

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению лабораторных работ

*для студентов II курса
направления 09.03.01
очной формы обучения*

Москва-2016

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

**Кафедра высшей математики
А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**ПОСОБИЕ
по выполнению лабораторных работ**

*для студентов II курса
направления 09.03.01
очной формы обучения*

Москва-2016

ББК 518
С17

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. О.Г. Илларионова

С17 Самохин А.В., Дементьев Ю.И.
Теория вероятностей и математическая статистика. Пособие по выполнению лабораторных работ. - М.: МГТУ ГА, 2016. - 20 с.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» по учебному плану направления 09.03.01 для студентов II курса очной формы обучения.

Пособие содержит образцы выполнения лабораторных работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» и необходимые для этого сведения по математической программе Maple.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 14.09.2016 г. и методического совета 25.10.2016 г.

Лабораторная работа №1

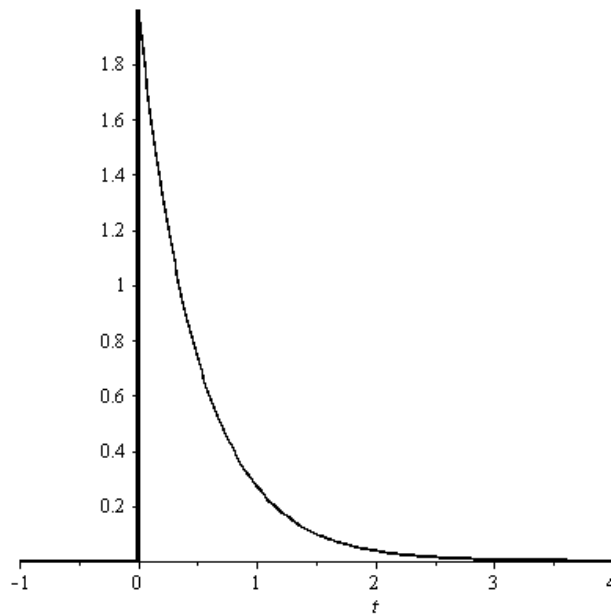
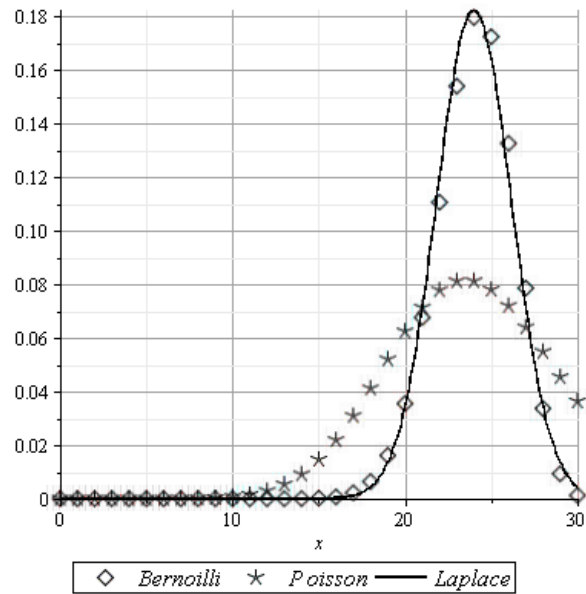
Сравнение асимптотических формул Пуассона и Лапласа для биномиального распределения. Повторные испытания с переменной вероятностью успеха

```

> n := 30; p := 0.8; q := 1 - p;
  #параметры биномиального (Бернулли) распределения
      n := 30
      p := 0.8
      q := 0.2
> R := pointplot( { seq( [ k,  $\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$  ], k = 0 ..n ) },
  gridlines = true, color = blue, symbolsize = 20, legend
  = Bernoilli ) #и его график
S := plot(  $\frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q} \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(x - n \cdot p)^2}{2 \cdot n \cdot p \cdot q}}$ , x = 0 ..30, color = red, legend
  = Laplace ); # Приближение Лапласа
T := pointplot( { seq( [ k,  $\frac{(n \cdot p)^k}{k!} e^{-n \cdot p}$  ], k = 0 ..n ) }, gridlines
  = true, color = green, symbol = asterisk, symbolsize = 20, legend
  = Poisson ) # Приближение Пуассона
> plots[display](R, S, T);
  # Сравнение приближений Пуассона и Лапласа с
  биномиальным распределением на графике
> λ := 2; #параметр показательного распределения

```

> plot(piecewise(t > 0, $\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, 0), t=-1..4);
 #График показательного распределения



$$> M_X := \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt;$$

Мат.ожидание и среднее квадратичное отклонение
 показательного распределения

$$M_X := \frac{1}{2}$$

$$> \sigma_X := \sqrt{\int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt - M_X^2}$$

$$\sigma_X := \frac{1}{2}$$

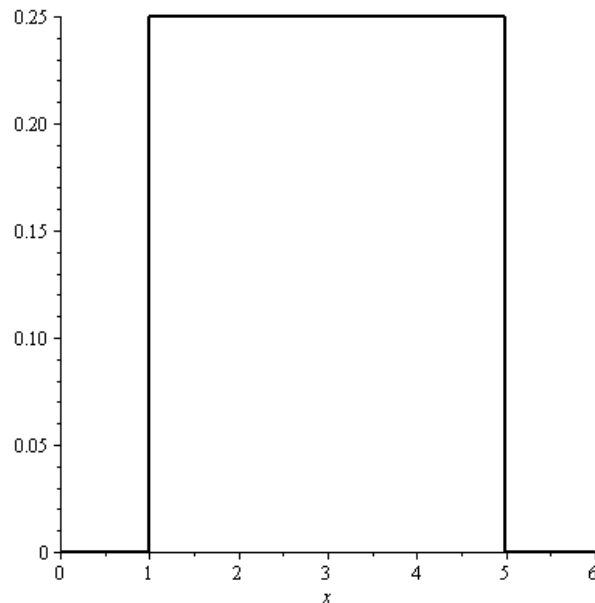
a := 1; b := 5; #параметры равномерного распределения

1

5

> plot(piecewise(x < b and x > a, $\frac{1}{(b-a)}$, 0), x = 0..6);

#График равномерного распределения



$$> M_Y := \int_a^b x \cdot \frac{1}{(b-a)} dx;$$

Мат.ожидание и среднеквадратичное отклонение
равномерного распределения

$$M_Y := 3$$

$$> \sigma_Y := \sqrt{\int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{(b-a)} dx - M_Y^2};$$

$$\sigma_Y := \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

$m := 5; \sigma := 1$

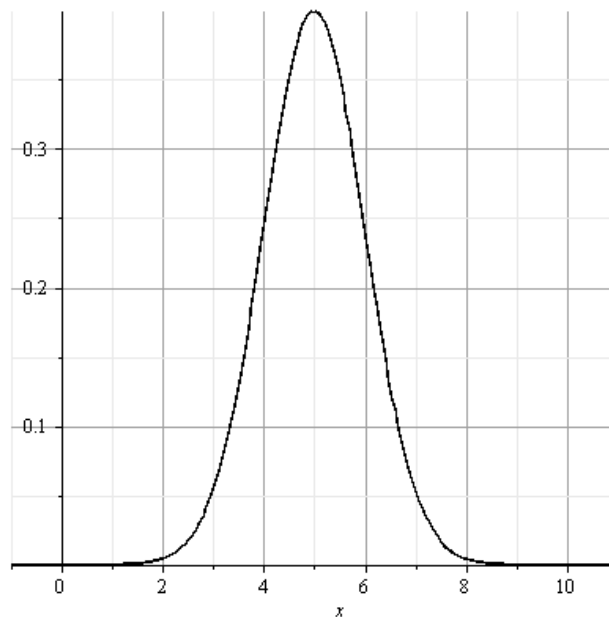
#параметры одномерного нормального Гауссового распределения $N(m, \sigma)$

5

1

> plot $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x=-1..11, \text{gridlines} = \text{true} \right);$

#График одномерного нормального распределения



> $M_Z := \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx;$

Мат.ожидание и среднеквадратичное отклонение Гауссового распределения

5

$\sigma_Z := \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx - M_Z^2}$

1


```
for i from 1 by 1 to 3 do evalf  $\left( \int_{m-i\cdot\sigma}^{m+i\cdot\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \right); od;$ 
```

```
#Правило 1,2,3 сигма
```

```
> m_x := 3; m_y := 6; sigma_x := 2; sigma_y := 1.5; r_xy := 0.8
```

```
#Параметры двумерного Гаусса
```

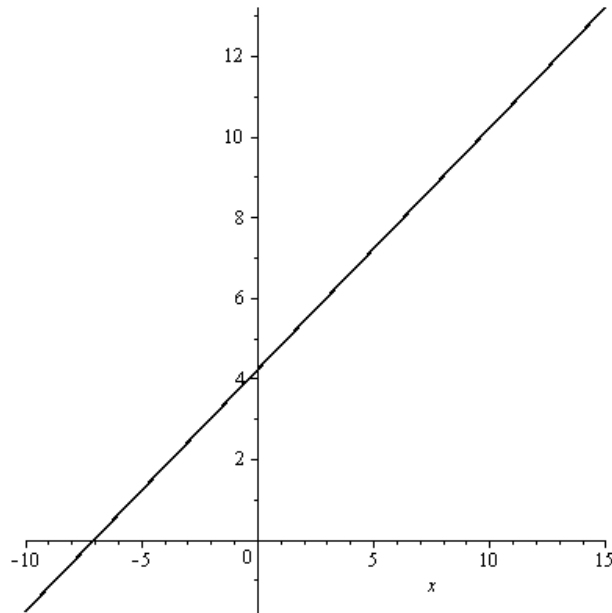
```
m_x := 3      m_y := 6      sigma_x := 2      sigma_y := 1.5      r_xy := 0.8
0.6826894920  0.9544997360  0.9973002039
```

```
plot3d  $\left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} + 2r_{xy} \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y} \right)} \right), x=-10$ 
```

```
..15, y=-5..15, axes = boxed, numpoints = 10000
```

```
#График двумерного нормального Гауссового распределения
```

```
> plot  $\left( m_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x), x = -10 .. 15 \right);$  #Линия регрессии
```



Если vwuts – последние 5 цифр номера зачётки\студенческого, то Индивидуальное задание:

$n=30$; $p=0.7+0.01s$; $\lambda=t$; $a=u$; $b=u+a+1$; $m=w$; $\sigma=v$

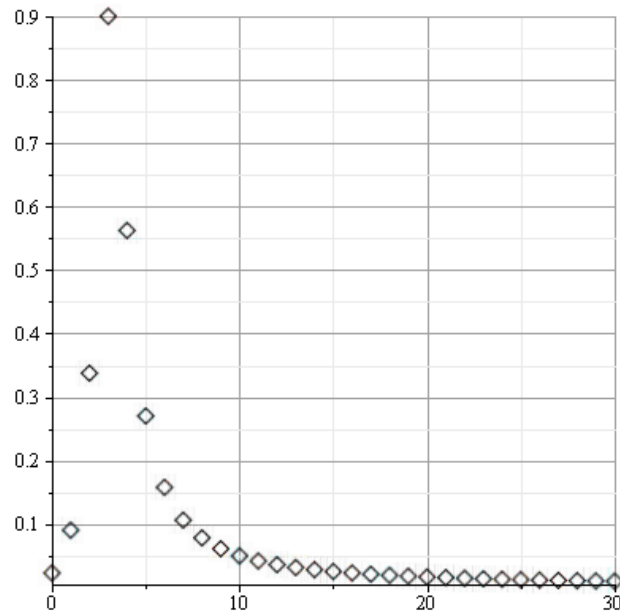
$m_x := m$; $m_y := m + 3$; $\sigma_x := \sigma$; $\sigma_y := 1.5 \sigma$; $r_{xy} := 0.7 + 0.02 s$

Схема повторных испытаний с переменной вероятностью успеха. Опционально!

$f := n \rightarrow \frac{0.225(n+1)}{1+(n-3)^2}$ #пример непостоянной вероятности

$$n \rightarrow \frac{0.225(n+1)}{1+(n-3)^2}$$

> pointplot({seq([x, f(x)], x=0..30)}, gridlines = true, color = blue, symbolsize = 20)



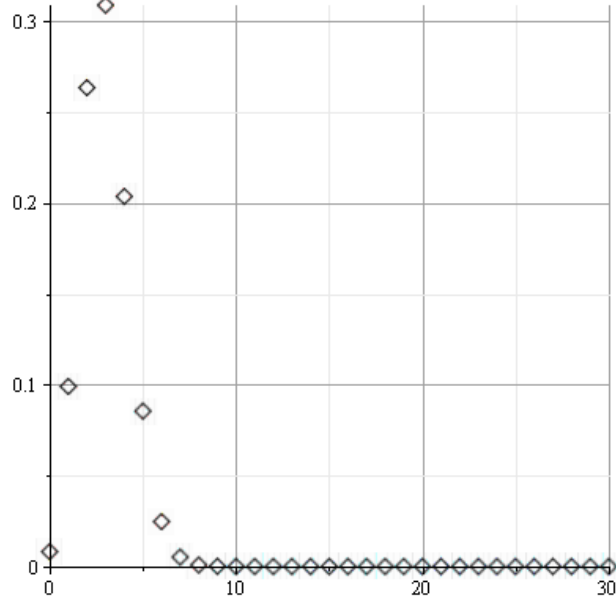
$$> \text{expand}\left(\prod_{k=1}^{30} (1-f(k) + z \cdot f(k))\right)$$

$$P_{30} := 1 \rightarrow \left(\frac{1}{1!} \frac{d^1}{dz^1} \text{expand}\left(\prod_{k=1}^{30} (1-f(k) + z \cdot f(k))\right) \right) \Bigg|_{z=0};$$

$P_{30}(3); \text{pointplot}(\{\text{seq}([x, P_{30}(x)], x = 0 .. 30)\}, \text{gridlines} = \text{true}, \text{color} = \text{blue}, \text{symbolsize} = 20)$

$$1 \rightarrow \left(\frac{\frac{\partial^1}{\partial z^1} \text{expand}\left(\prod_{k=1}^{30} (1 - f(k) + z f(k))\right)}{1!} \right) \Bigg|_{z=0}$$

0.3089807542



$M[ZETA]; \text{add}(j * P[30](j), j = 0 .. 30); \text{sigma}[ZETA] = \text{sqrt}(\text{add}((j - \%)^2 * P[30](j), j = 0 .. 30));$

M_Z

2.988353914

$\sigma_Z = 1.268906533$

Лабораторная работа №2

Статистическая обработка элементов выборки из двумерной генеральной совокупности и проверка гипотезы о законах распределения

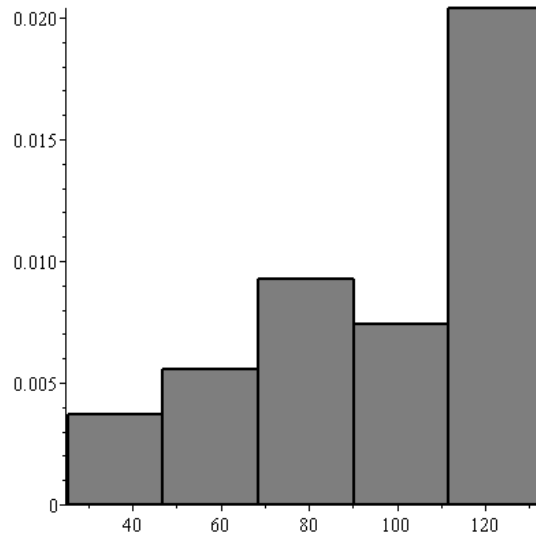
```
> restart
with(Statistics)
Digits := 4; N := 5; n := 25
                                4      5      25
X := vector(n) : Y := vector(n) :
Чтение данных из файла
A := readdata("0", 1);
#чтение данных из файла. Надо прописать путь к своему
#файлу. Обратите внимание на формат имени файла!!!

[25.43, 38.63, 34.23, 38.53, 47.62, 48.93, 53.28, 64.76, 51.09,
 68.37, 69.57, 65.57, 81.95, 79.03, 71.80, 82.68, 83.97, 87.92,
 89.93, 91.60, 99.13, 95.14, 98.98, 101.6, 102.8, 107.7, 112.7,
 106.1, 107.8, 117.4, 119.3, 116.4, 123.5, 121.6, 118.6, 119.9,
 119.5, 121.7, 125.0, 116.4, 122.8, 124.0, 131.4, 139.2, 128.4,
 137.1, 133.3, 131.6, 130.7, 143.4, 131.2, 131.1, 128.2, 157.6,
 148.6, 147.4, 137.6, 146.8, 145.2, 152.5, 137.5, 141.8, 146.6,
 150.6, 154.1, 143.8, 148.7, 151.1, 151.6, 149.0, 144.5, 145.8,
 140.3, 152.7, 157.4, 142.8, 150.7, 159.8, 153.0, 148.5, 167.9,
 153.8, 163.1, 155.4, 148.7, 154.6, 149.9, 155.7, 156.2, 172.1,
 159.0, 162.2, 138.0, 151.1, 144.5, 155.0, 151.8, 152.8, 161.5,
 154.3, 148.9, 157.2, 148.1, 151.9, 159.5, 154.6, 161.1, 164.1,
 140.6, 168.5, 155.5, 150.5, 153.0, 162.2, 158.9, 151.8, 155.4,
 166.0, 156.8, 146.9, 158.6, 155.4, 165.4, 157.3, 168.8, 158.6,
 148.8, 153.2, 161.8, 161.4, 157.1, 164.0, 160.6, 165.3, 156.1,
 154.4, 159.6, 161.8, 168.1, 156.4, 164.8, 161.2, 160.5, 158.5,
 162.8, 165.2, 157.2, 166.7, 157.4, 162.1, 159.8, 152.1, 157.9,
 166.2, 160.1, 168.6, 161.6, 157.4, 159.0, 156.4, 150.4, 148.7,
 154.9, 159.4, 155.9, 171.3, 154.1, 153.3, 166.5, 153.7, 151.4,
 165.1, 166.3, 153.4, 145.3, 163.2, 170.4, 162.3, 164.6, 154.2,
 154.6, 152.6, 170.4, 158.5, 160.3, 163.7, 164.8, 152.8, 167.7,
 166.3, 164.0, 161.1, 155.8, 167.6, 169.9, 164.4, 158.9, 157.5,
 171.0, 172.1]

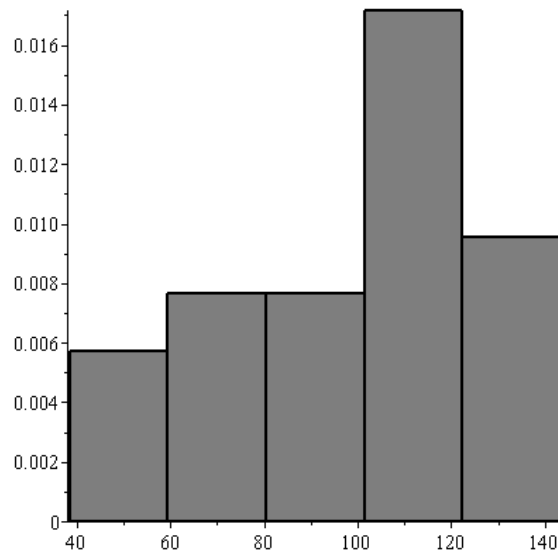
for i to 25 do X[i] := A2 i - 1 : Y[i] := A2 i : end do:
convert(X, list); a := min(%); b := max(%); convert(Y, list); c
:= min(%); d := max(%);
```

Графическое представление данных: гистограммы и облако точек
143.4

> Histogram(X, bincount = N); H := Histogram(X, bincount = N)



Histogram(Y, bincount = N); Y := Histogram(Y, bincount = N)



P := ScatterPlot(X, Y); plots[display](P)

Точечные оценки средних и среднеквадратичных отклонений X и Y

$$mX := \frac{\left(\sum_{k=1}^n X_k \right)}{n}; mY := \frac{\left(\sum_{k=1}^n Y_k \right)}{n}; i := 'i': \text{Mean}(X);$$

$$\text{Mean}(Y);$$

95.24

98.60

95.31

98.61

$$\text{sigmaX} := \sqrt{\frac{\left(\sum_{m=1}^n (X_m - mX)^2\right)}{n-1}};$$

32.89

$$\text{sigmaY} := \sqrt{\frac{\left(\sum_{l=1}^n (Y_l - mY)^2\right)}{n-1}};$$

31.06

StandardDeviation(X);

32.87

$$s_1 = \sqrt{\text{Variance}(X)};$$

Корреляция и прямая линейной регрессии

$s_1 = 32.86$

$$r_{XY} := \frac{\sum_{i=1}^{25} \frac{(X_i - mX) \cdot (Y_i - mY)}{\text{sigmaX} \cdot \text{sigmaY}}}{n};$$

0.9408

$$A_x := \frac{r_{XY} \cdot \text{sigmaY}}{\text{sigmaX}}$$

0.8884

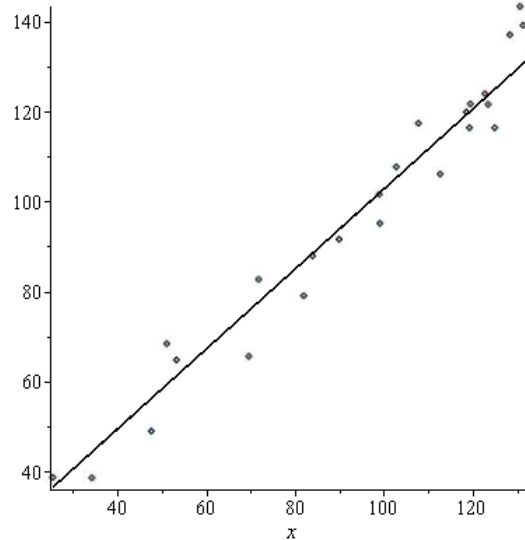
cov := Covariance(X, Y);

1000.

$$r_{XY} := \frac{\text{cov}}{\text{sigmaX} \cdot \text{sigmaY}}$$

0.9788

S := plot(Ax · (x - mX) + mY, x = a..b);
> plots[display](P, S);



Доверительные интервалы для средних и среднеквадратичных отклонений X и Y ($\alpha =$ значимость)

$\alpha := 0.05;$

0.05

$$t := \text{Quantile}\left(\text{StudentT}(n - 1), 1 - \frac{\alpha}{2}\right);$$

2.064

$$M_{\min} := \text{evalf}\left(mX - \frac{\text{sigmaX} \cdot t}{\sqrt{n}}\right);$$

81.66

$$M_{\max} := \text{evalf}\left(mX + \frac{\text{sigmaX} \cdot t}{\sqrt{n}}\right);$$

108.8

$$m(X) \in (M_{\min}, M_{\max})$$

$$\text{in}(m(X), 81.66, 108.8)$$

$$\chi := \text{Quantile}\left(\text{ChiSquare}(n - 1), 1 - \frac{\alpha}{2}\right);$$

39.36

$$\Delta_{\min} := \sqrt{\frac{(n - 1)\text{sigmaX}^2}{\chi}};$$

25.69

$$\chi := \text{Quantile}\left(\text{ChiSquare}(n - 1), \frac{\alpha}{2}\right);$$

12.40

$$\Delta_{\max} := \sqrt{\frac{(n-1)\sigma_X^2}{\chi}};$$

45.76

$$\sigma(X) \in (\Delta_{\min}, \Delta_{\max});$$

in($\sigma(X)$, 25.69, 45.76)

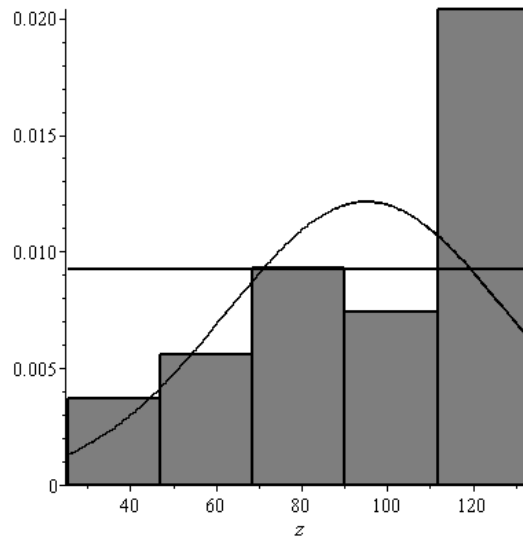
Проверка гипотезе о нормальном и равномерном законе распределения X

in($\sigma(X)$, 25.69, 45.76)

$$R := \text{plot}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(z-mX)^2}{2\cdot(\sigma_X)^2}}, z = a..b\right); L$$

$$:= \text{plot}\left(\frac{1}{b-a}, z = a..b, \text{color} = \text{green}\right)$$

> plots[display](L, R, H) # `Визуализация гипотез



> convert(X, set); # x-координаты в порядке возрастания

{25.43, 34.23, 47.62, 51.09, 53.28, 69.57, 71.80, 81.95, 83.97,
89.93, 98.98, 99.13, 102.8, 107.8, 112.7, 118.6, 119.3, 119.5,
122.8, 123.5, 125.0, 128.4, 130.7, 131.4, 133.3}

$$> h := \frac{(b-a)}{N}$$

h := 21.58

for k from 0 to N - 1 do print(a + k·h, a + (k + 1)·h)end do

Расчет границ интервалов на гистограмме X

25.43, 47.01

47.01, 68.59

68.59, 90.17

90.17, 111.8

111.8, 133.3

```

> for k from 0 to N - 1 do Vk+1 := evalf  $\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{(a+h\cdot k-mX)}{\text{sigmaX}}}{\frac{(a+h\cdot(k+1)-mX)}{\text{sigmaX}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$  end do;

```

Теоретические вероятности нормального распределения

 $V_1 := 0.05443 \quad V_2 := 0.1375 \quad V_3 := 0.2297 \quad V_4 := 0.2538 \quad V_5 := 0.1841$

Эмпирические частоты статистики на интервалах гистограммы X

 $PP := \left[\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}, \frac{8}{25} \right]$

В числителе i-той дроби- число точек, попавших в i-тый интервал, знаменатель равен n

 $\left[\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}, \frac{8}{25} \right]$
 $X_V := n \cdot \sum_{i=1}^N \frac{(PP_i - V_i)^2}{V_i}; \text{Quantile}(\text{ChiSquare}(N - 2 - 1), 1 - \alpha);$

5.122 5.991

 $X_V > \text{Quantile} \Rightarrow$ гипотеза нормальности отвергается
 $X_U := n \cdot N \cdot \left(\sum_{i=1}^N \left(PP_i - \frac{1}{N} \right)^2 \right); \text{evalf}(\%); \text{Quantile}(\text{ChiSquare}(N - 2 - 1), 1 - \alpha);$
 $X_U > \text{Quantile} \Rightarrow$ гипотеза равномерности отвергается
 $\frac{16}{5} \quad 3.200 \quad 5.991$

Проверка гипотезе о показательном законе распределения Y

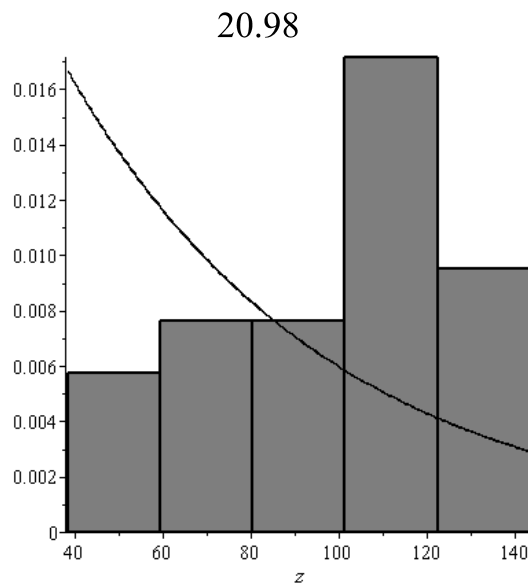
$$P := \text{plot}\left(\frac{1}{mY - c} e^{\frac{-z + c}{mY - c}}, z = c .. d\right);$$

> plots[display](P, Y) # `Визуализация гипотезы

> convert(Y, set); # у-координаты в порядке возрастания

{38.53, 38.63, 48.93, 64.76, 65.57, 68.37, 79.03, 82.68, 87.92,
91.60, 95.14, 101.6, 106.1, 107.7, 116.4, 117.4, 119.9, 121.6,
121.7, 124.0, 131.6, 137.1, 139.2, 143.4}

$$\eta := \frac{(d - c)}{N}$$



for k from 0 to N - 1 do print(c + k·η, c + (k + 1)·η)end do
Расчет границ интервалов на гистограмме X

Эмпирические частоты статистики на интервалах гистограммы Y

38.53, 59.51
59.51, 80.49
80.49, 101.5
101.5, 122.4
122.4, 143.4

$$QQ := \left[\frac{16}{25}, \frac{4}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{2}{25} \right]$$

В числителе i-той дроби- число точек, попавших в i-тый интервал, знаменатель равен n

$$\left[\frac{16}{25}, \frac{4}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{2}{25} \right]$$

for k from 0 to N - 1 do $W_{k+1} := e^{-\frac{k \cdot \eta}{-c + mY}} - e^{-\frac{(k+1) \cdot \eta}{-c + mY}}$ end

do

Теоретические вероятности показательного распределения

0.2948 0.2079 0.1467 0.1033 0.0728

$$X_W := n \cdot \sum_{i=1}^N \frac{(QQ_i - W_i)^2}{W_i}; \text{Quantile}(\text{ChiSquare}(N - 1 - 1), 1 - \alpha);$$

12.13 7.815

$X_W > \text{Quantile} \Rightarrow$ гипотеза отвергается

Statistics:-Quantile < 12.13 \Rightarrow гипотеза отвергается

Проверка гипотезе о равенстве средних X и Y

$$Q := \text{Quantile} \left(\text{StudentT}(2n - 2), 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

2.011

$$K := \frac{|mX - mY|}{\sqrt{\frac{(\text{sigmaX})^2}{n} + \frac{(\text{sigmaY})^2}{n}}}$$

0.3714

$K > Q \Rightarrow m(X) \neq m(Y); \text{verify}(K, Q, \text{greater_than});$

$2.011 < 0.3714 \Rightarrow m(X) \neq m(Y)$

false

Проверка гипотезе о равенстве среднеквадратичных отклонений X и Y
(дробь Q составляется таким образом, что в числителе стоит большее число!)

$$F := \frac{(\text{sigmaX})^2}{(\text{sigmaY})^2}$$

1.122

$$Q := \text{Quantile}\left(\text{FRatio}(n - 1, n - 1), 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

2.269

$F > Q \Rightarrow \sigma(X) \neq \sigma(Y)$; `verify(F, Q, greater_than)`

$$2.269 < 1.122 \Rightarrow \sigma(X) \neq \sigma(Y)$$

false

Проверка гипотезе о равенстве нулю коэффициента корреляции

$$G := \frac{\text{Quantile}\left(\text{StudentT}(n - 2), 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n - 2 + \left(\text{Quantile}\left(\text{StudentT}(n - 2), 1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}}; r_{XY}$$

0.3961
0.9788

$|r_{XY}| > G \Rightarrow r_{xy} \neq 0$; `verify(|rXY|, G, greater_than)`;

$$0.3961 < 0.9788 \Rightarrow r[xy] \neq 0$$

true

Подписано в печать 10.11.2016 г.

Печать офсетная
1,16 усл.печ.л.

Формат 60x84/16
Заказ № 117

0,87 уч.-изд. л.
Тираж 60 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел