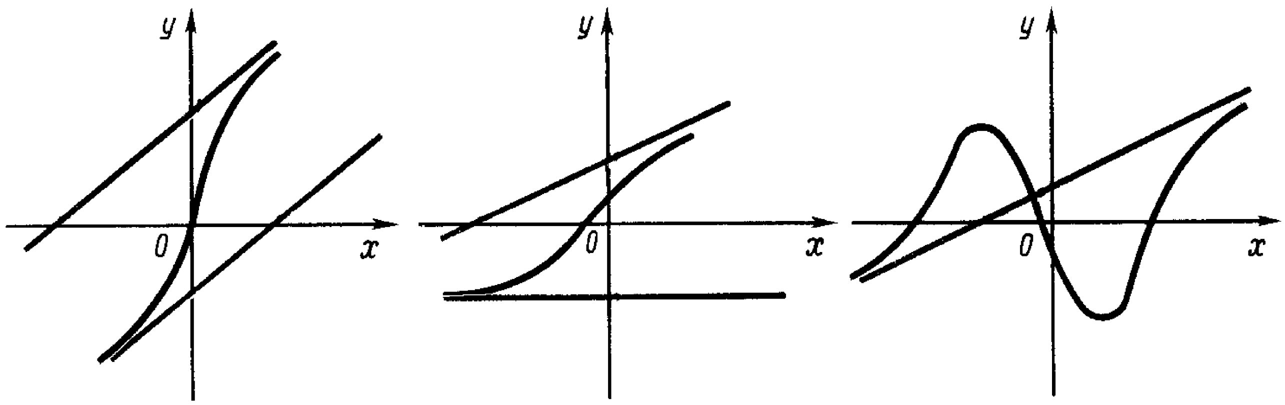
15.2. Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот

Горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ можно находить по следующему алгоритму.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел существует и равен некоторому числу b, то $y = b$ — горизонтальная асимптота. Если предел не существует или равен бесконечности, то перейти ко второму пункту.
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, то перейти к третьему шагу.
3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$, то перейти к четвёртому шагу.
4. Записать уравнение наклонной асимптоты: $y = kx + b$.

Замечание. Представленный алгоритм позволяет найти прямую, являющуюся асимптотой при $x \to \infty$, то есть и при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

На практике функция может иметь разные асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ или иметь асимптоту только при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$. Алгоритм нахождения подобных асимптот остаётся прежним, только пределы надо искать не при $x \to \infty$, а при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ (по отдельности).

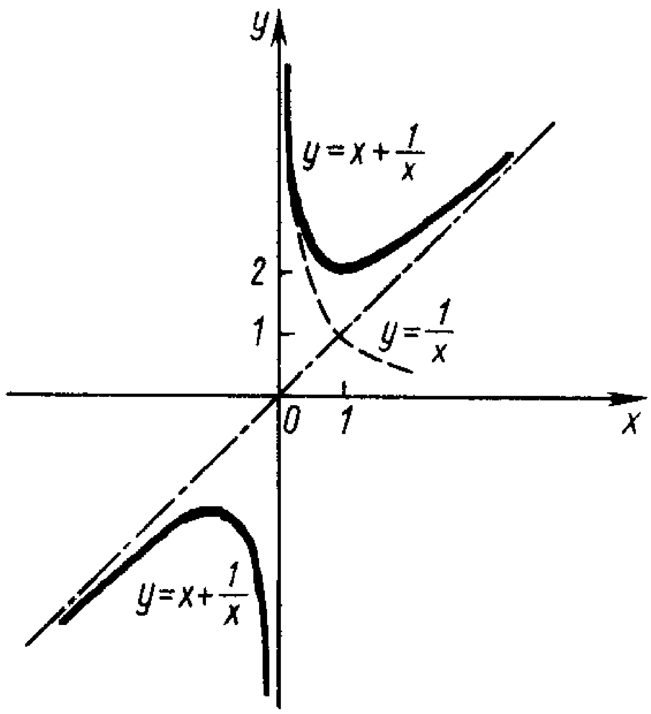


Пример 5. Найти асимптоты графика функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Положим $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Так как

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty,$$

то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.



Найдём наклонные асимптоты.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \infty.$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1=k.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=b.$

4. Прямая $y=kx+b=1\cdot x+0=x$ служит наклонной асимптотой графика данной функции.

Пример 6. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$.

Решение. Положим $f(x)=\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$. Вертикальных асимптот нет. Найдём наклонные асимптоты.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}=\infty.$

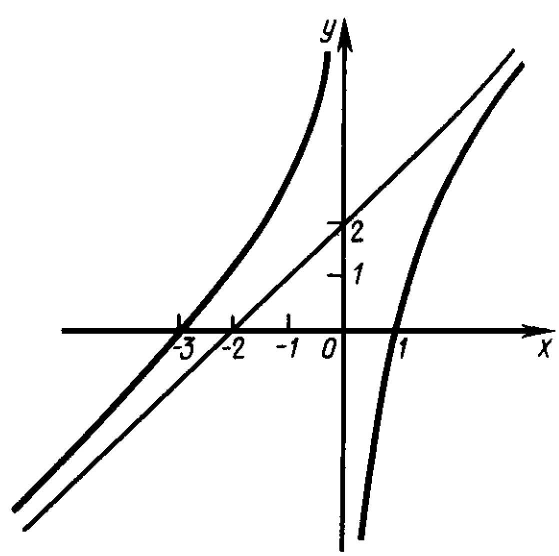
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3}{x(2x^2+5)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3}{2x^3+5x}=\frac{1}{2}=k.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x^2-5x+6}{4x^2+10}=\frac{-12}{4}=-3=b.$

4. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=\frac{1}{2}x-3$.

Пример 7. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^2+2x-3}{x}$.

Решение. Положим $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x}$. Находим вертикальные асимптоты. Точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода данной функции, причём $y\to+\infty$ при $x\to 0-$ и $y\to-\infty$ при $x\to 0+$. Следовательно, прямая $x=0$ — вертикальная асимптота.



Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x+2-\frac{3}{x}\right)=\infty,$$

следовательно, горизонтальных асимптот нет.

Находим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2.$$

Следовательно, прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой графика данной функции при $x\to\infty$, то есть как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

Пример 8. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{|x|(x-1)}{x+1}$.

Решение. Прямая $x=-1$ — вертикальная асимптота. Далее рассмотрим два случая: $x>0$ и $x<0$.

При $x>0$ получаем $y=\frac{x(x-1)}{x+1}$, поэтому

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(x-1)}{x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2.$$

Значит, прямая $y=x-2$ является наклонной асимптотой правой ветви данной функции (то есть при $x\to+\infty$).

При $x<0$ получаем $y=\frac{-x(x-1)}{x+1}$, поэтому

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(x-1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x-1)}{x+1}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x(x-1)}{x+1}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(x-1)+x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2.$$

Значит, прямая $y=-x+2$ является наклонной асимптотой левой ветви данной функции (то есть при $x\to-\infty$).

Задачи для самостоятельного решения

Найти асимптоты графика функции:

673. $y=1-\frac{4}{x^2}$;

674. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$;
675. $y = \frac{2}{|x|} - 1$;
676. $y = \frac{1-4x}{1+2x}$;
677. $y = \frac{x^2+x}{x}$;
678. $y = \frac{x^2}{x+1}$;
679. $y = \frac{x^2-x-1}{x}$;
680. $y = \frac{3-5x}{7x+4}$;
681. $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;
682. $y = \frac{4x-x^3}{x^2+4}$;
683. $y = \frac{x^3+x^2-2}{e^{\sin x}}$;
684. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$;
685. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{5-x}$;
686. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$;
687. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$;
688. $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$;
689. $y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$;
690. $y = \frac{1}{x^2} - x$;
691. $y = \frac{x^4+1}{3x^2+1}$;
692. $y = \frac{x-4}{2x+4}$;
693. $y = \frac{x^2}{2-2x}$;
694. $y = \frac{x^2}{x^2-4}$;
695. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$.

§16. Интервалы монотонности и точки экстремума функции

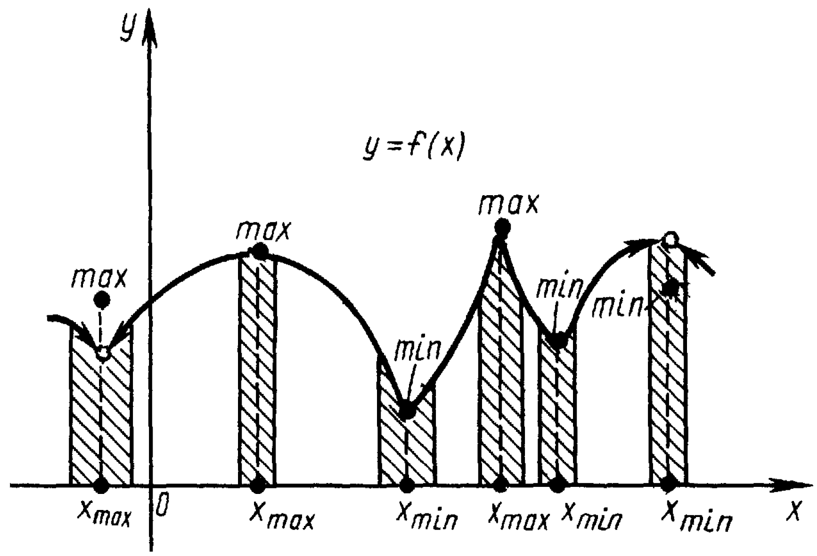
16.1. Экстремумы

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку. Проколотой окрестностью точки x_0 называется множество точек некоторой окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$.

Функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ имеет локальный минимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



Итак, точку x_0 называют точкой локального максимума функции $f(x)$, если значение в этой точке больше, чем значения функции в ближайших соседних точках, и точкой локального минимума, если значение в этой точке меньше, чем значения функции в ближайших соседних точках.

Для обозначения максимума или минимума существует общий термин экстремум.

Замечание. Приращение $\triangle f(x) = f(x) - f(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности точки экстремума не меняет знак. Оно положительно, если в точке x_0 достигается минимум, и отрицательно, если в точке x_0 — максимум.

16.2. Достаточное условие монотонности функции на интервале

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную на некотором интервале $(a; b)$. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ для всех x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на нём;

2) если $f'(x) < 0$ для всех x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ монотонно убывает на нём;

3) если $f'(x) = 0$ для всех x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ постоянна на нём (принимает одно и то же значение для всех x из интервала $(a; b)$.

Таким образом, для исследования функции на монотонность, необходимо найти производную и определить интервалы, на которых производная положительна (здесь функция монотонно возрастает) и отрицательна (здесь функция монотонно убывает).

Пример 1. Определить интервалы возрастания и убывания функции $y = x^2 e^{-x}$.

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x).$$

Рассмотрим интервалы знакопостоянства функции $y'(x)$ и знаки производной на этих интервалах:

$$-\infty < x < 0, \quad y'(x) < 0, \quad \text{функция убывает;}$$
$$0 < x < 2, \quad y'(x) > 0, \quad \text{функция возрастает;}$$
$$0 < x < +\infty, \quad y'(x) < 0, \quad \text{функция убывает.}$$

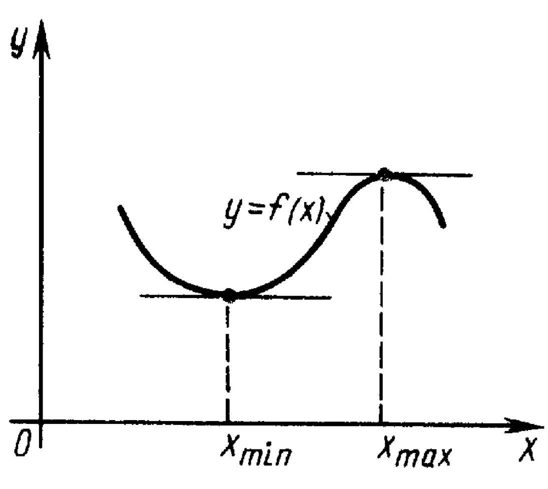
Таким образом, на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция убывает, а на интервале $(0; 2)$ — возрастает.

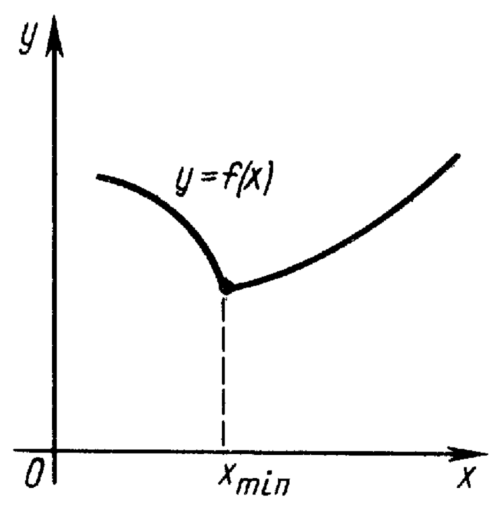
16.3. Необходимое условие существования экстремума (теорема Ферма)

Необходимое условие существования экстремума называется теоремой Ферма.

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Геометрически это означает, что в точке экстремума касательная к графику функции либо горизонтальна (левый рисунок), либо не существует (правый рисунок).





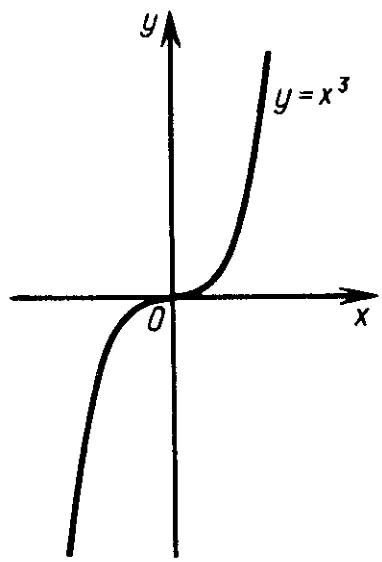
Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками (иногда их называют критическими точками первого рода). Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными точками.

Пример 2. Найти стационарные точки функции $y = x^3$.

Решение. Найдём точки, в которых производная функции $y = x^3$ равна нулю:

$$y' = (x^3)' = 3x^2 = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

Таким образом, точка $x = 0$ является стационарной точкой функции $y = x^3$, но, тем не менее, в точке $x = 0$ нет экстремума (см. рисунок).

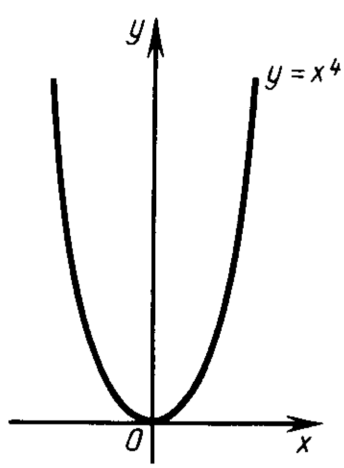


Пример 3. Найти стационарные точки функции $y = x^4$.

Решение. Найдём точки, в которых производная функции $y = x^4$ равна нулю:

$$y' = (x^4)' = 4x^3 = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

Таким образом, точка $x = 0$ является стационарной точкой функции $y = x^4$, более того, точка $x = 0$ — точка экстремума (точка минимума, см. рисунок).



Из предыдущих примеров видно, что в критических точках экстремум может существовать, но может и не существовать. Этот вопрос решается с помощью достаточных признаков существования экстремума.

16.4. Первый достаточный признак существования экстремума

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку, и производная $f'(x)$ существует в окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки x_0. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ (знак "+") при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ (знак "−") при $x > x_0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 достигает максимума;

2) если $f'(x) < 0$ (знак "−") при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ (знак "+") при $x > x_0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 достигает минимума;

3) если $f'(x)$ не меняет знак, то экстремума нет.

Другими словами, если производная меняет знак в окрестности точки x_0, то в этой точке имеется экстремум.

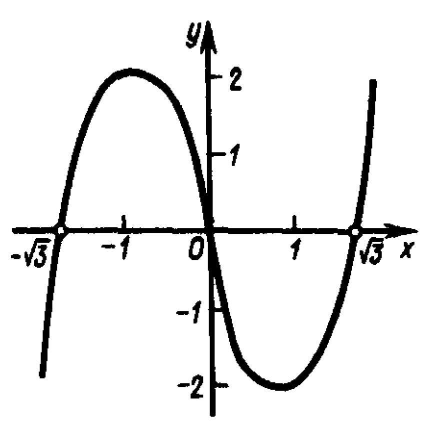
Таким образом, точка максимума отделяет участок монотонного возрастания функции от участка монотонного убывания, а точка минимума — участок монотонного убывания от участка монотонного возрастания (если движение происходит в положительном направлении оси абсцисс).

Пример 4. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x$.

Решение. Находим производную:

$$y'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Решая уравнение $3(x - 1)(x + 1) = 0$, получаем две точки возможного экстремума: $x = 1$, $x = -1$. При переходе через точку $x = 1$ (слева направо) производная $y'(x)$ меняет знак с "−" на "+", следовательно, в точке $x = 1$ минимум. При переходе через точку $x = -1$ производная $y'(x)$ меняет знак с "+" на "−", следовательно, в точке $x = -1$ максимум. Далее находим: $y_{min} = y(1) = -2$, $y_{max} = y(-1) = 2$.



Пример 5. Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

Решение. Функция дифференцируема на всей числовой прямой, следовательно, искомые точки экстремума содержатся среди корней уравнения $y'(x) = 0$. Вычисляем производную: $y'(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$. Находим корни уравнения: $x = 0$, $x = 1$. Рассмотрим знаки производной на интервалах:

$$-\infty < x < 0, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает,}$$
$$0 < x < 1, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает,}$$
$$1 < x < +\infty, \quad y'(x) < 0 \text{ — функция убывает.}$$

При переходе через критическую точку $x = 0$ (слева направо) производная знак не меняет, поэтому точка $x = 0$ не является ни точкой максимума, ни точкой минимума. При переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с "+" на "−". Это означает, что точка $x = 1$ является точкой максимума.

Пример 6. Найти точки экстремума функции $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Находим производную:

$$y' = \left(x - x^{\frac{2}{3}}\right)' = 1 - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Находим критические точки функции:

$$y'(x) = 0, \quad 3\sqrt[3]{x} - 2 = 0, \quad \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}, \quad x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$
$$y'(x) \text{ не существует, когда } 3\sqrt[3]{x} = 0, \quad x = 0.$$

Рассмотрим знаки производной на интервалах:

$$-\infty < x < 0, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает,}$$
$$0 < x < \frac{8}{27}, \quad y'(x) < 0 \text{ — функция убывает,}$$
$$\frac{8}{27} < x < +\infty, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает.}$$

Отсюда получаем, что точка $x = 0$ является точкой максимума, а точка $x = \frac{8}{27}$ — точкой минимума.

16.5. Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума

Интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = f(x)$ можно находить по следующему алгоритму.

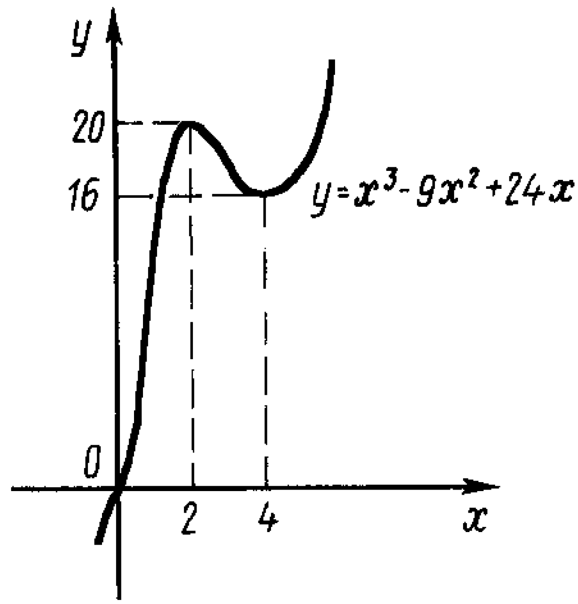
1. Вычислить производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки первого рода, то есть точки, в которых $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует (найденные точки разбивают числовую ось на непересекающиеся интервалы).
3. В каждом из получившихся интервалов определить знак производной (можно нарисовать схему). Определить наличие и характер экстремумов.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 7. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Решение. 1. Имеем $y'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$.

2. Производная равна нулю при $x = 2$ и при $x = 4$. Производная определена всюду, значит, кроме двух найденных точек, других критических точек нет.

3. Знак производной изменяется в зависимости от промежутка так, как показано на левом рисунке. При переходе через точку $x = 2$ производная



меняет знак с “+” на “–”, значит $x = 2$ — точка максимума. При переходе через точку $x = 4$ производная меняет знак с “–” на “+”, значит $x = 4$ — точка минимума.

4. Находим значения функции в точках экстремума. $y_{max} = y(2) = 20$, $y_{min} = y(4) = 16$. Эскиз графика функции изображён на правом рисунке.

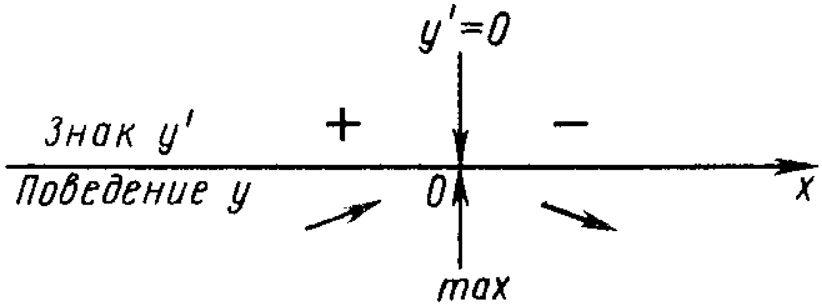
Пример 8. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Решение. 1. Находим производную: $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

2. Приравнивая производную нулю, находим критическую точку первого рода: $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0$, откуда $x = 0$. Других критических точек нет, так

как производная определена для любого x.

3. Производная $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0$ при $x < 0$; $y' < 0$ при $x > 0$. Поэтому на интервале $(-\infty; 0)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $(0; +\infty)$ — монотонно убывает. На схеме изображены знаки производной и поведение функции в зависимости от промежутка. Точка $x = 0$ является точкой максимума.



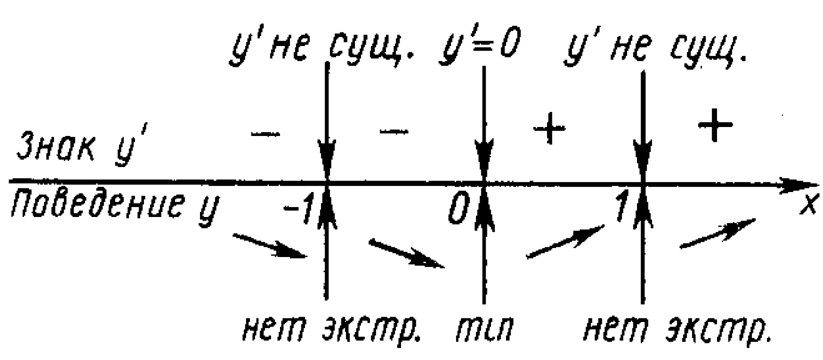
4. Находим значение функции в точке максимума: $y_{max} = y(0) = 1$.

Пример 9. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Решение. 1. Находим производную: $y' = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

2. Приравнивая производную нулю, находим критическую точку первого рода: $y' = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = 0$, откуда $x = 0$. Производная не существует, когда знаменатель обращается в нуль, то есть при $x = -1$ и при $x = 1$. Исходная функция определена при любом x, поэтому имеется три критические точки первого рода: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

3. Рисуем схему и находим интервалы монотонности и точки экстремума. Имеем: $y' > 0$ при $x > 0$, $x \neq 1$; $y' < 0$ при $x < 0$, $x \neq -1$. Поэтому на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция монотонно убывает, а на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ — монотонно возрастает. В точке $x = 0$ функция имеет минимум, а в точках $x = -1$ и $x = 1$ экстремума нет.



4. Находим значение функции в экстремальной точке: $y_{min} = y(0) = -1$.

16.6. Второй достаточный признак существования экстремума

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в данной критической точке x_0 конечную вторую производную. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, а если $f''(x_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.

Пример 10. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Решение. Имеем: $y' = 3x^2 - 18x + 24$. Производная обращается в нуль в точках $x = 2$ и $x = 4$. Далее находим: $y'' = 6x - 18$; $y''(2) = -6 < 0$, $y''(4) = 6 > 0$. Значит, $x = 2$ — точка максимума, а $x = 4$ — точка минимума функции (ср. с решением примера 7).

Пример 11. Выяснить, является ли точка $x = 0$ точкой экстремума функции $y = x^2 \cos x - x^3$.

Решение. Находим производную функции:

$$y' = 2x \cos x - x^2 \sin x - 3x^2, \quad y'(0) = 0.$$

Находим вторую производную функции:

$$y'' = 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x - 6x, \quad y''(0) = 2 > 0.$$

Так как в точке $x = 0$ первая производная равна нулю, а вторая — не равна нулю, то точка $x = 0$ является точкой экстремума. Учитывая ещё, что вторая производная положительна, находим, что $x = 0$ — точка минимума.

16.7. Третий достаточный признак существования экстремума (с помощью производных высшего порядка)

Пусть n — некоторое натуральное число и пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную порядка $n - 1$, а в самой точке x_0 — производную n-го порядка. Пусть в точке x_0 выполняются следующие соотношения:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если n — чётное число, то функция $y = f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$;

2) если n — нечётное число, то функция $y = f(x)$ не имеет экстремума в точке x_0.

Пример 12. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3$.

Решение. Находим: $y'(x) = 3x^2$, отсюда, возможная точка экстремума — $x = 0$ (см. пример 2). Далее,

$$y''(x) = 6x, \quad y''(0) = 0; \quad y'''(x) = y'''(0) = 6 > 0.$$

Итак, первая и вторая производные функции в точке $x = 0$ равны нулю, а третья — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ не является точкой экстремума (3 — нечётное число).

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4$.

Решение. Находим: $y'(x) = 4x^3$, отсюда, возможная точка экстремума — $x = 0$ (см. пример 3). Далее,

$$y''(x) = 12x^2,\ y''(0) = 0;\ y'''(x) = 24x,\ y'''(0) = 0;\ y^{(4)}(x) = y^{(4)}(0) = 24 > 0.$$

Получили, что первая, вторая и третья производные функции в точке $x = 0$ равны нулю, а четвёртая — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ является точкой экстремума (4 — чётное число). Так как $y^{(4)}(0) > 0$, то $x = 0$ — точка минимума.

Пример 14. Выяснить, является ли точка $x = 0$ точкой экстремума функции

$$y = -\frac{x^6}{2} + x^2\left(e^{x^4} - 1\right).$$

Решение. Последовательно находим производные функции:

$$y'(x) = -3x^5 + 2x\left(e^{x^4} - 1\right) + 4x^5e^{x^4}, \quad y'(0) = 0;$$

$$y''(x) = -15x^4 + 2\left(e^{x^4} - 1\right) + 28x^4e^{x^4} + 16x^8e^{x^4}, \quad y''(0) = 0;$$

$$y'''(x) = -60x^3 + 120x^3e^{x^4} + 112x^7e^{x^4} + \ldots, \quad y'''(0) = 0;$$

$$y^{(4)}(x) = -180x^2 + 360x^2e^{x^4} + \ldots, \quad y^{(4)}(0) = 0;$$

$$y^{(5)}(x) = -360x + 720xe^{x^4} + \ldots, \quad y^{(5)}(0) = 0;$$

$$y^{(6)}(x) = -360 + 720e^{x^4} + \ldots, \quad y^{(6)}(0) = 360.$$

Так как $y^{(6)}(0) = 360 > 0$ и число 6 чётное, то точка $x = 0$ является точкой минимума данной функции.

16.8. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда на этом отрезке она достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Наибольшее и наименьшее значения на отрезке непрерывной функции могут достигаться как внутри отрезка, так и на его концах. Если своего наибольшего или наименьшего значения функция достигает во внутренней точке отрезка, то такая точка является точкой экстремума.

Находить наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a; b]$ непрерывной функции $y = f(x)$ удобно по следующей схеме.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует, и отобрать из них те, которые лежат внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, полученных во втором пункте, а также на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее: они и являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Пример 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$ на отрезке $[0; 6]$.

Решение. 1. Находим производную: $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2. Производная y' существует при всех x. Найдём точки, в которых $y' = 0$, получим:

$$3x^2 - 6x - 45 = 0, \quad x^2 - 2x - 15 = 0, \quad x = -3,\ x = 5.$$

Отрезку $[0; 6]$ принадлежит только точка $x = 5$.

3. Вычисляем значения функции в точках $x = 0$, $x = 5$, $x = 6$:

$$y(0) = 225, \quad y(5) = 50, \quad y(6) = 63.$$

Наибольшим из найденных значений функции является число 225 (достигается при $x = 0$), а наименьшим — число 50 (достигается при $x = 5$).

Пример 16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 2x|x - 2|$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение. Рассмотрим функцию отдельно на множествах $[0; 2]$ и $[2; 3]$.

Если $x \in [0; 2]$, то $|x - 2| = -(x - 2)$, и данная функция может быть записана в виде $y = x^3 + 2x^2 - 4x$. Находим производную: $y' = 3x^2 + 4x - 4$. Корнями уравнения $3x^2 + 4x - 4 = 0$ являются числа $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$. Корень $x = -2 \notin [0; 2]$, а корень $x = \frac{2}{3} \in [0; 2]$. Значит, наибольшее и наименьшее значения данной функции на отрезке $[0; 2]$ находятся среди чисел: $y(0)$, $y\left(\frac{2}{3}\right)$ и $y(2)$.

Если $x \in [2; 3]$, то $|x - 2| = x - 2$, и данная функция может быть записана в виде $y = x^3 - 2x^2 + 4x$. Находим производную:

$$y' = 3x^2 - 4x + 4 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0 \text{ при любом } x.$$

Так как функция $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ непрерывна на отрезке $[2; 3]$ и $y'(x) > 0$ на интервале $(2; 3)$, то эта функция возрастает на отрезке $[2; 3]$. Следовательно, наибольшее значение данной функции на отрезке $[2; 3]$ есть $y(3)$, а наименьшее значение — $y(2)$.

Теперь находим наибольшее и наименьшее значения функции на всём отрезке $[0; 3]$. Для этого вычисляем значения:

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{40}{27}, \quad y(2) = 8, \quad y(3) = 21.$$

Таким образом, наибольшее значение данной функции на отрезке $[0; 3]$ есть $y(3) = 21$, а наименьшее значение функции равно $y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{40}{27}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

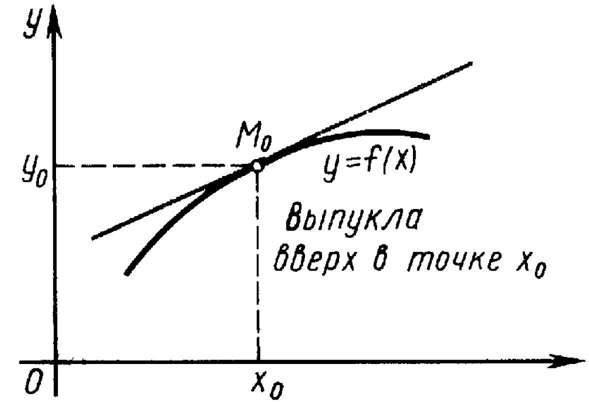
696. $y = 2x - 1$, $[0; 1]$;
697. $y = x^2 - 6x + 8$, $[1; 4]$;
698. $y = 3x^3 - 4x + 8$, $[-1; 1]$;
699. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $[0; 1]$;
700. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $[-2; 1]$;
701. $y = \sin x + 2x$, $[-\pi; \pi]$;
702. $y = \sin^2 x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$;
703. $y = \sin x - x - \frac{x^3}{3}$, $[0; \pi]$;
704. $y = \frac{1}{x} + x$, $[0,1; 10]$;
705. $y = \frac{x}{x - x^2 - 1}$, $[-2; 2]$;
706. $y = x \ln x - x$, $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

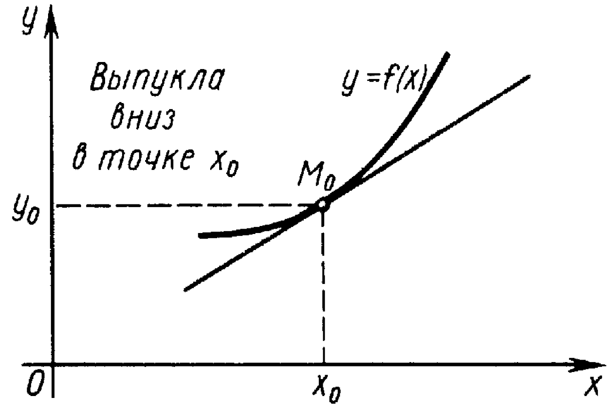
§17. Интервалы выпуклости и точки перегиба функции

17.1. Выпуклость вверх и вниз

Функция $y = f(x)$ выпукла вверх в точке x_0, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех её точек x касательная к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$ лежит выше графика.

Функция $y = f(x)$ выпукла вниз в точке x_0, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех её точек x касательная к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$ лежит ниже графика.



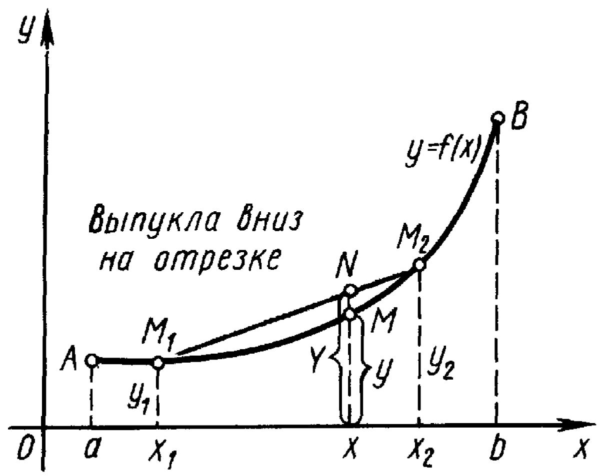


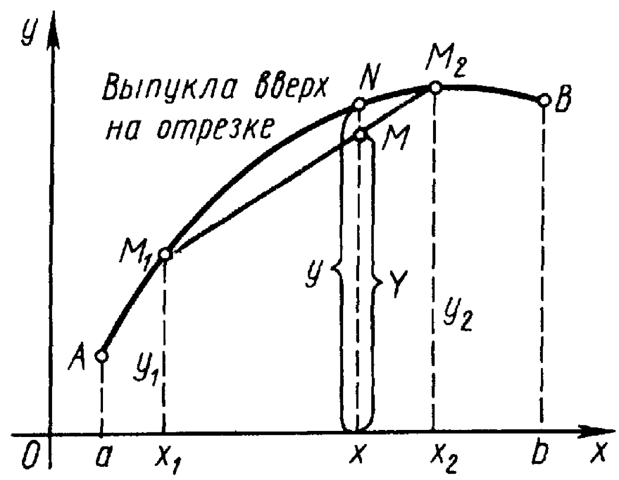
Если на некотором интервале $(a; b)$ все касательные к графику функции $y = f(x)$ лежат выше самого графика, то на данном интервале функция выпукла вверх. Если на некотором интервале $(a; b)$ все касательные к графику функции $y = f(x)$ лежат ниже самого графика, то на данном интервале функция выпукла вниз.

Замечание. Иногда, функцию $y = f(x)$, выпуклую вверх на интервале $(a; b)$, называют вогнутой, а выпуклую вниз — выпуклой (без слова вниз) на интервале $(a; b)$.

Понятие выпуклости функции на промежутке можно ввести, не требуя существования касательной в каждой точке графика.

Выпуклая вверх на отрезке функция характеризуется тем, что все точки любой дуги её графика расположены над соответствующей хордой. Выпуклая вниз на отрезке функция характеризуется тем, что все точки любой дуги её графика расположены под соответствующей хордой.





17.2. Достаточное условие выпуклости функции на интервале

Если вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ существует на интервале $(a; b)$ и не меняет знак на интервале $(a; b)$, то:

1) при $f''(x) > 0$ (знак “+”) функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a; b)$;

2) при $f''(x) < 0$ (знак "$-$") функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a; b)$.

Таким образом, для нахождения интервалов выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$ нужно найти вторую производную функции и решить неравенства $f''(x) < 0$ и $f''(x) > 0$.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости функции $y = (x^2 - 4x + 3)^2$.

Решение. Находим вторую производную: $y'' = 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right)$. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем:

$$y'' > 0 \text{ или } 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) > 0, \text{ откуда } x < 2 - \frac{1}{\sqrt{3}},\ x > 2 + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

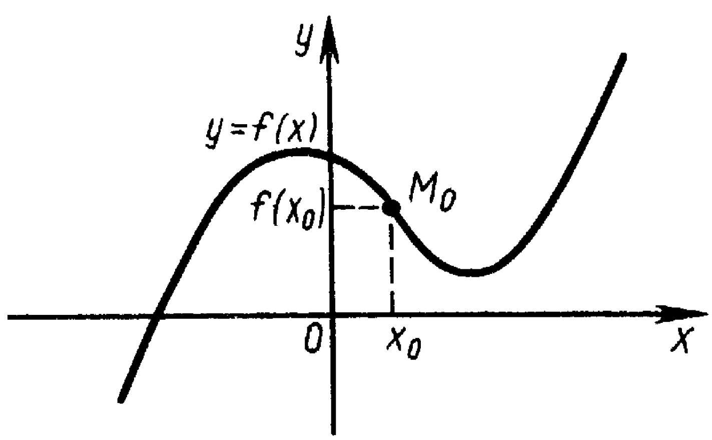
$$y'' < 0 \text{ или } 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) < 0, \text{ откуда } 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервале $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ функция выпукла вверх.

Замечание. Вместо решения неравенств $f''(x) < 0$ и $f''(x) > 0$ удобно вычислять значения $f''(x)$ в отдельных точках, взяв по произвольной точке из каждого интервала знакопостоянства функции $f''(x)$.

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется точкой перегиба этого графика, если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от M_0 имеет разные направления выпуклости.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, имеющий перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.



Пример 2. Найти точки перегиба функции $y = (x^2 - 4x + 3)^2$.

Решение. В примере 1 для данной функции найдены интервалы выпуклости вверх и вниз. Для точек $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ существуют окрестности, в пределах которых график функции имеет разные направления выпуклости слева и справа от данных точек. Следовательно, точки $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками перегиба исходной функции.

17.3. Необходимый признак существования точки перегиба

Если функция в точке x_0 имеет перегиб, то вторая производная в этой точке либо не существует, либо равна нулю.

Точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует, называют критическими точками второго рода.

Пример 3. Найти критические точки второго рода функции $y = x^3$.

Решение. Вычисляем вторую производную функции $y = x^3$: $y'' = 6x$. Приравниваем вторую производную нулю и находим, что $x = 0$ — критическая точка второго рода. Отметим, что точка $x = 0$ является точкой перегиба функции $y = x^3$ (см. график функции в примере 2 §16).

Пример 4. Найти критические точки второго рода функции $y = x^4$.

Решение. Вычисляем вторую производную функции $y = x^4$: $y'' = 12x^2$. Приравниваем вторую производную нулю и находим, что $x = 0$ — критическая точка второго рода. Отметим, что точка $x = 0$ не является точкой перегиба функции $y = x^4$ (см. график функции в примере 3 §16).

Из предыдущих примеров видно, что критическая точка второго рода может быть точкой перегиба, а может и не быть. Этот вопрос решается с помощью достаточных признаков существования точки перегиба.

17.4. Достаточный признак существования точки перегиба

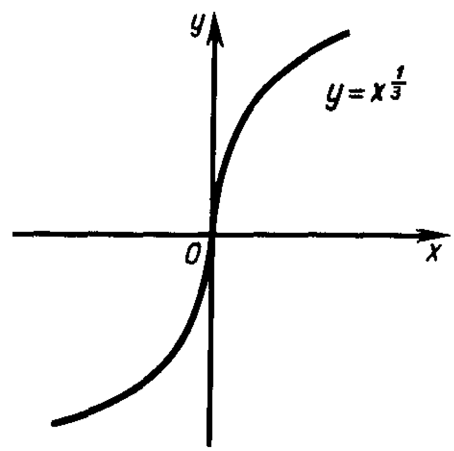
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку. Пусть, далее, вторая производная в этой точке равна нулю или не существует. Тогда, если $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$ или $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Пример 5. Найти точки перегиба функции $y = x^3 - 3x^2$.

Решение. Находим вторую производную функцию: $y''(x) = 6x$. Из уравнения $6x = 0$ получаем одну критическую точку второго рода: $x = 0$. Исследуем знак $y''(x)$ в окрестности этой точки. Слева от точки $x = 0$ выполнено $y''(x) < 0$ (выпуклость графика направлена вверх), а справа — $y''(x) > 0$ (выпуклость графика направлена вниз), то есть точка $x = 0$ является точкой перегиба рассматриваемой функции (см. рисунок в примере 4 §16).

Пример 6. Найти точки перегиба функции $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Решение. Эта функция в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $(0;0)$ совпадает с ось Oy. Вторая производная в точке $x = 0$ не существует. График функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ имеет перегиб в точке $(0;0)$, так как вторая производная $y''(x) = \frac{2}{9^{5/3}}$ имеет слева и справа от точки $x = 0$ разные знаки.



Пример 7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^2 + \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Найдём вторую производную функции:

$$y'(x) = 2x + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \quad y''(x) = 2 - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = 2\left(1 - \frac{1}{9x\sqrt[3]{x}}\right);$$

$$y''(x) = 0 \text{ при } x = \frac{1}{\sqrt{27}} \text{ и } x = -\frac{1}{\sqrt{27}};$$

$$y''(x) \text{ не существует при } x = 0.$$

Определим интервалы выпуклости вверх и вниз:

$$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{27}}, \quad y''(x) > 0, \quad \text{функция выпукла вниз;}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{27}} < x < 0, \quad y''(x) < 0, \quad \text{функция выпукла вверх;}$$

$$0 < x < \frac{1}{\sqrt{27}}, \quad y''(x) < 0, \quad \text{функция выпукла вверх;}$$

$$\frac{1}{\sqrt{27}} < x < +\infty, \quad y''(x) > 0, \quad \text{функция выпукла вниз.}$$

Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $\left(-\frac{1}{\sqrt{27}}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ — выпукла вверх.

В точках $x = -\frac{1}{\sqrt{27}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{27}}$ вторая производная меняет знак, значит эти точки являются точками перегиба данной функции. Точка $x = 0$ не является точкой перегиба, так как вторая производная не меняет знак при переходе через эту точку ($y''(x) < 0$ и слева и справа от точки $x = 0$).

17.5. Достаточный признак существования точки перегиба (с помощью производных высшего порядка)

Пусть n — некоторое натуральное число и пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную порядка $n-1$, а в самой точке x_0 — производную n-го порядка. Пусть в точке x_0 выполняются следующие соотношения:

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если n — нечётное число, то точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$;

2) если n — чётное число, то точка x_0 не является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Пример 8. Найти точки перегиба функции $y = x^3$.

Решение. Находим: $y''(x) = 6x$, отсюда, возможная точка перегиба — $x = 0$ (см. пример 3). Далее, $y'''(x) = y'''(0) = 6 \neq 0$.

Итак, вторая производная функции в точке $x = 0$ равна нулю, а третья — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ является точкой перегиба (3 — нечётное число).

Пример 9. Найти точки перегиба функции $y = x^4$.

Решение. Находим: $y''(x) = 12x^2$, отсюда, возможная точка перегиба — $x = 0$ (см. пример 4). Далее,

$$y'''(x) = 24x, \quad y'''(0) = 0; \quad y^{(4)}(x) = y^{(4)}(0) = 24 \neq 0.$$

Итак, вторая и третья производные функции в точке $x = 0$ равны нулю, а четвёртая — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ является точкой перегиба (4 — чётное число).

17.6. Нахождение интервалов выпуклости и точек перегиба

Алгоритм применения второй производной для нахождения интервалов выпуклости вверх и вниз и точек перегиба полностью аналогичен алгоритму нахождения экстремумов и интервалов монотонности, только вместо первой производной рассматривается вторая производная.

1. Вычислить производную $f''(x)$.

2. Найти критические точки второго рода, то есть точки, в которых $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует (найденные точки разбивают числовую ось на непересекающиеся интервалы).
3. В каждом из получившихся интервалов определить знак второй производной (можно нарисовать схему). Определить интервалы выпуклости и наличие точек перегиба.
4. Найти ординаты точек перегиба.

Пример 10. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

Решение. 1. Находим вторую производную:

$$y''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 36(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

2. Вторая производная определена при любом x и обращается в нуль при $x = 1$ и при $x = \frac{1}{3}$. Следовательно, имеются две критические точки второго рода: $x = 1$ и $x = \frac{1}{3}$.

3. Знаки второй производной меняются следующим образом: на интервале $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ имеем $y''(x) > 0$, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ имеем $y''(x) < 0$, на интервале $(1; +\infty)$ имеем $y''(x) > 0$.

Функция выпукла вверх на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ и выпукла вниз на интервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$. При переходе через точки $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$ направление выпуклости функции меняется, следовательно точки $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$ являются точками перегиба данной функции.

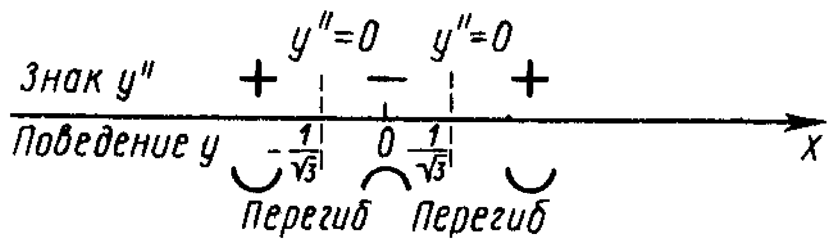
4. Находим ординаты точек перегиба: $y\left(\frac{1}{3}\right) = 12\frac{11}{27}$, $y(1) = 13$.

Пример 11. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Решение. 1. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2(3x^2-1)}{x^2+1)^3}$.

2. Вторая производная определена при любом x, она обращается в нуль при $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найденный точки являются критическими точками второго рода.

3. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{2(3x^2-1)}{x^2+1)^3} > 0$, откуда $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y'' < 0$, откуда $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Рисуем схему.



На интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — выпукла вверх. В точках $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет перегибы.

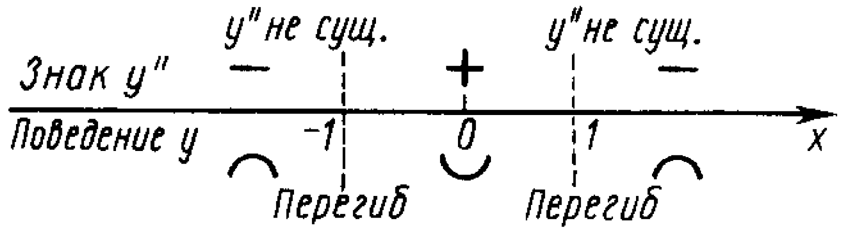
4. Находим ординаты точек перегиба: $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$ и $y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$.

Пример 12. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Решение. 1. Находим вторую производную: $y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$.

2. В точках $x = -1$ и $x = 1$ вторая производная не существует (знаменатель обращается в нуль). Учитывая ещё, что ни в одной точке вторая производная в нуль не обращается, делаем вывод, что критическими точками второго рода являются две точки: $x = -1$ и $x = 1$.

3. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $-\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}} > 0$, откуда $-1 < x < 1$; $y'' < 0$, откуда $x < -1$, $x > 1$. Рисуем схему.



На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(-1; 1)$ — выпукла вниз. Точки $x = -1$ и $x = 1$ являются точками перегиба функции.

4. Находим ординаты точек перегиба: $y(-1) = 0$ и $y(1) = 0$.

§18. Полное исследование функции и построение её графика

Полное исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на периодичность.
3. Исследовать функцию на чётность и нечётность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти точки разрыва функции и установить характер разрыва; исследовать поведение функции на границе области определения; найти асимптоты.

6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Исследовать направления выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
8. Используя все полученные результаты, построить график функции.

Замечание. В процессе исследования функции необязательно строго придерживаться приведённой схемы, иногда удобнее изменить порядок исследования.

Пример 1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x(x+1)(x-1)$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет три точки пересечения с осью Ox: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. С осью Oy функция пересекается только при $y = 0$.

Определим интервалы знакопостоянства функции. Решим неравенство $x(x+1)(x-1) > 0$. Его решением является объединение двух интервалов: $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$. Таким образом, исследуемая функция положительна на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ (это следует из нечётности функции).

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x-1) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x(x+1)(x-1) = -\infty.$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

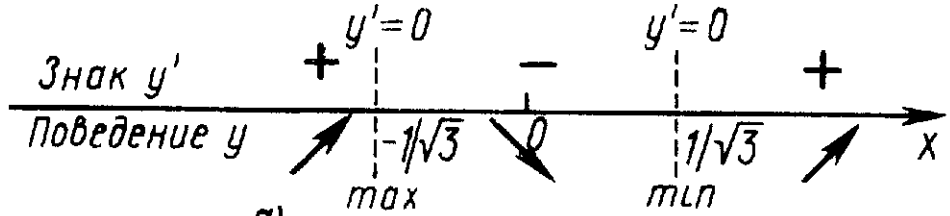
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} (x+1)(x-1) = \infty.$$

Значит, наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Вертикальных асимптот тоже нет, так как отсутствуют точки разрыва и функция определена на всей числовой оси.

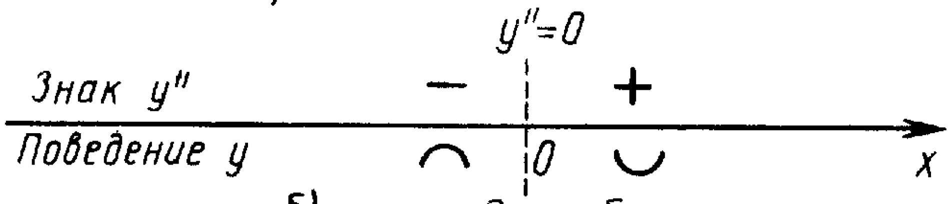
6. Найдём производную: $y' = 3x^2 - 1$. Решаем неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$. Имеем: $y' > 0$ или $3x^2 - 1 > 0$, откуда $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y' < 0$, откуда $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — монотонно убывает.

Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $y' = 3x^2 - 1$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Рисуем схему (рис. а)), из которой следует, что в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум, а в точке

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — минимум. Находим значения функции в экстремальных точках: если $x_{max} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; если $x_{min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.



а)

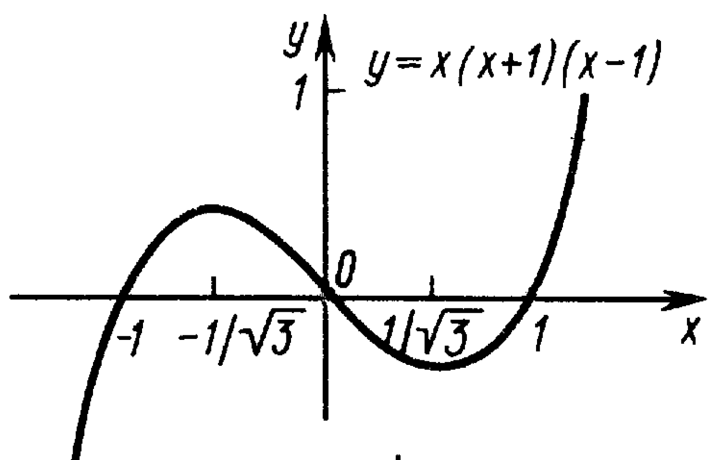


б)

7. Находим вторую производную: $y'' = 6x$. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $6x > 0$, откуда $x > 0$; $y'' < 0$, откуда $x < 0$.

Приравнивая вторую производную нулю, найдём критическую точку второго рода: $y'' = 6x = 0$, откуда $x = 0$. Рисуем схему (рис. б)), из которой следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб (это также следует из нечётности функции). На интервале $(-\infty; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз. Находим ординату точки перегиба: $y_{пер} = 0$.

8. График функции изображён на рис. в). При построении пользуемся симметрией графика относительно начала координат.



в)

Пример 2. Провести полное исследование и построить график функции $y = (x^2 + 1)(x - 1)$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осью Ox в токе $(1;0)$ и одну точку пересечения с осью Oy в точке $(0;-1)$.

Функция положительна при $x>1$ и отрицательна при $x<1$.

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)(x-1)=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}(x^2+1)(x-1)=-\infty.$$

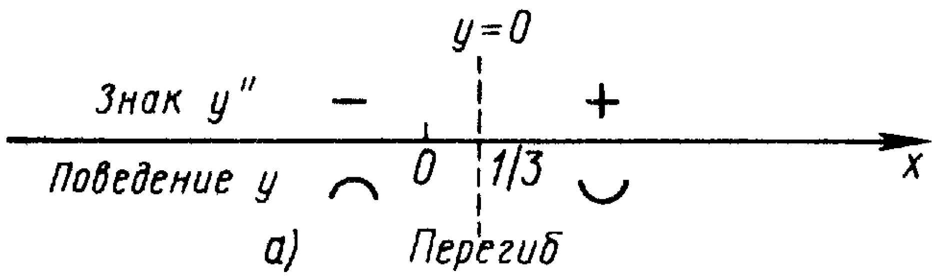
Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)(x-1)}{x}=\infty.$$

Значит, наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Нет и вертикальных асимптот (функция определена на всей числовой оси и нет точек разрыва).

6. Найдём производную: $y'=3x^2-2x+1$. На всей числовой оси $y'= = 3x^2-2x+1>0$, значит функция монотонно возрастает. Экстремумов нет.

7. Находим вторую производную: $y''=6x-2$. Решаем неравенства $y''>0$ и $y''<0$. Имеем: $y''>0$ или $6x-2>0$, откуда $x>\frac{1}{3}$; $y''<0$, откуда $x<\frac{1}{3}$.



Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $y''=6x-2=0$, откуда $x=\frac{1}{3}$. Из схемы (рис. а)) следует, что в точке $x=\frac{1}{3}$ функция имеет перегиб. На интервале $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ функция выпукла вверх, а на интервале $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$ — выпукла вниз. Найдём ординату точки перегиба: $y_{пер}=-\frac{20}{27}$.

8. График функции изображён на рис. б).

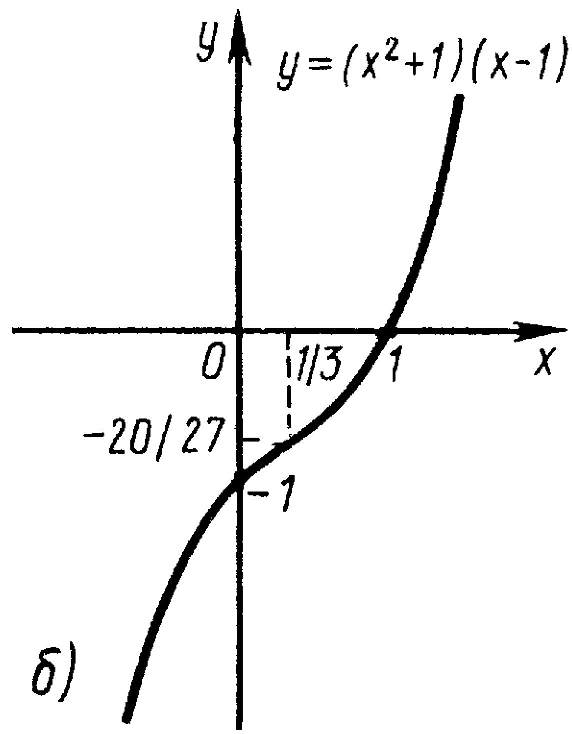
Пример 3. Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0;0)$.



Функция положительна на интервале $(0; +\infty)$ и отрицательна на интервале $(-\infty; 0)$.

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

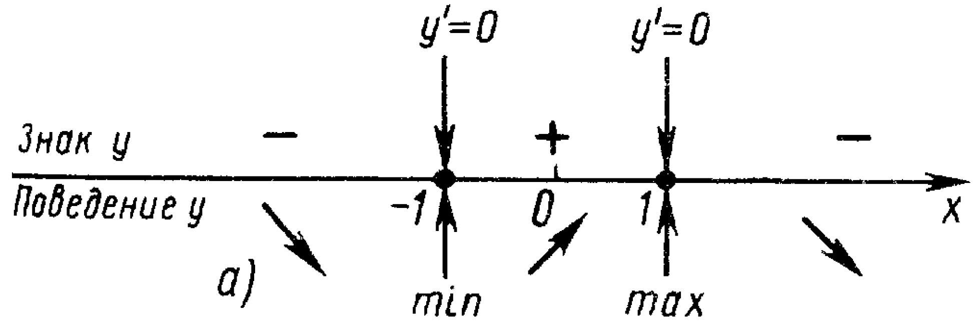
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0.$$

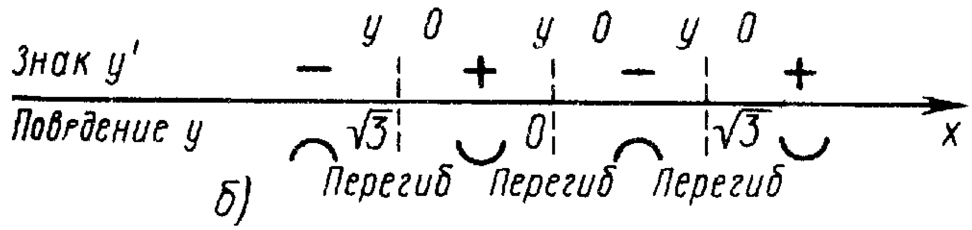
Следовательно, имеется горизонтальная асимптота $y = 0$. Вертикальных асимптот нет.

6. Найдём производную: $y' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$. Решаем неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$. Имеем: $y' > 0$ или $\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} > 0$, откуда $-1 < x < 1$, $y' < 0$, откуда $x < -1$, $x > > 1$. Таким образом, на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция монотонно убывает, а на интервале $(-1; 1)$ — монотонно возрастает.

Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $y' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0$, откуда $x = -1$, $x = 1$. Из схемы (рис. а)) следует, что в точке $x = -1$ функция имеет минимум, а в точке $x = 1$ — максимум. Найдём ординаты экстремальных точек: если $x = -1$, то $y_{min} = -1$; если $x = 1$, то $y_{max} = 1$.

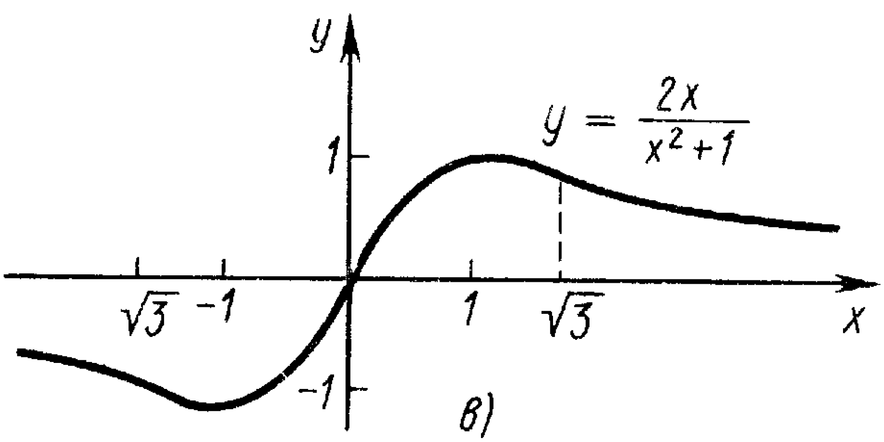
7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$. Решаем неравенства $y'' > > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3} > 0$, откуда $-\sqrt{3} < x < 0$, $x > \sqrt{3}$; $y'' < 0$, откуда $0 < x < \sqrt{3}$, $x < -\sqrt{3}$.





Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $y'' = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3} = 0$, откуда $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Из схемы (рис. б)) следует, что в точках $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ функция имеет перегибы. На интервалах $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$ и $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ и $\left(0; \sqrt{3}\right)$ — выпукла вверх. Найдём ординаты точек перегиба: если $x = 0$, то $y_{пер} = 0$; $x = -\sqrt{3}$, то $y_{пер} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \sqrt{3}$, то $y_{пер} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. График функции изображён на рис. в).



Пример 4. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x}{x^2-4}$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось, кроме точек $x = 2$ и $x = -2$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0; 0)$.

Для нахождения интервалов знакопостоянства решаем неравенство $y > 0$ или $\frac{x}{x^2-4} > 0$, откуда $-2 < x < 0$ и $x > 2$. Функция положительна на интервалах $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$ и отрицательна (в силу нечётности) на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$.

5. Функция имеет две точки разрыва — $x = 2$ и $x = -2$.

Поведение функции на границе области определения:

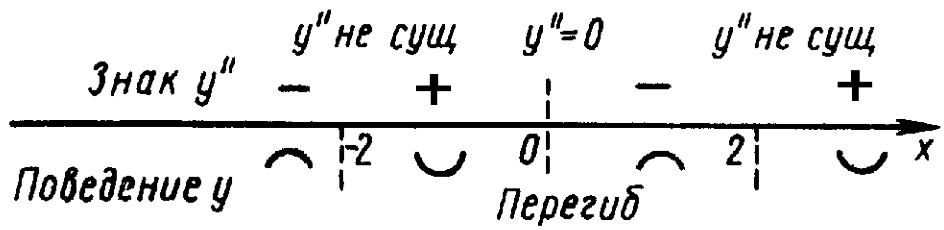
$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{x}{x^2-4} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} = \frac{x}{x^2-4} = 0,$$
$$\lim_{x\to-2-} = \frac{x}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to-2+} = \frac{x}{x^2-4} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to2-} = \frac{x}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to2+} = \frac{x}{x^2-4} = +\infty.$$

Отсюда следует, что в точках $x = 2$ и $x = -2$ функция имеет разрывы второго рода. Прямые $x = 2$ и $x = -2$ являются вертикальными асимптотами, прямая $y = 0$ — горизонтальной асимптотой.

6. Найдём производную: $y' = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$. Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точек $x = 2$ и $x = -2$, где она не существует (в этих точках и сама функция н существует). Функция монотонно убывает всюду, где она определена.

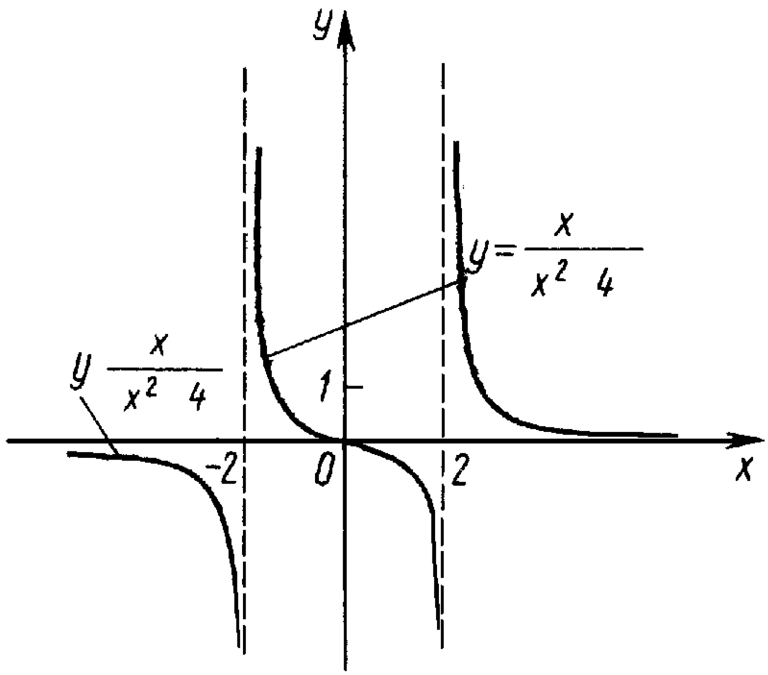
7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} > 0$, откуда $-2 < x < 0$, $x > 2$; $y'' < 0$, откуда $x < -2$, $0 < x < 2$.

Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $x = 0$. Из схемы следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб (это следует также и из нечётности функции). На интервалах $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$ — выпукла вверх. Найдём ординату точки перегиба: $y_{пер} = 0$.



8. Полезно провести эскизирование этого графика. Так как $y = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$, то при $x \to 0$ имеем $y \sim -4x$; при $x \to 2$ получим $y \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}$; при $x \to -2$ находим $y \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2}$; при $x \to \infty$ имеем $y \sim \frac{1}{x} \to 0$.

Таким образом, становится понятным поведение функции при $x = 0$, в окрестности точек разрыва и на бесконечности. График функции изображён на рисунке.



Пример 5. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = -1$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0; 0)$.

Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

5. Функция имеет разрыв в точке $x = -1$.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1-} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отсюда следует, что в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода. Прямые $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

Найдём параметры наклонной асимптоты:

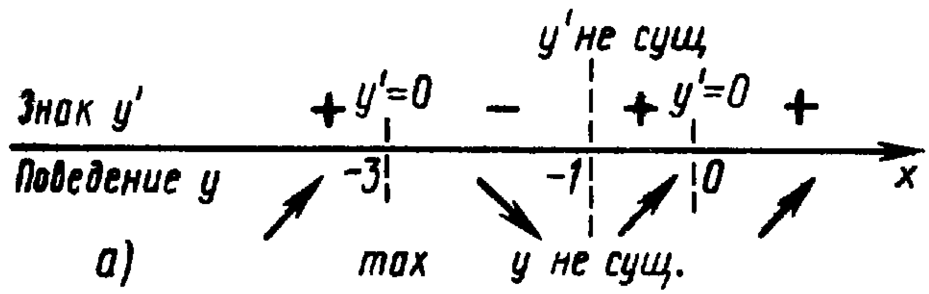
$$k = \lim_{x\to\infty} yx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = -1.$$

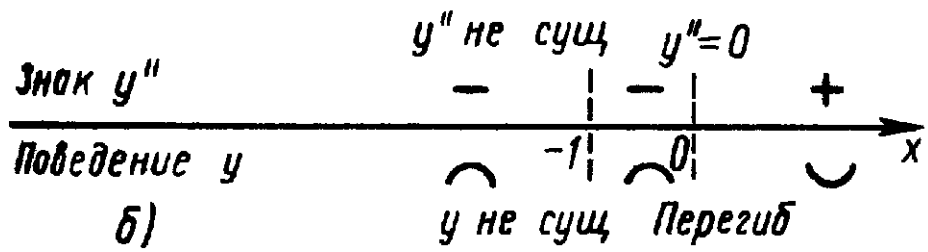
Уравнение наклонной асимптоты: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

6. Найдём производную: $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Решаем неравенства: $y' > 0$ и $y' < 0$. Имеем: $y' > 0$ или $\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} > 0$, откуда $x < -3$, $-1 < x < 0$, $x > 0$; $y' < 0$, откуда $-3 < x < -1$. На интервалах $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция монотонно возрастает, на интервале $(-3; -1)$ — монотонно убывает.

Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $x = 0$, $x = -3$. Из схемы (рис. а)) следует, что в точке $x = -3$ функция имеет максимум, а в точке $x = 0$ экстремума нет. Найдём ординату точки максимума: $y_{max} = -3\frac{3}{8}$.



7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$. Вторая производная положительна на интервале $(0; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$. Критическая точка второго рода — $x = 0$. Из схемы (рис. б)) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз. Ордината точки перегиба $y_{пер} = 0$.



8. График функции изображён на рис. в).

Пример 6. Провести полное исследование и построить график функции $y = e^{\frac{1}{x-1}}$.

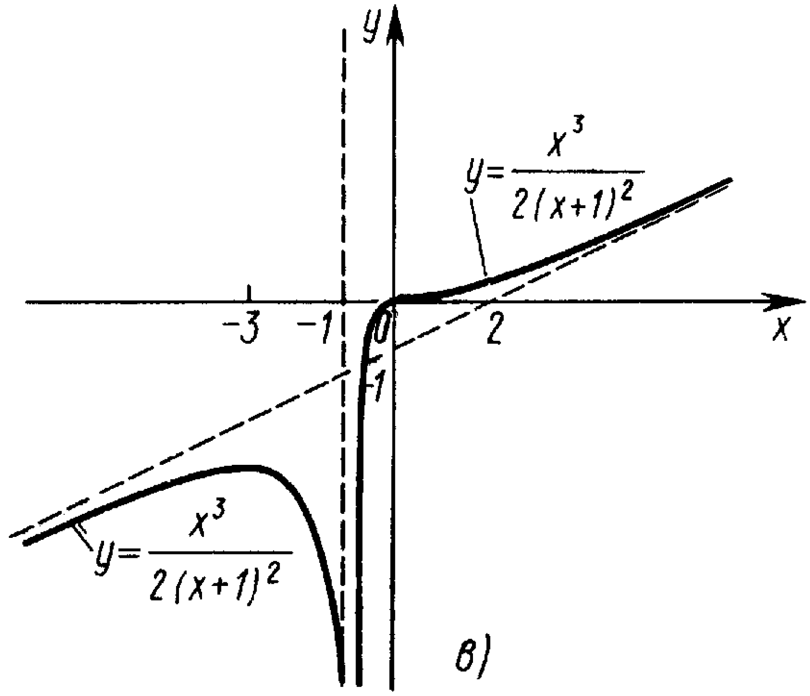
Решение. 1. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = 1$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция не имеет нулей. Она положительна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Функция пересекается с осью Oy в точке $\left(0; \frac{1}{e}\right)$.

5. Функция имеет разрыв в точке $x = 1$.



Поведение функции на границе области определения:

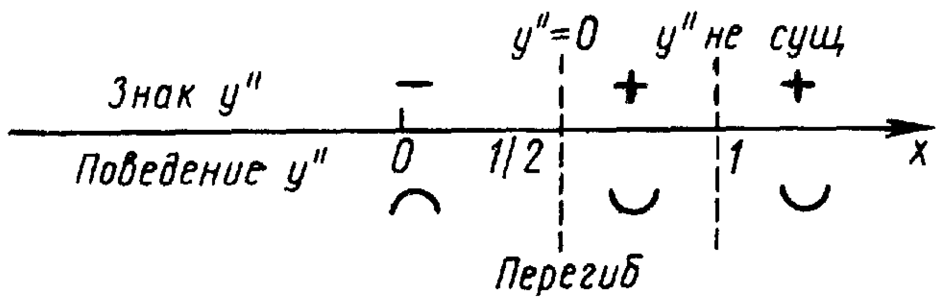
$$\lim_{x\to-\infty} = e^{\frac{1}{x-1}} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} = e^{\frac{1}{x-1}} = 1,$$

$$\lim_{x\to1-} = e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x\to1+} = e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

Отсюда следует, что в точке $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, прямая $y = 1$ — горизонтальной асимптотой.

6. Найдём производную: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$. Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Следовательно, функция монотонно убывает всюду, где она определена.

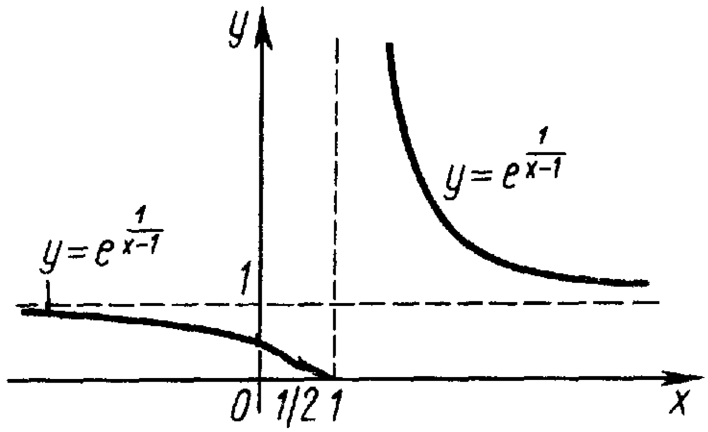
7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2x-1}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}$. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{2x-1}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, откуда $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$; $y'' < 0$, откуда $x < \frac{1}{2}$.



Приравнивая вторую производную нулю, найдём критическую точку второго рода: $x = \frac{1}{2}$. Из схемы следует, что на интервалах $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ и $(1; +\infty)$

функция выпукла вниз, а на интервале $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ — выпукла вверх. Таким образом, в точке $x = \frac{1}{2}$ функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба $y_{пер} = e^{-2} \approx 0,135$.

8. График функции изображён на рисунке.



Задачи для самостоятельного решения

Провести полное исследование и построить график функции:

707. $y = x^3 - 3x$;
708. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;
709. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;
710. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$;
711. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;
712. $y = \frac{x^4}{4} + x^3$;
713. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$;
714. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$;
715. $y = 3x^5 - 5x^3$;
716. $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$;
717. $y = (x^2 - 1)^3$;
718. $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$;
719. $y = x + 2\sqrt{-x}$;
720. $y = x\sqrt{1 - x}$;
721. $y = \frac{6\sqrt{x}}{x+2}$;
722. $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$;
723. $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$;
724. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;
725. $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$;
726. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$;

727. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
728. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} - (x+2)^{\frac{2}{3}}$;
729. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}$;
730. $y = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$;
731. $y = x(x-1)^{\frac{2}{3}}$;
732. $y = \frac{x}{1-x^2}$;
733. $y = \frac{x}{x^2-4}$;
734. $y = \frac{x}{x^2+1}$;
735. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;
736. $y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$;
737. $y = \frac{x-1}{(x-2)(x-5)}$;
738. $y = \frac{x}{(x-1)(4-x)}$;
739. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;
740. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$;
741. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;
742. $y = \frac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$;
743. $y = \frac{x^2-x+1}{3x-x^2-3}$;
744. $y = xe^{-\frac{x}{2}}$;
745. $y = (x+1)e^{-x}$;
746. $y = x^2e^{-x}$;
747. $y = (x+4)^2e^{-\frac{x}{2}}$;
748. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
749. $y = xe^{\frac{3-x^2}{2}}$;
750. $y = (1-x)e^{x}$;
751. $y = (x-2)^2e^{x}$;
752. $y = x^3e^{x}$;
753. $y = x^3e^{-x}$;
754. $y = \frac{e^x}{x}$;
755. $y = \frac{e^x}{x-2}$;
756. $y = \frac{e^x}{4(1-x)}$;
757. $y = \frac{e^x}{(1-x)^2}$;
758. $y = \frac{e^{-x}}{x^2-3}$;
759. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;
760. $y = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;
761. $y = \frac{2}{e^x(x+3)}$;

762. $y = x^2 e^{-x^2}$;
763. $y = x \ln x$;
764. $y = x - \ln x$;
765. $y = x \ln^2 x$;
766. $y = x^2 \ln^2 x$;
767. $y = \frac{\ln x}{x}$;
768. $y = x^2 \ln x$;
769. $y = \frac{1+\ln x}{x}$;
770. $y = \frac{x}{\ln x}$;
771. $y = \frac{x}{\ln |x|}$;
772. $y = -\frac{\ln x}{x^2}$;
773. $y = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$;
774. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$;
775. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
776. $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$;
777. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;
778. $y = 2x + \frac{1}{x^2}$;
779. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$;
780. $y = \frac{x^3}{1+x^2}$;
781. $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$;
782. $y = \frac{(x-2)^2}{2(x-1)}$;
783. $y = x + \operatorname{arctg} x$;
784. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
785. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$;
786. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$;
787. $y = x - \operatorname{arctg} 2x$;
788. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$;
789. $y = (x+2) e^{\frac{1}{x}}$;
790. $y = 1 + x e^{\frac{2}{x}}$;
791. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$;
792. $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$;
793. $y = \sqrt[3]{x(1+x^2)}$;
794. $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2}$;
795. $y = x - 2 \operatorname{tg} x$;
796. $y = x + \sin 2x$;
797. $y = \sqrt[3]{x(2-x^2)}$.

Приложение

Таблица преобразований графика функции	
Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком функции $y = f(x)$
$f(x) + b,\ b \neq 0$	$b > 0\ \Rightarrow$ сдвиг вверх на b единиц $b < 0\ \Rightarrow$ сдвиг вниз на $\|b\|$ единиц
$f(x + a),\ a \neq 0$	$a > 0\ \Rightarrow$ сдвиг влево на a единиц $a < 0\ \Rightarrow$ сдвиг вправо на $\|a\|$ единиц
$kf(x),\ k > 0,\ k \neq 1$	$k > 1\ \Rightarrow$ растяжение в k раз вдоль оси Oy $0 < k < 1\ \Rightarrow$ сжатие в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Oy
$f(kx),\ k > 0,\ k \neq 1$	$k > 1\ \Rightarrow$ сжатие в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox $0 < k < 1\ \Rightarrow$ растяжение в k раз вдоль оси Ox
$f(-x)$	симметричное отражение относительно оси Oy
$-f(x)$	симметричное отражение относительно оси Ox
$\|f(x)\|$	1) всё, что ниже оси Ox симметрично отражается наверх; 2) всё, что выше оси Ox (включая точки на оси), остаётся
$f(\|x\|)$	1) всё, что левее оси Oy, исчезает; 2) всё, что правее оси Oy (включая точку на оси), остаётся; 3) правая часть симметрично относительно оси Oy отражается налево

См. также §2.

Таблица производных			
	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Примечание
1	c	0	c — число
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	α — число
3	e^x	e^x	
4	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
6	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
7	$\sin x$	$\cos x$	
8	$\cos x$	$-\sin x$	
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
15	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
16	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
17	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
18	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	

См. также пункт 7.2.

Таблица эквивалентностей при $x \to 0$
$\sin x \sim x$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
$\operatorname{tg} x \sim x$
$\arcsin x \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\ln(1+x) \sim x$
$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$

См. также §5.

Таблица эквивалентностей при $x \to a$ $\lim\limits_{x\to a} t(x) = 0$
$\sin t(x) \sim t(x)$
$1 - \cos t(x) \sim \frac{t^2(x)}{2}$
$\operatorname{tg} t(x) \sim t(x)$
$\arcsin t(x) \sim t(x)$
$\operatorname{arctg} t(x) \sim t(x)$
$e^{t(x)} - 1 \sim t(x)$
$a^{t(x)} - 1 \sim t(x) \ln a$
$\ln(1+t(x)) \sim t(x)$
$\log_a(1+t(x)) \sim \frac{t(x)}{\ln a}$
$(1+t(x))^m - 1 \sim m \cdot t(x)$

См. также §5.

Ответы

Глава II

221. -1. **222.** 10. **223.** $\frac{2}{3}$. **224.** 1. **225.** $\frac{1}{5}$. **226.** $\frac{1}{2}$. **227.** 1.
228. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **229.** -8. **230.** $\frac{1}{6}$. **231.** -12. **232.** -1. **233.** $-\sqrt{2}$.
234. 3. **235.** $\frac{1}{2}$. **236.** $-\frac{5}{2}$. **237.** 0. **238.** ∞. **239.** $\frac{1}{3}$. **240.** $\frac{1}{9}$.
241. 1. **242.** 3. **243.** 1. **244.** -1. **245.** 3. **246.** 0. **247.** $-\frac{1}{3}$.
248. $\sqrt{2}$. **249.** -2. **250.** 1. **251.** $-\frac{1}{2}$. **252.** 2. **253.** 3. **254.** $-\frac{3}{2}$.
255. $-\frac{1}{2}$. **256.** 0. **257.** $\frac{1}{2}$. **258.** $\frac{15}{2}$. **259.** $\frac{1}{2}$. **260.** 0. **261.** ∞.
262. $-\frac{1}{12}$. **263.** $\frac{2}{9}$. **264.** 4. **265.** $\frac{4}{5}$. **266.** $-\frac{10}{9}$. **267.** 0.
268. 4. **269.** 2. **270.** 14. **271.** $\frac{1}{2}$. **272.** $\frac{1}{2}$. **273.** $-\frac{1}{2}$. **274.** $\frac{1}{6}$.
275. $-2\sin a$. **276.** 1. **277.** $\cos b$. **278.** 1. **279.** x. **280.** $\frac{n^2-m^2}{2}$.
281. $-\frac{1}{3}$. **282.** $\frac{5}{8}$. **283.** $\frac{8}{7}$. **284.** -6. **285.** $\frac{5}{12}$. **286.** $-\frac{2\ln 2}{5}$.
287. $\frac{8}{15}$. **288.** $\frac{5}{3}$. **289.** $\frac{1}{6}$. **290.** $\frac{3}{5}$. **291.** $-\frac{1}{54}$. **292.** $\frac{1}{e}$. **293.** $\frac{1}{10\ln 10}$.
294. -1. **295.** $\frac{a^2}{b^2}$. **296.** $-\frac{\pi^2}{2}$. **297.** $\frac{1}{2\ln 2}$. **298.** 1. **299.** $64\ln 4$.
300. $\ln\frac{3}{2}$. **301.** 1. **302.** 2. **303.** -2. **304.** 2. **305.** $2\frac{\ln 7}{\ln 10}$. **306.** $\frac{3}{5}$.
307. $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. **308.** 0. **309.** $4\ln 3$. **310.** $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. **311.** $5^5\ln 5$. **312.** $\frac{1}{5}$.
313. $-\frac{1}{2}$. **314.** $\frac{1}{3\ln 2}$. **315.** $\frac{1}{2e}$. **316.** $\frac{1}{3\ln 3}$. **317.** e^2. **318.** e.
319. e^{-2}. **320.** e^4. **321.** 1. **322.** $e^{-\frac{a^2}{2}}$. **323.** $\frac{1}{e}$. **324.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **325.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$.
326. $e^{\operatorname{ctg} 2}$. **327.** 4. **328.** -2. **329.** e^4. **330.** e^{-2}. **331.** $e\sqrt[3]{2}$.
332. $\frac{1}{e}$. **333.** e^{-6}. **334.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **335.** $+\infty$. **336.** $e^{-\frac{1}{\pi}}$. **337.** e^{-2}.
338. $-\frac{49}{2}$. **339.** 3. **340.** $\frac{1}{2}$. **341.** -3. **342.** 3. **343.** -1. **344.** $\frac{3}{2}$.
345. $-\frac{1}{5}$. **346.** $\frac{3}{4}$. **347.** $-\frac{8}{9}$. **348.** $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$. **349.** $-\frac{2}{\ln 2}$. **350.** $\frac{1}{2}$.
351. $e^{-\frac{49}{2}}$. **352.** 1. **353.** -1. **354.** $\frac{a}{b}2^{a-b}$. **355.** $\sqrt{e}$. **356.** $\frac{8}{7}$.
357. 12. **358.** $\ln 2$. **359.** -5. **360.** -1. **361.** $-12\ln 3$. **362.** $-\frac{9\ln 3}{8}$.
363. $-\frac{5}{4\ln 2}$. **364.** $-160\ln 2$. **365.** -1. **366.** $-0,1$. **367.** $\frac{1}{108}$. **368.** $\frac{1}{3}$.
369. $-\frac{9}{\ln 3}$. **370.** $2\sqrt{5}\cos 5$. **371.** $\frac{\pi}{7}$. **372.** $\frac{1}{7}$. **373.** $\frac{1}{6\pi}$. **374.** $-\frac{8\ln 2}{\pi}$.
375. $-2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$. **376.** $-\frac{2}{3\pi}$. **377.** $-\frac{1}{\pi}$. **378.** $\frac{6}{13}$. **379.** $-\frac{\pi\ln 3}{6}$.

Глава III

380. $2x$. **381.** $3x^2$. **382.** $4x^3$. **383.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **384.** $-\frac{2}{x^3}$. **385.** $-\frac{3}{x^4}$. **386.** $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.
387. $2\cos 2x$. **388.** $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **389.** $\frac{1}{\cos^2 x}$. **390.** $-\frac{2}{(2x+1)^2}$. **391.** $-\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$.
392. $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **393.** $2(2x^2+3x-1)$. **394.** $49x^6+6x-4$. **395.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}$.

396. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{10}{x^3} + \frac{9}{x^4}$. **397.** $20x^4 - 3\cos x - \frac{5}{\sin^2 x}$. **398.** $\frac{3}{2\sqrt{x}} - 4\sin x - \frac{2}{\cos^2 x}$.
399. $8x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \cos x - \sin x + \frac{1}{x}$. **400.** $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}} - 24x^5 + \frac{5}{x} + 7\sin x - \frac{4\,\mathrm{ctg}\,2x}{\sin 2x}$.
401. $\frac{\ln 24}{x\ln 2\cdot\ln 3}$. **402.** $4e^x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **403.** $e^x - \frac{1}{2\cos^2 x} + x^3$.
404. $5^x\ln 5 + 6^x\ln 6 - 7^{-x}\ln 7$. **405.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$. **406.** $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.
407. $\frac{4}{\sin^2 2x}$. **408.** $\frac{2}{1+x^2}$. **409.** $\sin x + x\cos x$. **410.** $\frac{x(\sin 2x+x)}{\cos^2 x}$.
411. $\frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^5}}$. **412.** $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **413.** $\frac{\mathrm{arcctg}\,x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. **414.** $\frac{x(2\ln x+1)}{\ln 3}$.
415. $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$. **416.** $\frac{\sin x - x^2 + x\cos x(\sin x - \ln x)}{x\sin^2 x}$. **417.** $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. **418.** $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$.
419. $-\frac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x}\sin^2 x}$. **420.** $\frac{(1+x^2)(\sin x\cos x+x) - x^2\sin 2x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$. **421.** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. **422.** 1, 0, 4.
423. $\pm\frac{33}{8}$. **424.** $-1,\ -\frac{1}{9},\ -\frac{1}{25}$. **425.** $-\frac{\ln 10}{2}$. **426.** $0,\ 2e^2,\ -e^{-4}$.
427. 1, 2, 0, −1. **428.** $3\cos 3x$. **429.** $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$. **430.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
431. $-\frac{5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$. **432.** $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. **433.** $\sin 2x$. **434.** $3\sin^2 x\cos x$.
435. $-100\cos^{99} x\sin x$. **436.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **437.** $\frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}$. **438.** $-\mathrm{tg}\,x$.
439. $\frac{10}{\sin 10x}$. **440.** $-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$. **441.** $\frac{e^{\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}$. **442.** $\frac{2x-3}{x^2-3x+7}$. **443.** $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$.
444. $\frac{1}{x^2+5}$. **445.** $\frac{1}{3+x^2}$. **446.** $\frac{x}{\sqrt{3-x^4}}$. **447.** $\frac{1}{x^2-9}$. **448.** $\frac{2}{x(1-x^2)}$. **449.** $\frac{2}{1-4x^2}$.
450. $\sqrt{1-x^2}$. **451.** $\mathrm{arctg}\,x$. **452.** $e^x\cos x$. **453.** $\mathrm{arctg}\,\sqrt{2x-1}$. **454.** $3\,\mathrm{tg}^4 x$.
455. $3x^2\sin 2x^3$. **456.** $-\frac{\cos^2\frac{x}{3}}{\sin^4\frac{x}{3}}$. **457.** $\frac{5}{8}\frac{\sin 2x}{\cos^{11} 2x}$. **458.** $-\sin 4x$. **459.** $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$.
460. $-\frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}$. **461.** $3\cdot 2^{3x}\ln 2 + 5x^4 - 2xe^{-x^2} - \frac{1}{x^2}$. **462.** $\frac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.
463. $xe^{-x}(2-x)$. **464.** $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$. **465.** $\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{3}\right)$.
466. $e^{\frac{1}{\cos x}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. **467.** $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$. **468.** $10^{3-\sin^3 2x}\ln 10\cdot(-3\sin 2x\sin 4x)$.
469. $2^x\ln 2\cos 2^x$. **470.** $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$. **471.** $\frac{2e^2x}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **472.** $\frac{2}{e^{4x}+1}$.
473. $\frac{\mathrm{ctg}\,x\ln\cos x + \mathrm{tg}\,x\ln\sin x}{(\ln\cos x)^2}$. **474.** $-\frac{7\,\mathrm{tg}\,7x}{\ln 5}$. **475.** $-\frac{\mathrm{tg}\,\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\cdot\ln 7}$. **476.** $\frac{2e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt[7]{x^5}}$.
477. $-\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$. **478.** $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$. **479.** $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **480.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
481. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **482.** $-\frac{1}{x-4x^2}$. **483.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. **484.** $\frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}$. **485.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.
486. $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. **487.** $\frac{4e^2x}{1-e^{8x}}$. **488.** $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x^2+1}$. **489.** $-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}$.
490. $\frac{5}{(5x+3)(1+\ln^2(5x+3))}$. **491.** $-\frac{3}{x^2+9}$. **492.** $\frac{2\,\mathrm{arcctg}\,\frac{1}{x}}{1+x^2}$. **493.** $\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$.
494. $-\frac{\sin x\cos(\cos x)}{\cos^2(\sin(\cos x))}$. **495.** $\frac{xe^{x^2\,\mathrm{ctg}\,3x}}{\sin^2 3x}(\sin 6x - 3x)$. **496.** $-\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\left(\mathrm{tg}\,e^{-\frac{x}{2}}\right)\cdot\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\cos^2\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)}$.
497. $5\,\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln^4\sin x$. **498.** $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{1+x^2}}$. **499.** $\frac{1}{20}\frac{\mathrm{ctg}\,\frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4\sin\frac{x+3}{4}}}$.
500. $\frac{e^{\sqrt{1+\ln x}}}{2x\sqrt{1+\ln x}}$. **501.** $\frac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\sqrt[5]{\mathrm{arctg}^4 e^{5x}}}$. **502.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\arccos^2 x}}$. **503.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$.

504. $\frac{1}{1+x+x^2}$. **505.** $\frac{9(x^2+1)}{x^4-9}$. **506.** $\frac{4x-5}{x^2+5}$. **507.** $\operatorname{arctg} x$. **508.** $\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$. **509.** $\frac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\frac{x}{1-x^2}$. **510.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. **511.** $x^{\sin x}\cos x\ln x+x^{\sin x-1}\sin x$. **512.** $(\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos x}\right)$. **513.** $(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$. **514.** $5x^4dx$. **515.** $\frac{dx}{\cos^2 x}$. **516.** $3\sin 2x\sin 4x\,dx$. **517.** $\frac{dx}{x}$. **518.** $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$. **519.** $-\frac{\operatorname{tg} x\cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$. **520.** $-2x\cdot 2^{-x^2}\ln 2\,dx$. **521.** $4\,dx$. **522.** $3\,dx$. **523.** $-\frac{3}{\sqrt{10}}dx$. **524.** 0. **525.** $-dx$. **526.** $-2e\,dx$. **527.** $\frac{1}{4}dx$. **528.** $\frac{dx}{6\sqrt{11}}$. **529.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **530.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **531.** $\frac{x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$. **532.** $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$. **533.** $-\frac{4}{(2x-3)^2}$. **534.** $\frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$. **535.** $e^{-x}(3-x)$. **536.** $(6-x^2)\cos x-6x\sin x$. **537.** $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6)$. **538.** e^x. **539.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. **540.** $3^x(\ln 3)^n$. **541.** $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ при $m\geqslant n$ и 0 при $m<n$. **542.** $3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **543.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. **544.** $2^{3x}(3\ln 2)^n$. **545.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **546.** $2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **547.** $-\frac{(n-1)!3^n}{(2-3x)^n}$. **548.** $4^n n!$. **549.** $-x\cos x-10\sin x$. **550.** $(5^{37}(x^3-1)+111\cdot 5^{36}x^2+3996\cdot 5^{35}x+46620\cdot 5^{34})e^{5x}$. **551.** $\frac{x^2}{3^{73}}\cos\frac{x}{3}+\frac{146x}{3^{73}}\sin\frac{x}{3}-\frac{584}{3^{69}}\cos\frac{x}{3}$. **552.** $-\frac{2\cdot 97!}{x^{98}}$. **553.** $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}(dx)^2$. **554.** $-2\cos 2x(dx)^2$. **555.** $\frac{2x}{(1+x^2)^2}(dx)^2$. **556.** $-2e^x(\cos x+\sin x)(dx)^3$. **557.** $-\frac{1}{x^2}(dx)^3$. **558.** $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)(dx)^n$. **559.** $\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)(dx)^n$. **560.** $\frac{1}{2^n}e^{\frac{x}{2}}(dx)^n$. **561.** $\frac{2}{3}\operatorname{ctg} t$, $\frac{2}{9\sin^3 t}$. **562.** $\frac{t^2-1}{2t}$, $\frac{1+t^2}{4t^3}$. **563.** $\frac{3}{2}e^t$, $\frac{3}{4e^t}$. **564.** $\frac{3t^2+1}{2t}$, $\frac{3t^2-1}{4t^3}$. **565.** $-\operatorname{tg} t$, $\frac{1}{12\cos^4 t\sin t}$. **566.** $\frac{1-3t}{t-3}$, $\frac{8(t+1)^3}{(t-3)^3}$. **567.** $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$, $\frac{2(t^3+1)^4}{(1-2t^3)^3}$. **568.** $\frac{2x-y}{x-2y}$. **569.** $-\frac{2x+y}{x+2y}$. **570.** $-\frac{x}{y}$. **571.** $\frac{p}{y}$. **572.** $\frac{b^2x}{a^2y}$. **573.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **574.** $\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$. **575.** $-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. **576.** $\frac{1}{y^2}+1$. **577.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **578.** $\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$. **579.** $-\frac{y\sin^2 y}{1+x\sin^2 y}$. **580.** $\frac{2x-ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}}$. **581.** $\frac{x+y}{x-y}$. **582.** $-\frac{1+y^2}{y^2}$. **583.** $\frac{2(x+2y)^2}{3}+\frac{y}{x}$. **584.** $-\frac{a^2}{y^3}$. **585.** $\frac{2(y-a)}{(x-b)^2}$. **586.** $\frac{m(m+n)y}{n^2x^2}$. **587.** $-\frac{a^2}{y^3}$. **588.** $-\frac{R^2}{(y-\beta)^3}$. **589.** $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **590.** $-\frac{6a^2}{(x+2y)^3}$. **591.** $\frac{7}{3}$. **592.** $-\frac{7}{5}$. **593.** $\frac{9}{2}$. **594.** 3. **595.** $-\frac{1}{2}$. **596.** $\frac{1}{2}$. **597.** -2. **598.** $\frac{1}{3}$. **599.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **600.** $\frac{3}{2}$. **601.** 2. **602.** $\frac{1}{6}$. **603.** -4. **604.** 0. **605.** 0. **606.** 0. **607.** 1. **608.** 2. **609.** 0. **610.** 3. **611.** 0. **612.** 1. **613.** $\log_2 3$. **614.** 2. **615.** e. **616.** 4. **617.** 1. **618.** $\frac{1}{2}$. **619.** $\frac{1}{6}$. **620.** $-\frac{1}{5}$. **621.** $-\frac{1}{6}$. **622.** $\frac{1}{2}$. **623.** $\frac{1}{2}$. **624.** 0. **625.** $\frac{1}{128}$. **626.** 1. **627.** $\frac{\ln^2 2}{90}$. **628.** $\frac{2}{3}$. **629.** 0. **630.** 1. **631.** e^3. **632.** 1. **633.** 1. **634.** 1. **635.** $e^{-\frac{1}{6}}$. **636.** $\sqrt[3]{e}$. **637.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **638.** $e^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$.

Глава IV

639. Функция чётная. **640.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **641.** Функция чётная. **642.** Функция нечётная. **643.** Функция нечётная. **644.** Функция чётная. **645.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **646.** Функция нечётная. **647.** Функция нечётная. **648.** Функция нечётная. **649.** Функция чётная. **650.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **651.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **652.** $\frac{\pi}{2}$. **653.** 2π. **654.** 2π. **655.** $\frac{\pi}{3}$. **656.** 2π. **657.** π. **658.** $\frac{2\pi}{3}$. **659.** $\frac{\pi}{2}$. **660.** 3π. **661.** 2π. **662.** 0 — разрыв второго рода. **663.** 0 — разрыв первого рода (скачок). **664.** 0 — разрыв первого рода (скачок). **665.** 1 — разрыв первого рода (устранимый разрыв). **666.** $\frac{2n-1}{2}\pi$ (n — целое) — разрывы второго рода. **667.** -2, 2 — разрывы второго рода. **668.** -2 — разрыв первого рода (скачок). **669.** 2 — разрыв второго рода. **670.** 0 — разрыв второго рода. **671.** 0 — разрыв первого рода (устранимый разрыв). **672.** -2, 2 — разрывы первого рода (устранимые разрывы); 0 — разрыв второго рода. **673.** $x = 0$, $y = 1$. **674.** $y = 1$. **675.** $x = 0$, $y = -1$. **676.** $x = -\frac{1}{2}$, $y = -2$. **677.** $x = 0$, $y = x$. **678.** $x = -1$, $y = x - 1$. **679.** $x = 0$, $y = x - 1$. **680.** $x = -\frac{4}{7}$, $y = -\frac{5}{7}$. **681.** $y = x$. **682.** $y = -x$. **683.** Асимптот нет. **684.** $y = x + \pi$, $y = x - \pi$. **685.** $y = -\frac{\pi}{4}$; прямая $x = 5$ не асимптота. **686.** $y = 0$. **687.** $y = 2x$, $y = -2x$. **688.** $x = 0$, $y = x$. **689.** $x = 0$, $y = 1$. **690.** $x = 0$, $y = -x$. **691.** Асимптот нет. **692.** $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$. **693.** $x = 1$, $y = -\frac{x+1}{2}$. **694.** $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$. **695.** $x = 1$, $x = -1$, $y = -x$. **696.** $y_{min} = y(0) = -1$, $y_{max} = y(1) = 1$. **697.** $y_{min} = y(3) = -1$, $y_{max} = y(1) = 3$. **698.** $y_{min} = y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{56}{9}$, $y_{max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{88}{9}$. **699.** $y_{min} = y(0) = 1$, $y_{max} = y(1) = 8$. **700.** $y_{min} = y(-1) = 0$, $y_{max} = y(-2) = 17$. **701.** $y_{min} = y(-\pi) = -2\pi$, $y_{max} = y(\pi) = 2\pi$. **702.** $y_{min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **703.** $y_{min} = y(\pi) = -\frac{\pi(3+\pi^2)}{3}$, $y_{max} = y(0) = 0$. **704.** $y_{min} = y(1) = 2$, $y_{max} = y(0,1) = 10,1$. **705.** $y_{min} = y(1) = -1$, $y_{max} = y(-1) = \frac{1}{3}$. **706.** $y_{min} = y(1) = -1$, $y_{max} = y(e) = 0$.

Литература

[1] *Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Гуткин И. И., Павлов А. Л.* Сборник задач по математике // М.: “Наука”. 1992.

[2] *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Математический анализ. Часть1 // М.: “Высшая школа”. 2000.

[3] *Кузнецов Л. А.* Сборник задач по высшей математике // М.: “Высшая школа”. 1983.

[4] *Кузнецова, Щеглова.* Сборник задач по высшей математике // М.: Издательство Московского университета. 1983.

[5] *Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П.* Справочное пособие по высшей математике. Часть 1 // М.: “УРСС”. 1997.

[6] *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике // М.: Издательство Физико-математической литературы. 2000.

[7] *Мордкович А. Г., Солодовников А. С.* Математический анализ // М.: “Высшая школа”. 1990.

[8] *Райхмист Р. Б.* Графики функций // М.: “Высшая школа”. 1991.

[9] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 // М.: “Наука”. 1970.

[10] *Шипачёв В. С.* Высшая математика // М.: “Высшая школа”. 1990.