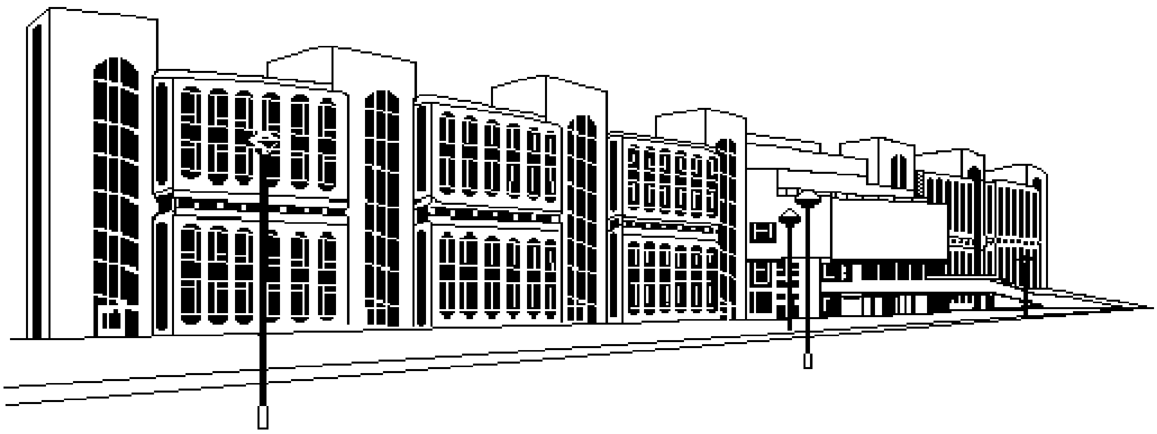
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

О.Г. Илларионова, Е.А. Жукова, П.Н. Бондарчук

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ



Москва - 2015

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

О.Г. Илларионова, Е.А. Жукова, П.Н. Бондарчук

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено Редакционно-
издательским советом МГТУГА
в качестве учебного пособия

Москва-2015

УДК 512:514 (075.8)
ББК 51
И44

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты: доцент В.А. Ухова (МГТУ ГА),
д.т.н., профессор А.В. Колесников (МАИ)

Илларионова О.Г., Жукова Е.А., Бондарчук П.Н.
И44 Математика. Алгебра и геометрия: учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 2015. - 80 с., 29 рис., лит.: 6 наим.

ISBN

Данное учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика. Алгебра и геометрия» для студентов первого курса направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» (бакалавр) очной формы обучения.

Пособие охватывает все темы, изучаемые в курсе «Математика. Алгебра и геометрия», и по объему соответствует лекционному курсу по этой дисциплине. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров. Пособие может быть полезно студентам первого курса других направлений и специальностей.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 15.09.2015 г. и методического совета 20.10.2015 г.

Учебное пособие издается в авторской редакции.

ББК 51

Доп. св. тем. план 2015 г.
поз. 33

ИЛЛАРИОНОВА Ольга Германовна, ЖУКОВА Евгения Александровна,
БОНДАРЧУК Петр Николаевич

МАТЕМАТИКА. АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ
Учебное пособие

Подписано в печать 15 г.

Печать офсетная	Формат 60x84/16	5,8 уч.-изд. л.
10 усл.печ.л.	Заказ № 40	Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а
ISBN

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов первого курса направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» (бакалавр) очной формы обучения и издаётся в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика. Алгебра и геометрия».

Пособие охватывает все темы, изучаемые в курсе, и по объему соответствует лекционному курсу по этой дисциплине. Изложение теоретического материала сопровождается примерами и ведется доступным, по возможности, языком. Особое внимание уделено теме «Алгебраические структуры», которая не всегда изучается в традиционном курсе алгебры в технических вузах и поэтому представлена не во всех учебниках по высшей математике для технических вузов. А изучение алгебраических структур является настоятельной необходимостью для будущих специалистов в области информационных технологий.

Алгебра достигла высокого уровня абстракции раньше других областей математики и уже давно стало привычным рассматривать ее как науку об алгебраических операциях, не зависимую от математических объектов, к которым эти операции могут применяться. Эта идеология полезна всем будущим специалистам в области информационных технологий. Например, в объектно-ориентированном программировании используются такие понятия, как «класс объектов» и «структура», сформированные и используемые в алгебре намного раньше, чем в информатике.

Кроме того, для успешного освоения различных прикладных дисциплин необходимо знание конкретных алгебраических структур. Так, для понимания различных криптографических протоколов, (например, RSA), надо иметь представление о сравнениях и кольце целых чисел. Вопросы помехоустойчивого кодирования требуют изучения таких структур, как группы и кольца классов вычетов по $mod\, m$.

Учебное пособие соответствует направленности и содержанию учебной рабочей программы по дисциплине.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезно и студентам других специальностей.

РАЗДЕЛ 1. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Определители и их свойства

1.1. Основные понятия и способы вычисления определителей

Квадратной матрицей A порядка n называется числовая таблица, состоящая из n строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Каждой квадратной матрице A по определенному закону ставится в соответствие число, называемое *определителем* или *детерминантом* матрицы.

Обозначается $det A$, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ или Δ.

Если $n=1$, то $A=(a_{11})$ и $det A = a_{11}$.

Если $n=2$, то $det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$.

Если $n=3$, то $det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Этот метод вычисления определителя третьего порядка называется *методом треугольников* и применяется только для вычисления определителей третьего порядка. Элементы, входящие в определитель со знаком «+» и со знаком «–», выбираются из определителя, как показано на рис.1.

Рис.1

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Например, для определителя третьего порядка

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}.$$

Еще один метод вычисления определителя третьего порядка – это разложение по строке или столбцу, например, *разложение по первой строке* производится по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} =$$

$$= a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

а разложение по второму столбцу:

$$\Delta = a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32} = -a_{12}\cdot M_{12} + a_{22}\cdot M_{22} - a_{32}\cdot M_{32}.$$

Для определителя третьего порядка существует всего 9 различных разложений.

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ двумя способами:

а) методом треугольников,

б) разложением по первой строке.

Решение.

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot5 + (-2)\cdot3\cdot2 + 4\cdot(-2)\cdot0 - 4\cdot1\cdot2 - (-2)\cdot(-2)\cdot5 - 3\cdot3\cdot0 =$

$= 15 - 12 + 0 - 8 - 20 - 0 = -25;$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 3\cdot (5-0) + 2\cdot (-10 - 6) + 4\,(0 - 2) = 15-32-8 = -25.$

Ответ: $\Delta = -25$.

Метод вычисления определителя разложением по строке или столбцу применим к определителям любого порядка, например, определитель 4-го порядка можно разложить по первой строке по формуле:

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14}.$$

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первой строке по формуле:

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14}.$$

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-8) + 0 + 0 - 3\cdot 5 = -31.$$

Ответ: $\Delta = -31$.

1.2. Свойства определителей (на примере определителей третьего порядка)

1. Определитель не изменится, если его *транспонировать*, то есть все его строки заменить на соответствующие столбцы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель умножится на (–1).

3. Определитель равен нулю, если:

а) все элементы какой-нибудь строки (или столбца) равны нулю;

б) соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны (в частности, равны).

4. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.

5. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

6. Определитель равен сумме произведения элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Свойства 1 – 6 верны для определителей любого порядка.

При вычислении определителя порядка $n \geq 4$ удобно, используя свойство 5, преобразовать его так, чтобы все элементы (кроме может быть одного) какой-нибудь строки (или столбца) были нулями, а затем разложить его по этой строке (или столбцу).

Пример 3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. С помощью второй строки получим нули в первом столбце определителя. Прибавим к первой строке вторую строку, умноженную на на (–3),

получим $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Далее, прибавляя к третьей строке вторую, умноженную на 2, а к четвертой вторую, умноженную на (–1), получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по первому столбцу

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогично с помощью первой строки получим нули в первом столбце определителя третьего порядка

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

И этот определитель разложим по первому столбцу, окончательно получим

$$\Delta = -(-1)\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 7\cdot(-10) = -70.$$

Ответ: $\Delta = -70$.

§ 2. Матрицы и действия над ними. Ранг матрицы

Матрица размера $m \times n$ – это прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Если $m = n$, то получаем квадратную матрицу.

Две матрицы одинаковой размерности $m \times n$ называются *равными*, если у них равны соответствующие элементы.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей. Обозначается буквой O.

2.1. Действия над матрицами

Матрицы можно умножать на числа, складывать и умножать между собой. Но сложение возможно только для матриц одинаковой размерности, а операция умножения двух матриц определена только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением числа α на матрицу A называется матрица, элементы которой получены умножением элементов матрицы A на число α.

Суммой (разностью) матриц A и B одинаковой размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B.

Операции сложения и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами*:

1. $A + B = B + A$ – коммутативность по сложению;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ – ассоциативность по сложению;
3. $A + O = A$;
4. $A + (-A) = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;

7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;

8. $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta A)$; где A, B, C – матрицы, α, β – числа.

Произведением матрицы A размера $m\times n$ на матрицу B размера $n\times p$ называется матрица размера $m\times p$, элемент которой, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Умножение матриц обладает следующими *свойствами:*

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$ – нет коммутативности по умножению;
2. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ – ассоциативность по умножению есть;
3. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
4. $\alpha\cdot(AB)=(\alpha A)\cdot B$;

Отсутствие коммутативности умножения (свойство 1) – очень важное свойство.

Пример 4. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 7\end{pmatrix}.$$

Найти матрицы $4\cdot A$, $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$, $A\cdot C$.

Решение.

$$4\cdot A=4\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3\\ 4\cdot 0 & 4\cdot 1 & 4\cdot(-2)\\ 4\cdot(-3) & 4\cdot 0 & 4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 0 & 4 & -8\\ -12 & 0 & 16\end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 2+3 & 3+(-2)\\ 0+1 & 1+4 & -2+0\\ -3+1 & 0+5 & 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 5 & -2\\ -2 & 5 & 5\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & 2-3 & 3-(-2)\\ 0-1 & 1-4 & -2-0\\ -3-1 & 0-5 & 4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 5\\ -1 & -3 & -2\\ -4 & -5 & 3\end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5 & 1\cdot(-2)+2\cdot0+3\cdot1\\ 0\cdot2+1\cdot1+(-2)\cdot1 & 0\cdot3+1\cdot4+(-2)\cdot5 & 0\cdot(-2)+1\cdot0+(-2)\cdot1\\ -3\cdot2+0\cdot1+4\cdot1 & (-3)\cdot3+0\cdot4+4\cdot5 & (-3)\cdot(-2)+0\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+2+3 & 3+8+15 & -2+0+3\\ 0+1-2 & 0+4-10 & 0+0-2\\ -6+0+4 & -9+0+20 & 6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&26&1\\-1&-6&-2\\-2&11&10\end{pmatrix},$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot(-1)+3\cdot7\\0\cdot3+1\cdot(-1)+(-2)\cdot7\\-3\cdot3+0\cdot(-1)+4\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2+21\\0-1-14\\-9+0+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\-15\\19\end{pmatrix}.$$

2.2. Обратная матрица

Для любой невырожденной квадратной матрицы A, то есть для матрицы, определитель которой $|A|\neq 0$, существует *обратная матрица* A^{-1}, такая что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E – единичная матрица, то есть матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули.

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij}, $\Delta = det A = |A| \neq 0$.

Пример 5. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\4&-1&1\end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

Решение. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную.

Найдём алгебраические дополнения A_{ij}:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11$, $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6$, $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$.

Получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 6. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Данное уравнение можно записать в виде $X \cdot A = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Искомая матрица X имеет размерность 2×2 и вычисляется по формуле

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Для нахождения матрицы A^{-1} вычислим определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ и алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = 4$, $A_{21} = -2$, $A_{12} = -3$, $A_{22} = 1$.

Получаем $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}$. Тогда $X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

2.3. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу A размера $m\times n$. Выделим в этой матрице k произвольных строк и k произвольных столбцов. Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором* k-го порядка матрицы A.

Рассмотрим всевозможные миноры матрицы A, отличные от нуля. *Рангом матрицы* A называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Ранг матрицы A обозначается $r(A)$ или $rang\,A$.

Матрицы, имеющие одинаковые ранги, называются *эквивалентными*. Известно, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

К *элементарные преобразованиям* матрицы относятся:

1) перестановка строк матрицы;
2) вычеркивание строк, все элементы которых равны нулю;
3) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
4) прибавление элементов одной строки к соответствующим элементам другой строки;
5) транспонирование – замена строк столбцами и столбцов соответствующими строками.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к специальному виду

$$A_r=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Число r единиц, стоящих на главной диагонали, не зависит от способа приведения матрицы A к виду A_r и является рангом матрицы A. Матрицы, получаемые друг из друга элементарными преобразованиями, являются эквивалентными и соединяются знаком ~.

Пример 7. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 10\\ 7 & 8 & 18\\ 3 & 7 & 17\end{pmatrix}$.

Решение. Способ 1. Применим к этой матрице следующие элементарные преобразования. Ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на (– 4), а к третьему столбцу прибавим первый, умноженный на (– 10), затем ко второй строке прибавим третью, умноженную на (–4). После этих преобразований полученная матрица примет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 0\\ 3 & -5 & -13\end{pmatrix}.$$

Теперь первую строку умножим на 5 и на (– 3) и прибавим соответственно ко второй и третьей строкам, а затем переставим местами вторую и третью строки; тогда будем иметь матрицу

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -13\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Далее, если умножить на (– 1/5) и (– 1/13) второй и третий столбцы, а затем вычесть из третьего столбца второй, то получим матрицу

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг r данной матрицы равен двум, т. е. r = 2.

Способ 2. Последовательно будем вычислять миноры матрицы A.
Существует только один минор третьего порядка – это определитель матрицы A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 4 & 10\\ 7 & 8 & 18\\ 3 & 7 & 17\end{vmatrix}=1\cdot 8\cdot 17+4\cdot 18\cdot 3+7\cdot 7\cdot 10-10\cdot 8\cdot 3-7\cdot 4\cdot 17-18\cdot 7\cdot 1=0.$$

Минор третьего порядка равен нулю, следовательно, $r\neq 3$, $r\leq 2$.

Среди миноров второго порядка существует ненулевой минор (он называется базисным) $M_2=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 7 & 8\end{vmatrix}=1\cdot 8-4\cdot 7=-20\neq 0$, следовательно, ранг матрицы r = 2.

Ответ: r = 2.

§ 3. Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решений

3.1. Основные понятия

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\ , \end{cases} \qquad (1)$$

где числа $x_1,\ldots,x_n$ – неизвестные; $a_{11},\ldots,a_{mn}$ – коэффициенты при неизвестных; $b_1,\ldots,b_m$ – свободные члены.

Решением системы (1) называется упорядоченный набор чисел $(x_1,\ldots,x_n)$, который при подстановке в систему все уравнения обращает в верные тождества.

Пример 8. Проверить, является ли набор $(0;3)$ решением системы

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 5x + y = 3. \end{cases}$$

Решение. Подставляем в каждое из уравнений системы $x = 0$ и $y = 3$.

$$3x - 2y = -6 \Rightarrow 3\cdot 0 - 2\cdot 3 = -6 \Rightarrow -6 = -6$$
$$5x + y = 3 \Rightarrow 5\cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow 3 = 3$$

Так как в результате подстановки получили верные равенства, то делаем вывод, что заданный набор является решением данной системы.

Ответ: набор $(0;3)$ является решением системы.

Система (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система называется *несовместной*.

Система называется (1) *определённой*, если она совместна и имеет единственное решение. В противном случае (т.е. если система совместна и имеет более одного решения) система называется *неопределённой*.

Две системы называются *равносильными*, если они имеют одинаковое множество решений.

Система (1) переходит в равносильную, если ее изменить с помощью так называемых *элементарных преобразований системы*, к которым относятся:

1) перемена местами двух уравнения;

2) умножение любого уравнения на число $\lambda \neq 0$;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Исходную систему (1) можно записать в матричном виде: $A \cdot X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица, составленная из коэффициентов при

неизвестных, она называется основной матрицей системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных коэффициентов.

Матричная запись системы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Помимо основной матрицы системы, существует также расширенная матрица системы, которую получают, дописывая справа после вертикальной черты столбец свободных членов.

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Преобразования строк расширенной матрицы системы соответствуют элементарным преобразованиям системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу её расширенной матрицы, то есть $r(A) = r(A|B)$.

Если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, то система уравнений (1) называется *однородной*. Она всегда совместна и всегда обладает тривиальным (нулевым) решением.

Пусть $r(A)$ – ранг матрицы A системы, $r(A|B)$ – ранг расширенной матрицы, n – число неизвестных системы, m – число уравнений. Тогда возможны следующие случаи.

1) Ранг матрицы A системы меньше ранга расширенной матрицы $(A|B)$, то есть $r(A) < r(A|B)$, тогда данная система несовместна и решения не существует.

2) Ранги матриц A и $(A|B)$ одинаковы, то есть $r(A) = r(A|B) = r$; тогда для данной системы существует хотя бы одно решение. При этом:

если $r = n$, то система имеет единственное решение;

если $r < n$ $(m \leq n)$, то система имеет бесконечное число решений, которые можно найти по следующей схеме:

а) выделяется в матрице A минор Δ_r r-го порядка, отличный от нуля: $\Delta_r \neq 0$;

б) выделяется подсистема, состоящая из уравнений, коэффициенты при неизвестных которых входят в минор Δ_r;

в) полученная подсистема решается по формулам Крамера ($\Delta_r \neq 0$) при произвольных значениях $(n - r)$ неизвестных, коэффициенты которых не входят в минор Δ_r. Эти неизвестные, принимающие любые значения, называются *свободными неизвестными* и обозначаются $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$.

Таким образом, система (1) может иметь либо единственное решение, либо бесконечно много решений, либо не иметь их вообще.

3.2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Рассмотрим этот метод на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что определитель матрицы коэффициентов системы, назовем его *главным определителем*, отличен от нуля, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система (2) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix} -$$

присоединенные определители.

Пример 9. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+5y+2z=1\\ x+3y+4z=6\\ 3x+2y-z=-1. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем главный определитель, например, методом треугольников

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot(-1)+5\cdot4\cdot3+2\cdot1\cdot2-2\cdot3\cdot3-2\cdot4\cdot2-5\cdot1\cdot(-1)=$$

$$=-6+60+4-18-16+5=29.$$

Определитель $\Delta=29\neq0$, следовательно, система имеет единственное решение. Аналогичным образом вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2\\ 6 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=29,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 4\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=-29,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=58.$$

Находим решение системы по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{29}{29}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-29}{29}=-1,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{58}{29}=2.$$

Ответ: $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

Метод Крамера применяется для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными, у которых главный определитель не равен нулю.

3.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Для решения системы уравнений (2) методом Гаусса, составляют расширенную матрицу коэффициентов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу коэффициентов системы уравнений приводят к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

Вместо знака * будут какие-либо числа, получившиеся в результате элементарных преобразований матрицы.

Допустимые элементарные преобразования матрицы:

1) можно поменять любые две строки местами;

2) любую строку можно умножить (или разделить) на любое неравное нулю число;

3) к любой строке можно прибавить (или вычесть) любую строку, умноженную (или разделённую) на любое неравное нулю число.

По последней матрице составляют соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x + \; *\cdot y + \; *\cdot z = \; * \\ \qquad\quad y + \; *\cdot z = \; * \\ \qquad\qquad\qquad z = \; * \end{cases}$$

и последовательно находят неизвестные z, y, x.

Пример 10. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу коэффициентов.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Меняем местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на (-2).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на (-3).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

Умножаем вторую строку на (-1).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на 7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right).$$

Делим третью строку на 29.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

По последней матрице составляем соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 6 \\ \qquad y + 6z = 11 \\ \qquad\qquad z = 2. \end{cases}$$

Решая систему снизу вверх (это обратный ход метода Гаусса), находим, что $y = -1,\ x = 1$.

Ответ: $x = 1,\ y = -1,\ \ z = 2.$

3.4. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Это метод решения с помощью обратной матрицы. Перепишем систему уравнений (2) в матричном виде: $A \cdot X = B,$ где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1}– матрица, обратная к матрице A. Обратная матрица существует для невырожденной квадратной матрицы, то есть для матрицы, определитель которой $|A| \neq 0$, и для матрицы третьего порядка находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $A_{i\,j}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Пример 11. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Найдем матрицу A^{-1}.

Определитель матрицы A уже вычислен (см. пример 9): $|A| = 29$.

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$, $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$, $\quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14$,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13$, $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8$, $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6$,

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$, $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$, $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 9 & 14 \\ 13 & -8 & -6 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -11 + 54 - 14 \\ 13 - 48 + 6 \\ -7 + 66 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ -29 \\ 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

РАЗДЕЛ 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 4. Векторы. Линейные операции над векторами

4.1. Основные понятия

Вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок прямой, характеризующийся длиной и направлением.

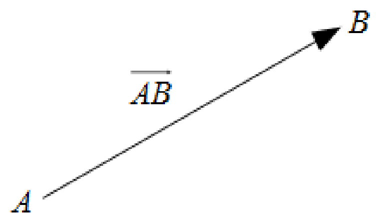


Рис. 2

Из двух граничных точек этого отрезка одна является началом, а другая – концом. Вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ (или $\overline{AB}$), где A – начало, B – конец вектора, или $\vec{a}$ (или $\bar{a}$).

Нулевым вектором называется вектор, конец которого совпадает с началом.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Компланарными называются векторы, расположенные в параллельных плоскостях.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины.

Если точка приложения вектора не имеет значения, то вектор можно переносить, сохраняя длину и направление, в любую точку пространства. В этом случае вектор называется *свободным*.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при условии, что конец вектора $\vec{a}$ совмещен с началом вектора $\vec{b}$, называется вектор $\vec{c}$, соединяющий начало $\vec{a}$ с концом $\vec{b}$.

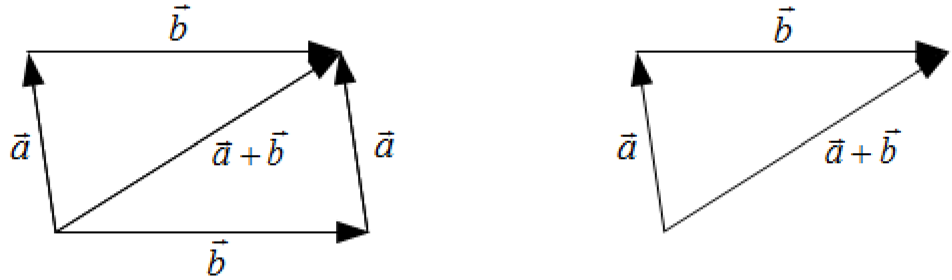


Рис. 3

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, для которого $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Из определения получаем правило построения вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, если начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещены: нужно соединить конец вычитаемого вектора $\vec{b}$ с концом уменьшаемого вектора $\vec{a}$.

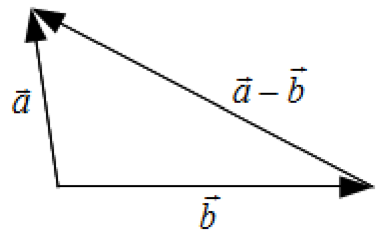


Рис. 4

Произведением $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}$ такой, что:

1) $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$;

2) $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ и направлен в ту же сторону при $\lambda > 0$ и в противоположную сторону при $\lambda < 0$.

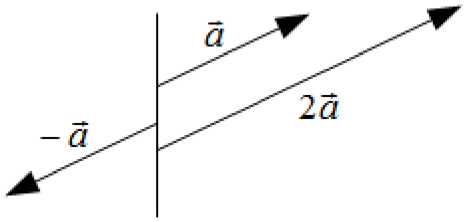


Рис. 5

Операции сложения, вычитания векторов, умножения вектора на число называются линейными операциями.

4.2. Свойства линейных операций

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами.

1. Переместительный закон (коммутативность) сложения

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

2. Сочетательный закон (ассоциативность) сложения

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

3. Сочетательный закон (ассоциативность) умножения

$$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a}).$$

4. Распределительный закон (дистрибутивность) сложения и умножения

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

Эти свойства легко проверяются геометрически

4.3. Действия над векторами в координатном виде

Пусть в пространстве задана ось (т.е. направленная прямая) u.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ на оси u, где A' – проекция точки A на ось u, а B' – проекция точки B на эту ось. Обозначение: $\text{пр}_u\overrightarrow{AB}$.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u определяется формулой

$$\text{пр}_u\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi, \qquad (3)$$

где φ – угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью u.

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$, пусть $X=\text{пр}_x\overrightarrow{AB}$, $Y=\text{пр}_y\overrightarrow{AB}$, $Z=\text{пр}_z\overrightarrow{AB}$. Проекции X, Y, Z вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат называют его *координатами*. При этом пишут

$$\overrightarrow{AB}=\{X;\ Y;\ Z\}.$$

Для любых двух точек $A\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются следующими формулами:

$$X=x_2-x_1,\ Y=y_2-y_1,\ Z=z_2-z_1.$$

Пусть даны координаты произвольного вектора $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$.

Тогда длина (или модуль) вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,. \qquad (4)$$

Обозначим через α,β,γ углы между вектором $\vec{a}$ и осями координат. Из формул (3) и (4) получаем:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}; \qquad (5)$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Возводя в квадрат левую и правую части каждого из равенств (5) и суммируя полученные результаты, имеем

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна 1.

Запишем теперь, как в координатном представлении производятся действия над векторами.

Если $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, то вектор суммы получается суммированием соответствующих координат слагаемых:

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\}.$$

Для получения разности в координатной форме надо вычесть соответствующие координаты векторов:

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z\},$$

а умножение вектора на число равносильно умножению на это число каждой координаты вектора:

$$\lambda\vec{a}=\{\ \lambda\ a_x;\ \lambda\ a_y;\ \lambda\ a_z\ \}.$$

Из последнего равенства следует *критерий коллинеарности* двух векторов. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, то есть

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\quad(\vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0).$$

§ 5. Скалярное произведение векторов и его свойства

5.1. Определение и свойства скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, то есть

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из определения следует: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ – называется скалярный квадрат;
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
4. $(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
5. *Критерий перпендикулярности двух векторов*: два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\ (\vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0).$$

6. Так как $|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_b\vec{a}$, $|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_a\vec{b}$, то можно записать $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_b\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_a\,\vec{b}$.

Пример 13. Найти длину вектора $\vec{p}+2\vec{q}$, если $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. Как известно, модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора: $|\vec{p}+2\vec{q}|=\sqrt{(\vec{p}+2\vec{q})^2}$.

Находим скалярный квадрат $(\vec{p}+2\vec{q})^2=(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{a}+4\vec{b})^2=(3\vec{a}+3\vec{b})^2=$

$=9(\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2)=9(1+2\cdot 3\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}+9)=63.$

Следовательно, $|\vec{p}+2\vec{q}|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$

Ответ: $3\sqrt{7}$.

5.2. Скалярное произведение в координатном виде

Если в некотором ортонормированном базисе векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, то их скалярное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z.$$

Напомним, что базис называется *ортонормированным*, если он состоит из взаимно перпендикулярных векторов единичной длины.

В координатной форме критерием перпендикулярности двух векторов $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ является равенство

$$a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z=0.$$

Угол между векторами $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Пример 12. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\{2,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию: скалярное произведение $(\vec{x},\vec{a})=27$.

Решение. В силу коллинеарности вектор $\vec{x}$ можно представить в виде $\vec{x}=\lambda\cdot\vec{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия: $(\vec{x},\vec{a})=\lambda\cdot\vec{a}^2=\lambda(4+1+4)=9\lambda=27$. Отсюда получаем $\lambda=3$ и $\vec{x}=3\vec{a}=\{6,3,-6\}$.

Ответ: $\vec{x}=\{6,3,-6\}$.

Пример 13. Вычислить косинус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Решение. Известно, что диагонали параллелограмма можно найти как сумму и разность сторон :

$$\vec{d}_1=\vec{p}+\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}+0\vec{c}, \qquad \vec{d}_2=\vec{p}-\vec{q}=\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}.$$

Так как векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ представляют собой единичные взаимно перпендикулярные векторы, то их можно считать координатным базисом, тогда для нахождения требуемого угла воспользуемся формулой

$$\cos\angle(\vec{d}_1,\vec{d}_2)=\frac{(\vec{d}_1,\vec{d}_2)}{|\vec{d}_1|\cdot|\vec{d}_2|}=\frac{3\cdot1+(-2)\cdot4+0\cdot(-2)}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{1+16+4}}=\frac{-5}{\sqrt{13\cdot21}}=\frac{-5}{\sqrt{273}}.$$

Ответ: $\dfrac{-5}{\sqrt{273}}$.

§ 6. Векторное произведение векторов и его свойства

6.1. Определение и свойства

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]$, определяемый следующим образом:

1) длина его равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ после приведения к общему началу образуют правую тройку векторов.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

Векторное произведение обладает следующими свойствами.

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ – свойство антикоммутативности.
2. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.
3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.
4. *Критерий коллинеарности двух векторов*. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю.

То есть $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, если или $\vec{a}=\vec{0}$, или $\vec{b}=\vec{0}$, или $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

5. *Геометрический смыслом модуля векторного произведения.* Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

6.2. Векторное произведение в координатном виде

Пусть в трехмерном векторном пространстве задан ортонормированный базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – взаимно перпендикулярные векторы единичной длины, направленные по осям Ox, Oy, Oz соответственно. Пусть в этом базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, тогда их векторное произведение вычисляется через определитель

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\vec{i}\,(a_y b_z-a_z b_y)-\vec{j}\,(a_x b_z-a_z b_x)+\vec{k}\,(a_x b_y-a_y b_x)=$$

$$=\{a_y b_z-a_z b_y;\ a_z b_x-a_x b_z;\ a_x b_y-a_y b_x\}.$$

Пример 14. Даны координаты точек $A(3;-5;4)$, $B(2;-1;1)$, $C(-4;3;6)$. Найти:

1) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
2) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
3) векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
4) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. 1) Сначала находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: из координат точки B вычитаем координаты точки A.

$$\overrightarrow{AB}=\{2-3;-1-(-5);1-4\}=\{-1;4;-3\}.$$

Теперь находим длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{1+16+9}=\sqrt{26}.$$

2) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC}=\{-4-3;3-(-5);6-4\}=\{-7;8;2\}.$$

Вычисляем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-1\cdot(-7)+4\cdot 8+(-3)\cdot 2=33.$$

3) Вычисляем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 4 & -3\\ -7 & 8 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot 4\cdot 2+\vec{j}\cdot(-3)\cdot(-7)+\vec{k}\cdot(-1)\cdot 8-\vec{k}\cdot 4\cdot(-7)-\vec{j}\cdot(-1)\cdot 2-\vec{i}\cdot(-3)\cdot 8=$$

$$=8\vec{i}+21\vec{j}-8\vec{k}+28\vec{k}+2\vec{j}+24\vec{i}=32\vec{i}+23\vec{j}+20\vec{k}=\{32;23;20\}.$$

4) Для нахождения косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ вычислим длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+8^2+2^2}=\sqrt{49+64+4}=\sqrt{117}.$$

Теперь находим требуемый косинус.

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{33}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{117}}=\frac{3\cdot 11}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 3\cdot\sqrt{13}}=\frac{11}{13\sqrt{2}}.$$

Ответ: 1) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{26}$, 2) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=33$,

3) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\{32;23;20\}$, 4) $\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{11}{13\sqrt{2}}$.

§ 7. Смешанное произведение векторов и его свойства

7.1. Определение и свойства

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, обозначаемое $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ и равное $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ (здесь вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перемножаются векторно, а их результат скалярно на вектор $\bar{c}$).

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$$

Смешанное произведение обладает следующими свойствами.

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене знаков векторного и скалярного умножения: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$, поэтому смешанное произведение записывают $\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}$.

3. Смешанное произведение обладает свойством линейности по каждому аргументу (это следует из свойств линейности и векторного и скалярного произведений).

4. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене любых двух сомножителей: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = -\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$.

5. *Критерий компланарности трех векторов*. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны (то есть лежат в одной или параллельных плоскостях)

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0 \Leftrightarrow \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ – компланарны.}$$

6. *Геометрический смысл модуля смешанного произведения:* модуль смешанного произведения трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

$$\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right| = V.$$

Замечание. Объём тетраэдра (треугольной пирамиды) построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда.

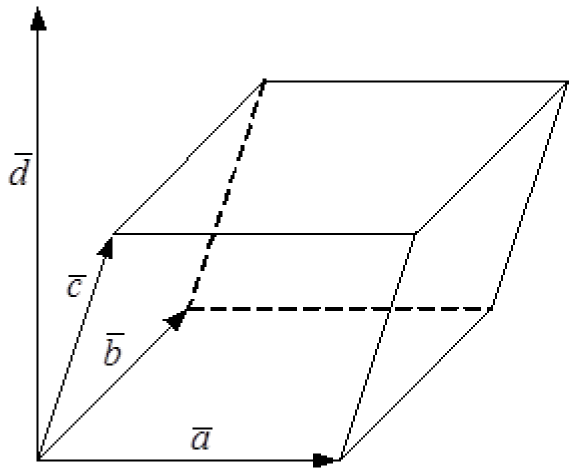


Рис. 6

7.2. Смешанное произведение в координатном виде

Если известны координаты векторов $\vec{a} = \vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$, то их смешанное произведение выражается определителем

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 15. Определить, лежат ли точки $A(1,\ 2,\ 3)$; $B(0,\ 5,\ 5)$; $C(3,\ \text{-}1,\ \text{-}1)$; $D(\text{-}2,\ 14,\ 9)$ в одной плоскости.

Решение. Рассмотрим три вектора $\overrightarrow{AB} = \{-1, 3, 2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2, -3, -4\}$ и $\overrightarrow{AD} = \{-3, 12, 6\}$. Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18+36+48-18-36-48=0.$$

Смешанное произведение равно нулю, следовательно, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны и точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат в одной плоскости.

Ответ: точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат в одной плоскости.

РАЗДЕЛ 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 8. Прямая на плоскости

8.1. Различные виды уравнения прямой на плоскости

Существуют различные виды записи уравнения прямой на плоскости.

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:*

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$) и называется *угловым коэффициентом*, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

2. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку* M (x_1; y_1) *с данным угловым коэффициентом:*

$$y - y_1 = k\,(x - x_1). \tag{2}$$

3. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* M_1 (x_1; y_1) и M_2 (x_2; y_2):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

4. *Каноническое уравнение прямой:*

$$\frac{y - y_1}{l} = \frac{x - x_1}{m}, \tag{4}$$

где в знаменателе стоят координаты *направляющего вектора* $\vec{s} = \{l, m\}$, то есть координаты любого ненулевого вектора, параллельного прямой.

5. *Общее уравнение прямой:*

$$Ax + By + C = 0, \tag{5}$$

где A, B, C – произвольные коэффициенты (A и B не равны нулю одновременно).

Вектор $\vec{n} = \{A, B\}$ перпендикулярен прямой и называется *нормальным вектором* прямой.

Если в уравнении (5) какой-то из коэффициентов равен нулю, то

1) при $C = 0$ прямая $y = -\dfrac{A}{B}x$ проходит через начало координат;

2) при $B = 0$ ($A \neq 0$) прямая $x = -\dfrac{C}{A} = a$ параллельна оси Oy;

3) при $A = 0$ ($B \neq 0$) прямая $y = -\dfrac{C}{B} = b$ параллельна оси Ox;

4) при $B = C = 0$ получаем уравнение $Ax = 0$, то есть $x = 0$ – это уравнение оси Oy;

5) при $A = C = 0$ получаем уравнение $By = 0$, то есть $y = 0$ – это уравнение оси Ox.

6. *Уравнение прямой в «отрезках».*

Если ни один из коэффициентов уравнения (5) не равен нулю, то его можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{6}$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$ и $b = -\dfrac{C}{B}$ – величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях. Уравнение (6) называется уравнением прямой «в отрезках».

7. *Нормальное уравнение прямой.*

Это уравнение вида

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0, \tag{7}$$

где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному виду (нормальное уравнение прямой), нужно все члены его умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

взятый со знаком, противоположным знаку C. Если $C = 0$, то знак нормирующего множителя можно брать произвольно

8.2. Угол между двумя прямыми

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{8}$$

Второй угол равен $\pi - \varphi$.

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Если две прямые заданы каноническими уравнениями, то угол φ между этими прямыми равен углу между их направляющими векторами. В случае задания прямых общими уравнениями угол φ равен углу между нормальными векторами. Второй угол, как и прежде, равен π – φ.

Пример 17. Две прямые заданы уравнениями $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 2$. Найти угол между этими прямыми.

Решение. Имеем $k_1 = 2$, $k_2 = -3$. Поэтому по формуле (8) находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Таким образом, один из углов между данными прямыми равен π/4, другой угол π – π/4 = 3π/4.

Ответ: π/4, 3π/4.

Пример 18. Показать, что прямые L_1: $4x - 6y + 7 = 0$ и L_2: $20x - 30y - 11 = 0$ параллельны.

Решение. *Способ 1*. Приведя уравнение каждой прямой к виду (1), получим L_1: $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$ и L_2: $y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}$, откуда $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$. Следовательно, прямые параллельны.

Способ 2. Выпишем координаты нормальных векторов из уравнений прямых

$$\vec{n}_1 = \{4, -6\},\ \vec{n}_2 = \{20, -30\}.$$

Из соотношения $\frac{4}{20} = \frac{-6}{-30}$ следует, что координаты векторов пропорциональны. Следовательно, векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны, а прямые L_1 и L_2 параллельны.

8.3. Расстояние от точки до прямой

Пусть L – прямая, заданная нормальным уравнением, и пусть M_0 $(x_0; y_0)$ – точка, не лежащая на этой прямой. Тогда, чтобы найти расстояние от точки M_0 до прямой L, следует подставить координаты точки в это уравнение и взять полученное значение по абсолютной величине.

Пример 19. Даны прямая $3x - 4y + 10 = 0$ и точка $M_0(4; 3)$. Найти расстояние d от точки M_0 до данной прямой.

Решение. Приведём данное уравнение к нормальному виду. Для этого найдём по формуле (8) нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на μ, получаем нормальное уравнение прямой

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$$

и находим искомое расстояние: $d=\left|-\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{4}{5}\cdot 3-2\right|=|-2|=2$.

Ответ: $d=2$.

§ 9. Кривые второго порядка на плоскости

Кривой второго порядка называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второго порядка:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+fy+g=0,$$

где a, b, c, d, f, g – вещественные числа, и хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля.

К кривым второго порядка относятся эллипс, гипербола и парабола.

9.1. Эллипс

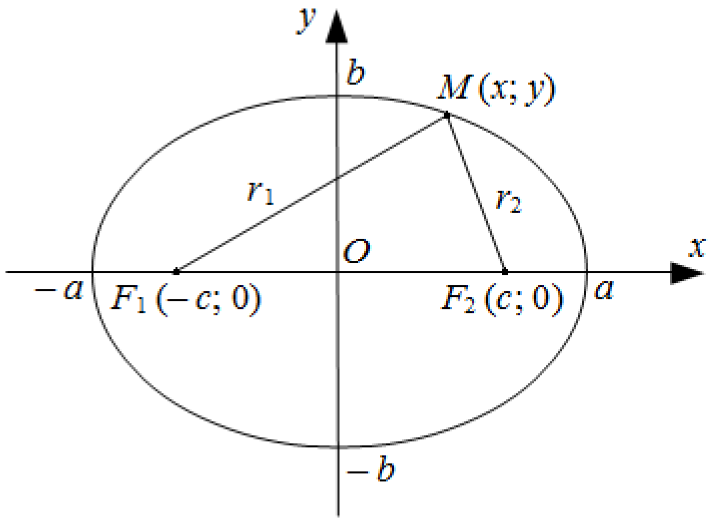


Рис. 7

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (бóльшая, чем расстояние между фокусами).

Каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и с фокусами в точках F_1 $(-c; 0)$ и F_2 $(c; 0)$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a и b – полуоси эллипса, c – полуфокусное расстояние. Коэффициенты a, b, c эллипса связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$. Система координат, в которой эллипс имеет такое уравнение, называется его *канонической* системой координат.

Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки $M\,(x;\,y)$ эллипса до фокусов F_1 и F_2 называются *фокальными радиусами* точки M и определяются по формулам $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

***Оптическое свойство эллипса*:** световой луч, выпущенный из одного фокуса, после зеркального отображения от эллипса пройдёт через другой фокус.

Пример 20. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2;\ \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Решение. Пусть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – искомое уравнение эллипса. Этому уравнению должны удовлетворять координаты данных точек. Следовательно,

$$\frac{25}{4a^2} + \frac{3}{8b^2} = 1,\ \frac{4}{a^2} + \frac{3}{5b^2} = 1.$$

Отсюда находим $a^2 = 10$, $b^2 = 1$. Итак, уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{10} + y^2 = 1.$$

Если $a = b$, то эллипс вырождается в окружность. Эксцентриситет окружности $\varepsilon = 0$, так как фокусы совпадают и $c = 0$. Напомним определение окружности.

Окружность – это множество точек, равноудалённых от данной точки (центра). В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то это уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

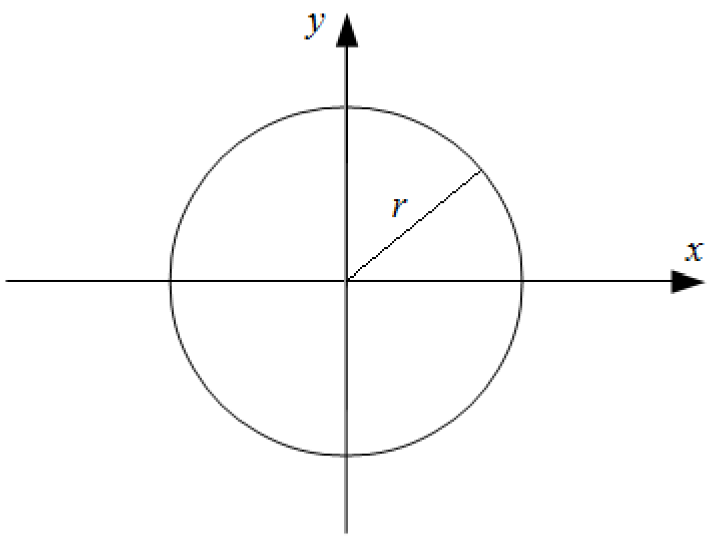


Рис. 8

Если r – радиус окружности, а точка $C(x_0, y_0)$ – её центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Пример 21. Найти координаты центра и радиус окружности

$$2x^2+2y^2-8x+5y-4=0.$$

Решение. Разделив уравнение на 2 и сгруппировав члены уравнения, получим: $x^2-4x+y^2+\frac{5}{2}y=2$. Дополним выражения x^2-4x и $y^2+\frac{5}{2}y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4 и ко второму $(5/4)^2$ (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$$(x^2-4x+4)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16} \Leftrightarrow (x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

Таким образом, координаты центра окружности $x_0=2$, $y_0=-\frac{5}{4}$, а радиус окружности $r=\frac{11}{4}$.

9.2. Гипербола

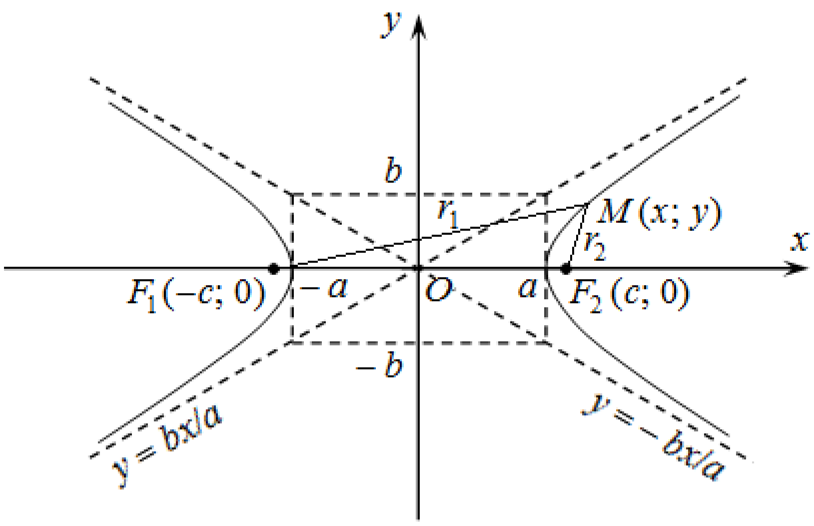


Рис. 9

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и с фокусами в точках F_1 $(-c;\ 0)$ и F_2 $(c;\ 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a – *действительная полуось*, b – *мнимая полуось*. Коэффициенты a, b и c связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2$. Система координат, в которой гипербола имеет такое уравнение, называется ее *канонической* системой координат.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ – *асимптоты* гиперболы.

Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиусы r_1 и r_2 определяются по формулам $r_1 = |\varepsilon x + a|$, $r_2 = |\varepsilon x - a|$.

Если $a = b$, то уравнение гиперболы принимает вид

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Такая гипербола называется *равнобочной*. Её асимптоты образуют прямой угол.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \left(\text{или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \right)$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси Oy длины $2b$.

Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называются *сопряжёнными*.

***Оптическое свойство гиперболы*:** световой луч, выпущенный из одного фокуса, после зеркального отражения от гиперболы кажется выходящим из другого фокуса.

Пример 22. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$.

Решение. Согласно определению эксцентриситета, имеем $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, или $c^2 = 2a^2$. Но $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $a^2 + b^2 = 2a^2$, или $a^2 = b^2$, т. е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки M на гиперболе, т. е. $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1$, или $\frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$. Поскольку $a^2 = b^2$, получим $\frac{3}{a^2} - \frac{2}{a^2} = 1$, т. е. $a^2 = 1$.

Ответ: уравнение искомой гиперболы: $x^2 - y^2 = 1$.

9.3. Парабола

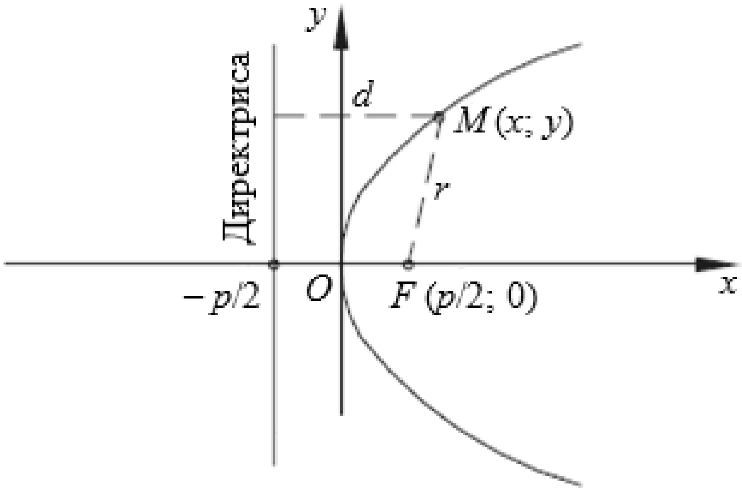


Рис. 10

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от точки, называемой фокусом, и прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат имеет вид:

$$y^2 = 2px,$$

где p - расстояние между фокусом параболы и прямой линией, называемой *директрисой*. Фокус параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, а директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$. Фокальный радиус r (расстояние от произвольной точки $M(x; y)$ параболы до фокуса) и расстояние d от точки M до директрисы определяются по формуле $r = d = x + \frac{p}{2}$.

Оптическое свойство параболы: все лучи, выпущенные из фокуса, после отражения от параболы пойдут параллельно оси параболы.

Пример 23. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

Решение. Так как известны длина хорды и расстояние её от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды – точки M, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$; полагая в нём $x = 6$, $y = 8$, находим: $8^2 = 2p \cdot 6$, откуда $2p = \frac{32}{3}$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2 = \frac{32x}{3}$.

Ответ: уравнение параболы: $y^2 = \frac{32x}{3}$.

РАЗДЕЛ 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 10. Плоскость в пространстве

10.1. Уравнение плоскости в пространстве

Существуют следующие формы записи уравнения плоскости:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – *общее уравнение* плоскости α, где $\vec{n} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости α.

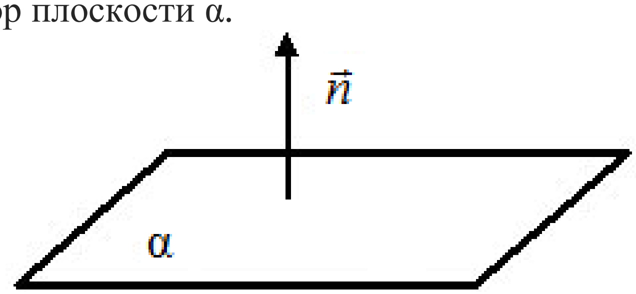


Рис.11

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости α, которая проходит через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$ (нормальный вектор плоскости α).

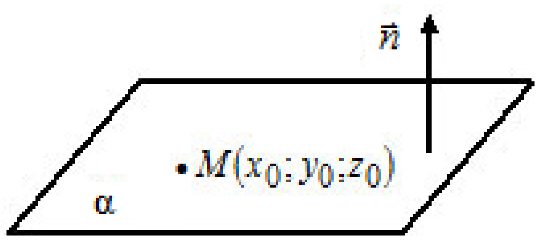


Рис.12

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – *уравнение* плоскости *в отрезках* на осях, где a, b, c – величины отрезков, которые плоскость отсекает на осях координат.

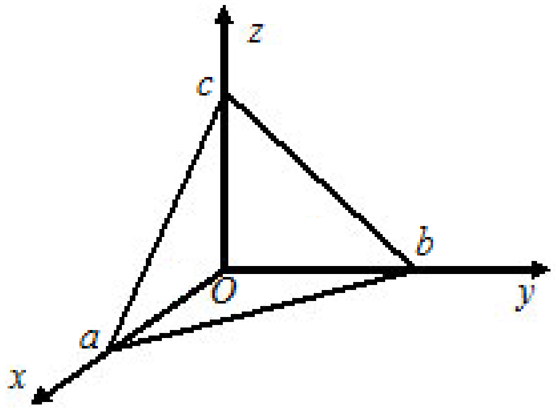


Рис.13

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, которая проходит через три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ и $C(x_3; y_3; z_3)$.

5) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ – *нормальное уравнение* плоскости, где cos α, cos β и cos γ – направляющие косинусы вектора внешней нормали $\vec{n}$ к плоскости, а $p > 0$ – расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение плоскости приводится к нормальному путем умножения на нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Расстояние от точки M (x_0, y_0, z_0) *до плоскости* α: $Ax + By+ Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Частные случаи общего уравнения плоскости. Это случаи, когда те или иные коэффициенты уравнения $Ax+By+Cz+D=0$ обращаются в нуль.

1. При $D = 0$ уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки O (0; 0; 0) удовлетворяют этому уравнению.

2. При $A = 0$ уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox, поскольку вектор нормали $\vec{n}=(0;\ B;\ C)$ этой плоскости перпендикулярен оси Ox (его проекция на ось Ox равна нулю). Аналогично, при $B = 0$ плоскость $Ax+Cz+D=0$ параллельна оси Oy, а при $C = 0$ плоскость $Ax+By+D=0$ параллельна оси Oz.

3. При $A = D = 0$ уравнение $By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Ox, поскольку она параллельна оси Ox ($A = 0$) и проходит через начало координат ($D = 0$). Аналогично, плоскость $Ax+Cz=0$ проходит через

ось Oy, а плоскость $Ax+By=0$ – через ось Oz.

4. При $A = B = 0$ уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xOy, поскольку она параллельна осям Ox ($A = 0$) и Oy ($B = 0$). Аналогично, плоскость $Ax+D=0$ параллельна плоскости yOz, а плоскость $By+D=0$ – плоскости xOz.

5. При $A = B = D = 0$ уравнение $Cz=0$ (или $z = 0$) определяет координатную плоскость xOy, так как она параллельна плоскости xOy ($A = B = 0$) и проходит через начало координат ($D = 0$). Аналогично, уравнение $y = 0$ в пространстве определяет координатную плоскость xOz, а уравнение $x = 0$ – координатную плоскость yOz.

10.2. Угол между плоскостями

Рассмотрим две плоскости α_1 и α_2, заданные соответственно уравнениями

$$\alpha_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под *углом* между двумя плоскостями будем понимать один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Очевидно, что угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей α_1 и α_2 равен одному из указанных смежных двугранных углов: $\varphi = \left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right)$ или $\varphi = \pi - \left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right)$.

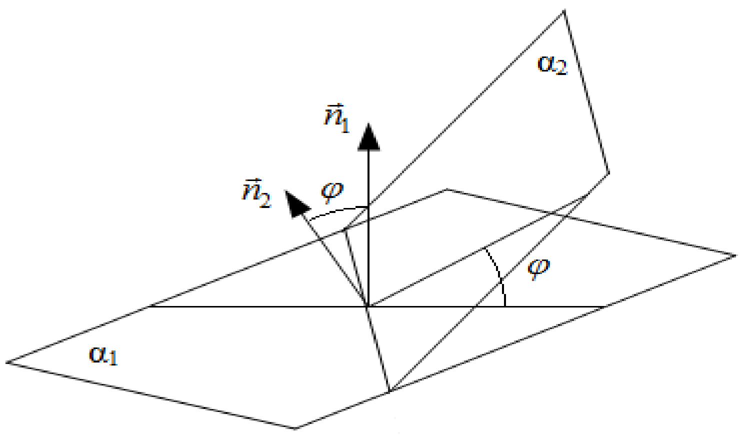


Рис.14

Поэтому $\cos\varphi = \pm\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) = \pm\dfrac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$. Так как $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$, то

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Две плоскости α_1 и α_2 *параллельны* тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны, а значит, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Две плоскости α_1 и α_2 *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ перпендикулярны, т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

§11. Прямая в пространстве

11.1. Уравнения прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана:

1) как линия пересечения двух плоскостей, то есть системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0; \end{cases} \tag{1}$$

2) двумя своими точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$; тогда прямая, через них проходящая, задается уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

3) точкой $M_1(x_1; y_1; z_1)$, ей принадлежащей, и вектором $\vec{s} = \{a; b; c\}$, ей коллинеарным. Тогда прямая определяется уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}; \tag{2}$$

уравнения (2) называются *каноническими уравнениями прямой*, а вектор $\vec{s}$ называется *направляющим вектором прямой*;

4) *параметрическими уравнениями* прямой, которые получим, приравняв каждое из отношений (2) параметру t:

$$\begin{cases} x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt, \\ z = z_1 + ct. \end{cases}$$

11.2. Расстояние между параллельными прямыми

Найдем расстояние d между параллельными прямыми, заданными каноническими уравнениями

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}; \; l_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1},$$

где $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – произвольные точки на прямых l и l_1 соответственно, а координаты направляющих векторов прямых пропорциональны: $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1}$.

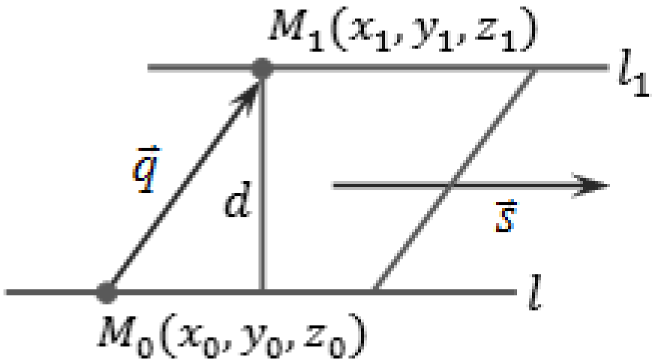


Рис. 15

Искомое расстояние d равно высоте параллелограмма, построенного на векторах $\vec{s}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ и $\vec{q}=\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0)\vec{i}+(y_1-y_0)\vec{j}+(z_1-z_0)\vec{k}$ и может быть найдено по формуле

$$d=\frac{\left|[\vec{q},\vec{s}]\right|}{|\vec{s}\,|}.$$

11.3. Угол между прямыми

Угол между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами. Поэтому величина φ острого угла между прямыми

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1};\ l_2:\ \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{s}_1,\vec{s}_2)}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}+c_2^{\ 2}}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых равносильны условиям параллельности и перпендикулярности их направляющих векторов.

11.4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Условие перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{s}$ и нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости коллинеарны, т. е.

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{s} \,||\, \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости. Прямая и плоскость параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны:

$$l \,||\, \alpha \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0.$$

Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

– прямая и плоскость пересекаются, т.е. имеют одну общую точку;

– прямая и плоскость параллельны, т.е. не имеют общих точек;

– прямая лежит в плоскости, т.е. все точки прямой принадлежат плоскости.

Получим признаки для всех этих случаев. Пусть прямая l и плоскость α заданы уравнениями:

$$l\colon \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c};\ \alpha\colon\ Ax + By + Cz + D = 0,$$

т.е. прямая l проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ коллинеарно вектору $\vec{s}$: $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, а плоскость α перпендикулярна вектору $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Перечисленным выше случаям взаимного расположения прямой l и плоскости α соответствуют следующие признаки:

– прямая l и плоскость α пересекаются $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ не ортогональны (рис. 16 а));

– прямая l и плоскость α параллельны $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ ортогональ-ны, а точка M_0 не принадлежит плоскости α (рис. 16 б));

– прямая l лежит в плоскости α $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ ортогональны, а точка M_0 принадлежит плоскости α (рис. 16 в)).

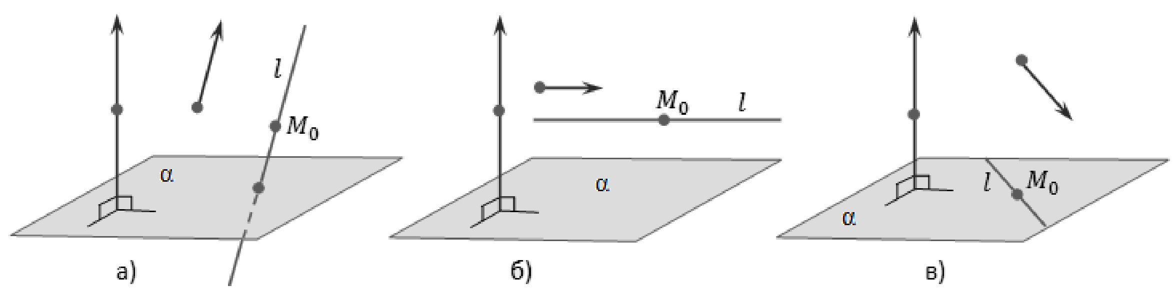


Рис.16

Учитывая свойство скалярного произведения векторов $(\vec{s},\vec{n}) = a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C$, получаем:

– прямая l и плоскость α пересекаются $\Leftrightarrow$ $a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C \neq 0$

– прямая l и плоскость α параллельны $\Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C = 0 \\ A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0 + D \neq 0 \end{cases}$

– прямая l лежит в плоскости α $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C = 0 \\ A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0 + D = 0. \end{cases}$

Пример 24. Даны координаты точек $A(3;-5;4)$, $B(2;-1;1)$, $C(-4;3;6)$. Найти:

1) канонические уравнения прямой AB;

2) уравнение плоскости ABC.

Решение. 1) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, который является направляющим вектором прямой AB.

$$\overrightarrow{AB} = \{2-3; -1-(-5); 1-4\} = \{-1; 4; -3\}.$$

Взяв в качестве точки, лежащей на прямой, точку $A(3;-5;4)$, записываем канонические уравнения прямой AB

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-4}{-3}.$$

2) Найдем нормальный вектор плоскости ABC как векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -3 \\ -7 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot 4\cdot 2 + \vec{j}\cdot(-3)\cdot(-7) + \vec{k}\cdot(-1)\cdot 8 - \vec{k}\cdot 4\cdot(-7) - \vec{j}\cdot(-1)\cdot 2 - \vec{i}\cdot(-3)\cdot 8 =$$

$$= 8\vec{i} + 21\vec{j} - 8\vec{k} + 28\vec{k} + 2\vec{j} + 24\vec{i} = 32\vec{i} + 23\vec{j} + 20\vec{k} = \{32; 23; 20\}.$$

Уравнение плоскости запишется в виде $32x + 23y + 20z + \tilde{D} = 0$. Плоскость проходит через точку A. Для нахождения числа $\tilde{D}$ подставим координаты точки A в найденное уравнение плоскости.

$$32\cdot 3 + 23\cdot(-5) + 20\cdot 4 + \tilde{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{D} = -61.$$

Окончательно получаем искомое уравнение: $32x + 23y + 20z - 61 = 0$.

Ответ: 1) $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-4}{-3}$; 2) $32x + 23y + 20z - 61 = 0$.

Пример 25. Найти длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D, если $A(4, 5, 2)$, $B(-1, 11, -6)$, $C(2, -1, 3)$ и $D(1, 6, 3)$.

Решение. Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение плоскости ABC, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки. Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -1-4 & 11-5 & -6-2 \\ 2-4 & -1-5 & 3-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y-5)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-42(x-4)+21(y-5)+42(z-2)=0 \Rightarrow 2x-y-2z+1=0.$$

Находим теперь расстояние от точки D до плоскости ABC:

$$h = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 6 - 2\cdot 3 + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: $h = 3$.

§ 12. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – многочлен степени 2.

В общем случае уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Поверхности второго порядка делятся на *вырожденные* и *невырожденные*.

Вырожденные поверхности второго порядка – это плоскости и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка).

Невырожденные поверхности второго порядка подразделяются на пять типов.

12.1. Эллипсоид

Эллипсоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (1), называется его *канонической системой координат*, а уравнение (1) – *каноническим уравнением эллипсоида*.

Величины a, b и c называются *полуосями* эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в резуль-тате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

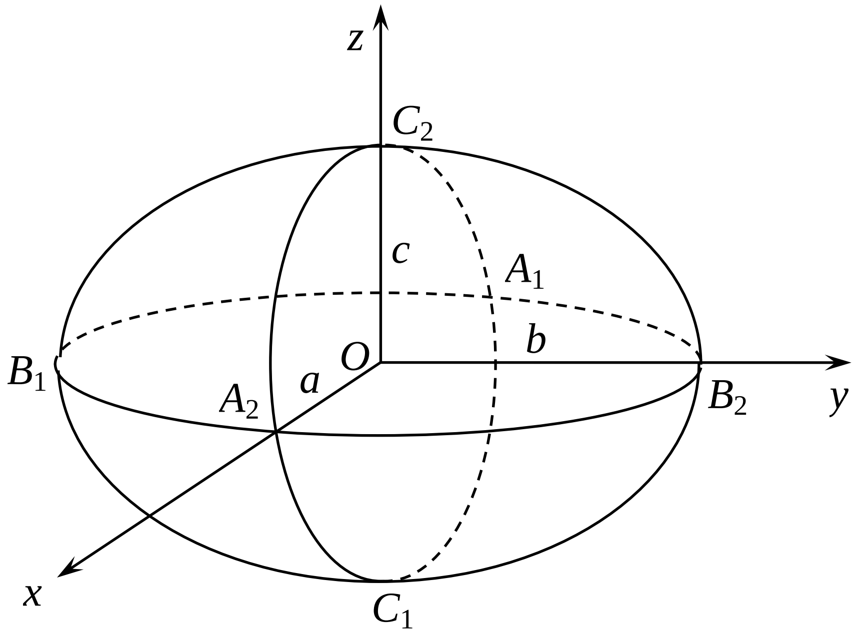


Рис. 17

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют *сферой*. Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – величина полуосей, которая называется *радиусом сферы*.

С геометрической точки зрения, *сфера* – геометрическое место точек пространства, равноудаленных (на расстояние r) от некоторой фиксированной точки (называемой центром). В канонической системе координат центром сферы является начало координат.

12.2. Гиперболоиды

Однополостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

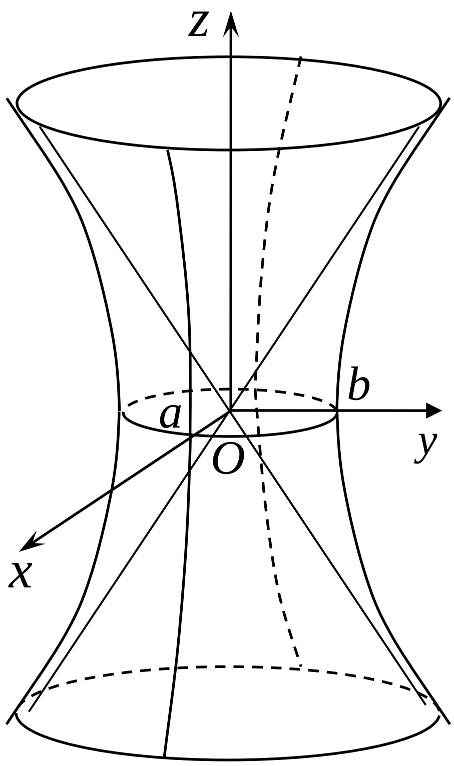


Рис. 18

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2), называется его *канонической системой координат*, а уравнение (2) – *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*. Величины a, b и c называются *полуосями* однополостного гиперболоида.

Если $a=b$, то однополостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг своей мнимой оси.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

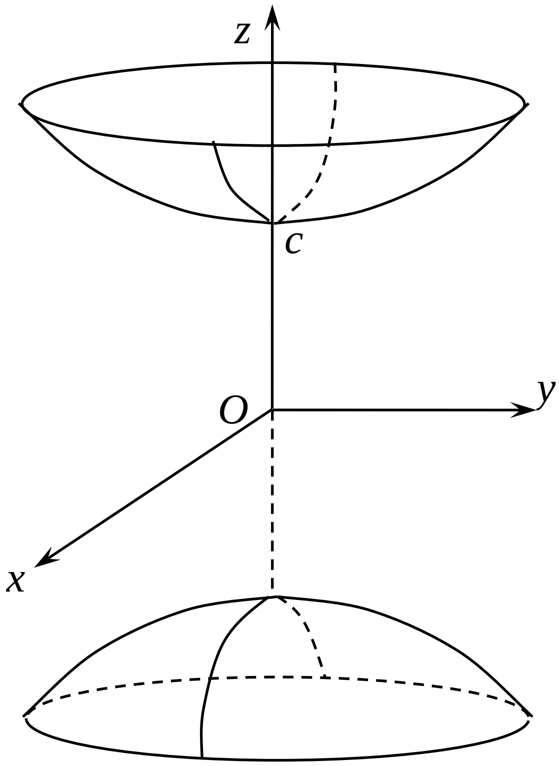


Рис. 19

Двуполостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (3)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой двуполостный гиперболоид имеет уравнение (3), называется его *канонической системой координат*, а уравнение (3) – *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*. Величины a, b и c называются *полуосями* двуполостного гиперболоида.

Если $a = b$, то двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения.

Он получается в результате вращения гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг своей действительной оси.

Уравнения

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

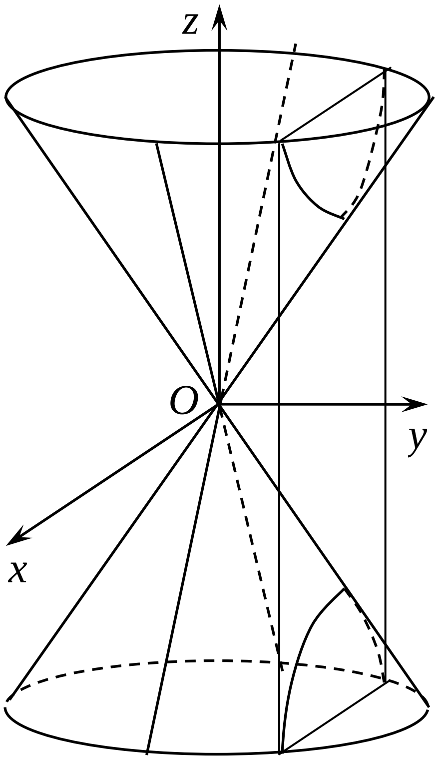


Рис. 20

12.3. Конус

Конусом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (4)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой конус (рис.20) имеет уравнение (4), называется его *канонической системой координат*, а уравнение (4) – *каноническим уравнением конуса*. Величины a, b и c называются *полуосями* конуса. Центр симметрии O называется *вершиной конуса*.

Если a=b, то конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения прямой $z = \frac{c}{b} y$ вокруг оси Oz.

Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

12.4. Параболоиды

Эллиптическим параболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \tag{5}$$

где a, b – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид (рис.21) имеет уравнение (5), называется его *канонической системой координат*, а уравнение (5) – *каноническим уравнением эллиптического параболоида*. Величины a и b называются *параметрами* параболоида. Точка O называется *вершиной параболоида*.

Если $a = b$, то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения параболы $y^2 = 2b^2 z$ вокруг оси Oz.

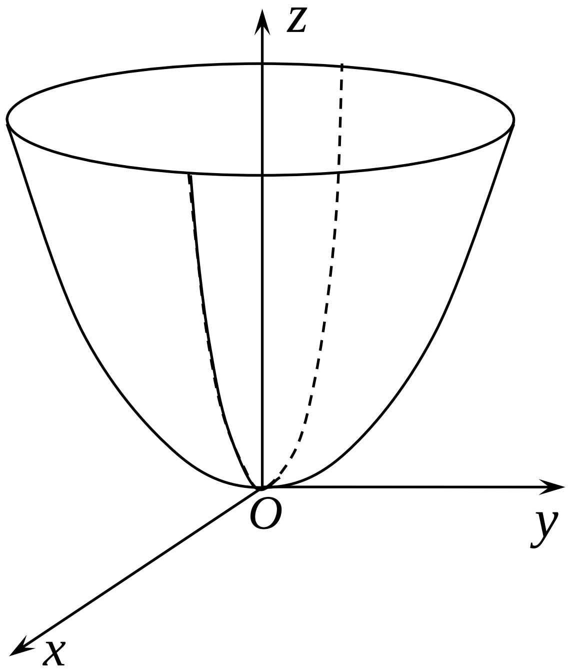


Рис. 21

Замечания. 1) Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2y \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2x$$

определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

Эллиптический параболоид – это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

Гиперболическим параболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \tag{6}$$

где a, b – положительные константы (рис. 22).

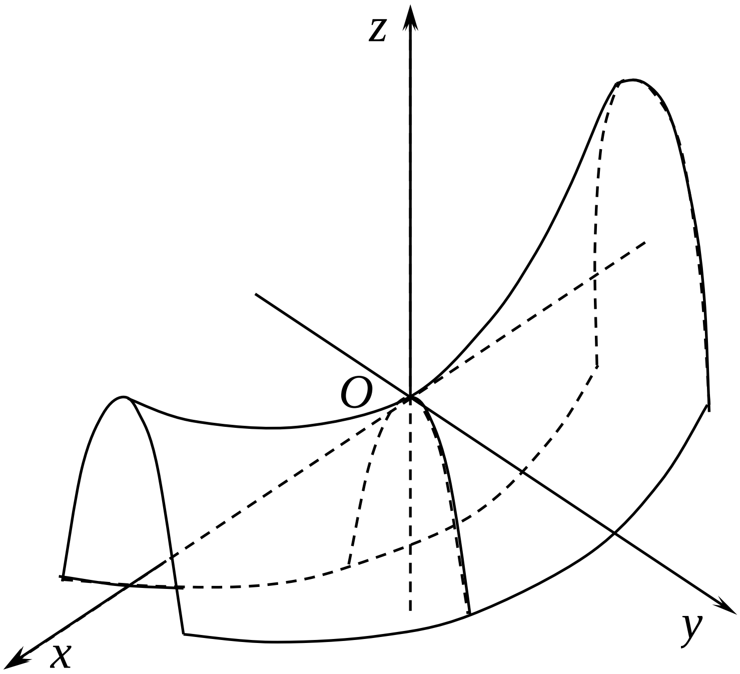


Рис. 22

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет уравнение (6), называется его *канонической системой координат*, а уравнение (6) – *каноническим уравнением гиперболического параболоида*. Величины a и b называются *параметрами* параболоида.

Замечания.

1) Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-2z$

тоже определяет гиперболический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\pm 2y \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 2x$$

определяют параболоиды, «вытянутые» вдоль осей Oz и Oy соответственно.

Гиперболический параболоид – это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны).

12.5. Цилиндры

Цилиндрической поверхностью (*цилиндром*) называется поверхность, которую описывает прямая (называемая образующей), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой направляющей).

Цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат. Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.

Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.

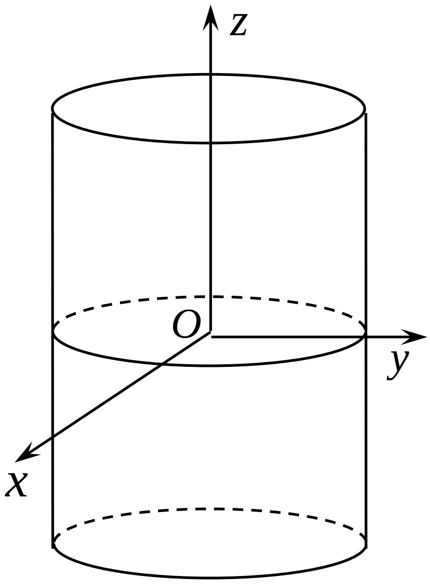


Рис. 23

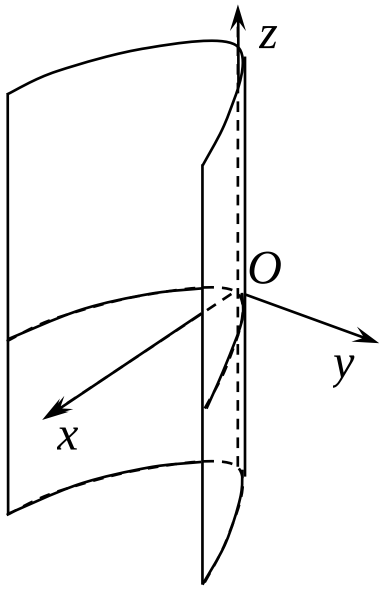


Рис. 24

На рис. 23 изображен *эллиптический* цилиндр; он задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если $a = b$, то цилиндр называется *круговым*.

На рис. 24 изображен *параболический* цилиндр; он задается уравнением

$$y^2 = 2px.$$

На рис. 25 изображен *гиперболический* цилиндр; он задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

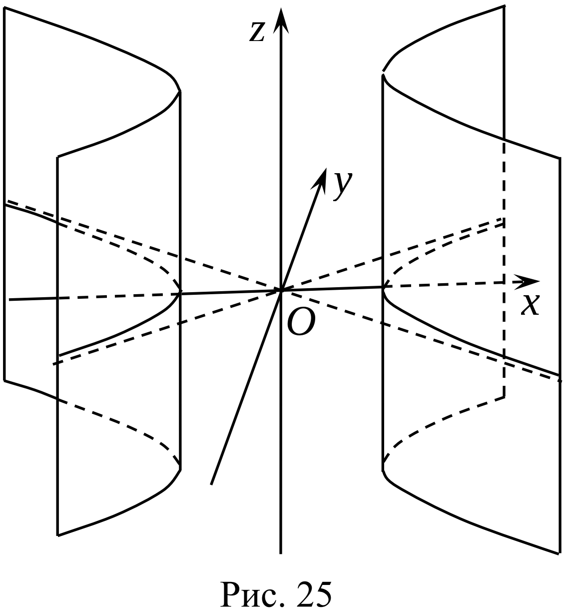


Рис. 25

РАЗДЕЛ 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 13. Комплексные числа и действия над ними

13.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*, определяемая равенством

$$i^2 = -1,$$

x называется действительной частью, y мнимой частью числа z. Их обозначают так:

$$x = Re\, z, \quad y = Im\, z.$$

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то получается действительное число $x + i0 = x$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части соответственно, то есть

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

Над комплексными числами можно производить различные арифметические и алгебраические действия, а также действие сопряжения, которое изменяет знак мнимой части.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$. Отметим, что $\bar{\bar{z}} = z$.

Сложение, вычитание, умножение и деление над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, определяются следующим образом.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Две последние формулы запоминать нет необходимости, так как умножение комплексных чисел производится по правилу умножения двучленов с учетом равенства $i^2 = -1$; а деление – путем домножения числителя и знаменателя на $\overline{z}_2$ и дальнейших преобразований.

Пример 26. Дано $z_1 = -2+3i$ и $z_2 = 4+5i$.

Вычислить z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, указать действительные и мнимые части чисел $z_1 - z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. Выполним действия:

$$z_1 + z_2 = (-2+4) + i(3+5) = 2+8i,$$

$$z_1 - z_2 = (-2-4) + i(3-5) = -6-2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-2+3i)(4+5i) = -8+12i-10i-15 = -23+2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{4+5i} = \frac{(-2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{7+22i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{22}{41}.$$

Укажем действительные и мнимые части:

$$Re(z_1 - z_2) = -6, \qquad Re\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{41}, \qquad Im(z_1 - z_2) = -2, \qquad Im\frac{z_1}{z_2} = \frac{22}{41}.$$

Пример 27. Доказать равенство $z + \overline{z} = 2Re\,z$.

Доказательство. Пусть $z = x+iy$, тогда $Re\,z = x$, $\overline{z} = x - iy$.

Поэтому

$$z + \overline{z} = x+iy+x-iy = 2x = 2Re\,z.$$

Равенство доказано.

13.2. Комплексная плоскость

Комплексное число $z = x+iy$ изображается на плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$.

Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, будем называть *комплексной плоскостью.* Все действительные числа расположены на действительной оси Ox. Множество комплексных чисел и комплексную плоскость обозначают через $\mathbb{C}$.

Таким образом, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является подмножеством множества комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пишут $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Пример 28. Построить на комплексной плоскости точки, изображающие следующие комплексные числа: $z_1 = 3i$, $z_2 = -4i$, $z_3 = 5$, $z_4 = 1 + 2i$, $z_5 = -2 + 3i$, $z_6 = -1 - i$, $z_7 = 2 - 4i$.

Решение.

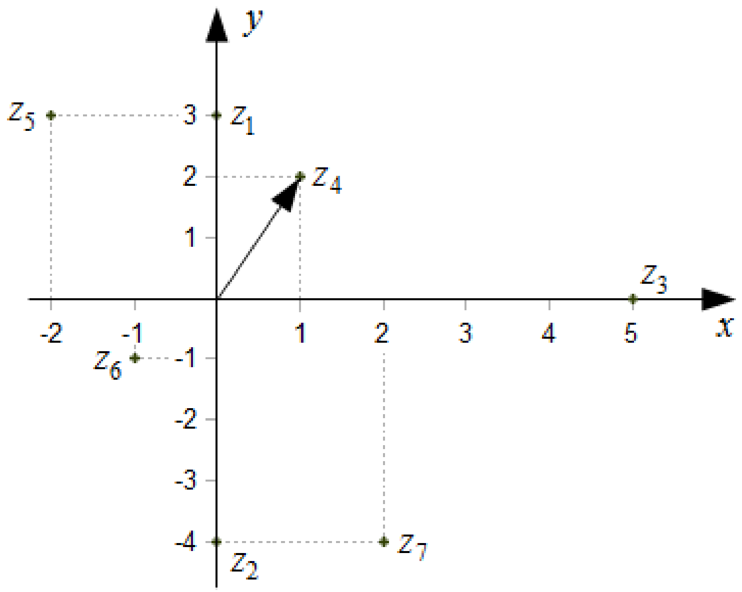


Рис. 26

Геометрически сложение и вычитание чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения и вычитания векторов.

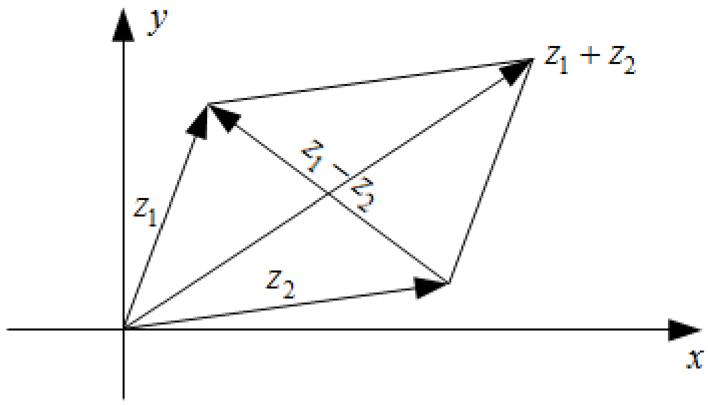


Рис. 27

Отсюда следует, что модуль $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2, а уравнение $|z - z_0| = R$ задает окружность радиуса R с центром в точке z_0.

Пример 29. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:

1) $|Im\, z| < 1,\ 0 < Re\, z < 1$; 2) $|z - 1 - 2i| \le 2$; 3) $1 < |z + 2 + i| < 3$.

Ответ: 1) прямоугольник с вершинами в точках $i,\ 1+i,\ 1-i,\ -i$ (стороны не включаются);
2) круг радиусом 2 с центром в точке $z=1+2i$ (окружность включается);
3) кольцо между окружностями радиусов 1 и 3 с общим центром в точке $z=-2-i$ (окружности не включаются).

13.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Модулем комплексного числа $z=x+iy$ называется число, которое обозначается $|z|$ и вычисляется по формуле

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Модуль является действительным неотрицательным числом, то есть $|z|\geq 0$. Геометрически $|z|$ – это длина вектора $\overrightarrow{OM}$ на комплексной плоскости. Равенство $|z|=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$ одновременно.

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором z называется *аргументом* z и обозначается $Arg\,z$. Он определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\leq\pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается $\arg z$. Имеет место равенство

$$Arg\,z=\arg z+2\pi k,\ k\in Z.$$

Для $z=0$ понятие аргумента не определено.
Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\varphi=\arg z=\begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{если}\quad x>0,\\ arctg\,\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{если}\quad x<0,\ y\geq 0,\\ arctg\,\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{если}\quad x<0,\ y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad x=0,\ y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad x=0,\ y<0. \end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Пример 30. Записать число $z=-8-i8\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. Вычисляем модуль и аргумент числа z.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16.$

Так как $x=-8<0,\ y=-8\sqrt{3}<0,$ то угол $\varphi=arctg\dfrac{y}{x}-\pi=arctg\sqrt{3}-\pi=-\dfrac{2}{3}\pi.$

Следовательно, $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi)+i\sin(-\dfrac{2}{3}\pi)).$

Ответ: $z=16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi)+i\sin(-\dfrac{2}{3}\pi)).$

Комплексные числа, представленные в тригонометрической форме, удобно умножать, делить, возводить в степень и извлекать из них корни. Хотя умножение, деление, возведение во вторую или третью степень несложно сделать и для чисел в алгебраической форме, например,

$$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$$

или

$$(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=1-3i+3(-1)-i^2\cdot i=1-3i-3+i=-2-2i,$$

но вычислить в алгебраической форме, например, $(2+2\sqrt{3}i)^{30}$ крайне затруднительно.

Пусть даны два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z=z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)=$$

$$=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

то есть при умножении двух чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Аналогично получаем

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

то есть при делении двух чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Для чисел, представленных в тригонометрической форме, операции умножения и деления приобретают наглядный геометрический смысл – это растяжение (сжатие) векторов и их поворот вокруг начала координат на плоскости XOY.

Из правила умножения следует формула возведения в степень

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Эта формула называется *формулой Муавра*.

Операция извлечения корня степени n из комплексного числа определяется как обратная к операции возведения в степень, а именно, комплексное число z называется *корнем степени* n из числа w и обозначается $\sqrt[n]{w} = z$, если $z^n = w$. Корень n-ой степени из числа w $(w \neq 0)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)\right),$$

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1.$$

где через $\sqrt[n]{|w|}$ обозначено арифметическое значение корня.

Пример 31. Найти все значения $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа $-8 - i8\sqrt{3}$, найденной в примере 30, и вычислим

$$\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)\right)} =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right)\right) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Положим последовательно $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Будем иметь:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Ответ: указанные выше $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$.

13.4. Показательная форма комплексного числа

Определим $e^{i\varphi}$, где i – мнимая единица, $\varphi \in R$, следующей формулой

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* Тогда любое комплексное число z можно представить в так называемой *показательной форме*

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

где r - модуль комплексного числа z, а φ - аргумент комплексного числа z.

При умножении и делении показательных функций действуют известные еще со школы правила:

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}, \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

Поэтому для комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ умножение и деление выполняются следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad \text{(в последнем случае } z_2 \neq 0\text{)}.$$

Формула Муавра возведения в степень числа $z = r\,e^{i\varphi}$ записывается в виде

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} ,$$

а формула извлечения корня степени n из числа $z = r\,e^{i\varphi}$ в виде

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пример 32. Представить число $(1-i)^3$ в показательной форме.

Решение. Вычислим модуль и аргумент числа $z = 1 - i$:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad \arg z = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

В показательной форме $z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, следовательно, $z^3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

Ответ: $z^3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

13.5. Поле комплексных чисел

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором введены два арифметических действия – сложения и умножения, образует алгебраическую структуру, называемую полем (об этом будет рассказано в § 17).

Над полем можно решать различные уравнения, в том числе алгебраические.

Основная теорема алгебры утверждает**,** что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, то есть всякий отличный от константы многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.

Следствие. Любой многочлен степени $n \geq 1$ над полем комплексных чисел имеет в нём ровно n корней, с учётом их кратности.

Данное утверждение справедливо и для многочленов с вещественными коэффициентами, так как всякое вещественное число является комплексным, с нулевой мнимой частью.

Пример 33. Решить в $\mathbb{C}$ уравнение $z^2+4z+5=0.$

Решение. Из основной теоремы алгебры следует, что в $\mathbb{C}$ квадратное уравнение $az^2+bz+c=0$ всегда имеет ровно два корня (с учетом кратности). Найдем эти корни.

Дискриминант $D=b^2-4ac=16-20=-4,$ $\sqrt{D}=\pm 2i,$ следовательно,
$z_{1,2}=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i.$ *Ответ:* $z_{1,2}=-2\pm i.$

Раздел 6. Линейные операторы, билинейные и квадратичные формы

§ 14. Линейный оператор, его матрица, ядро и базис

14.1. Линейное пространство, его базис и размерность

Множество элементов L называется *вещественным линейным пространством*, если в нём введены две операции – сложение элементов и умножение элементов на действительные числа, удовлетворяющие следующим аксиомам 1) – 8):

1) $x + y = y + x;$
2) $x + (y + z) = (x + y) + z;$
3) существует элемент θ из L, называемый нулевым, или просто нулем, такой, что $x+\theta= x$ для любого x из $L;$
4) для всякого элемента x из L существует противоположный элемент $-x$ также из L, такой, что $x +(-x) = \theta;$
5) $1\cdot x = x;$
6) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$

где x, y, z – произвольные элементы из множества L, α, β – действительные числа.

Всякое линейное пространство по определению содержит нулевой элемент. В линейном пространстве нулевой элемент единственный.

Линейное пространство, состоящее из одного нулевого элемента, называется *нулевым.*

Линейное пространство называют также *векторным*, а его элементы векторами.

Пример 34. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения является линейным пространством. Нулевым элементом является число нуль ($\theta = 0$). Равенство $x = y$ в $\mathbb{R}$ понимается как равенство действительных чисел.

Пример 35. Линейным пространством $\mathbb{R}^n$ является множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из n действительных чисел $(x_i \in \mathbb{R})$ с покомпонентным сложением и умножением на действительные числа:

$$x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n);$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

Здесь нулевой элемент $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$.

В частности, при $n = 2$ и $n = 3$ линейное пространство $\mathbb{R}^n$ можно геометрически интерпретировать как множество свободных векторов двумерной плоскости и трехмерного пространства соответственно. В этом случае плоскость $\mathbb{R}^2$ обозначают через V^2, а пространство $\mathbb{R}^3$ через V^3.

Система векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, для которых выполняется равенство

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + ... + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}\cdot$$

Система векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ называется *линейно независимой,* если из равенства

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + ... + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0\cdot$

Теорема. Система векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор системы является линейной комбинацией остальных векторов.

Если в линейном пространстве существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ вектора линейно зависимы, то число n называется размерностью этого пространства. Пишут $\dim L = n.$ Пространство размерности n называется n-мерным пространством.

Очевидно, что любая система векторов n-мерного пространства, содержащая векторов больше n, линейно зависима.

Базисом n-мерного векторного пространства называется упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов этого пространства.

Базисом в трехмерном пространстве V^3 являются любые три некомпланарных вектора этого пространства, базисом плоскости V^2 являются любые три неколлинеарных вектора, лежащих в этой плоскости.

Теорема. Любой вектор пространства L представим в виде линейной комбинации векторов базиса, причем единственным образом.

Следовательно, если $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ – базис n-мерного пространства, то для любого вектора $\overline{x}$ найдется единственная совокупность коэффициентов $x_1, x_2, ..., x_n$ такая, что

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n$$

Последнее равенство называют разложением вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$, а коэффициенты $x_1, x_2, ..., x_n$ – координатами вектора $\overline{x}$ в этом базисе. Тот факт, что вектор $\overline{x}$ имеет координаты $x_1, x_2, ..., x_n$ в некотором базисе, будем записывать следующим образом:

$$\overline{x} = \{x_1, x_2, \ ..., x_n\}.$$

14.2. Понятия линейного оператора и его матрицы

Пусть L и $\tilde{L}$ – два линейных пространства.

Отображением $\varphi : L \to \tilde{L}$ называется закон, по которому $\forall$ вектору $\overline{x} \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $\overline{y} \in L$.

$$\overline{y} = \varphi(\overline{x}) \text{ – образ элемента } \overline{x}.$$

Отображение φ называется *линейным*, если для $\forall\, \overline{x}, \overline{x}^1 \in L$ и для $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения:

$$\varphi(\overline{x} + \overline{x}^1) = \varphi(\overline{x}) + \varphi(\overline{x}^1),$$
$$\varphi(\alpha\overline{x}) = \alpha \cdot \varphi(\overline{x}).$$

Линейное отображение также называют *линейным оператором.*

Если пространства L и L совпадают, то получаем частный случай φ – *линейное преобразование*.

Пример 36. Оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан условием:

$$\varphi \ : \ \overline{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \to \{2x_1 + x_2, 3x_2, 0\}.$$

Доказать линейность φ.

Доказательство. Возьмем два произвольных вектора из $\mathbb{R}^3$

$$\overline{x}=\{x_1,x_2,x_3\} \text{ и } \overline{z}=\{z_1,z_2,z_3\},$$

тогда

$$\overline{x}+\overline{z}=\{x_1+z_1,x_2+z_2,x_3+z_3\}, \quad \lambda\overline{x}=\{\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3\}.$$

Вычислим

$$\varphi(\overline{x}+\overline{z})=\{2(x_1+z_1)+(x_2+z_2);3(x_2+z_2);0\}=$$

$$=\{2x_1+x_2;3x_2;0\}+\{2z_1+z_2;3z_2;0\}=\varphi(\overline{x})+\varphi(\overline{z})$$

$$\varphi(\lambda\overline{x})=\{2\lambda x_1+\lambda x_2,3\lambda x_2,0\}=\lambda\{2x_1+x_2,3x_2,0\}=\lambda\varphi(\overline{x}).$$

Получили:

$$\varphi(\overline{x}+\overline{z})=\varphi(\overline{x})+\varphi(\overline{z}) \text{ и } \varphi(\lambda\overline{x})=\lambda\varphi(\overline{x}),$$

что и доказывает линейность данного оператора.

Пусть $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ – базис в пространстве L, а $\overline{h}_1,\overline{h}_2,...,\overline{h}_m$ – базис в пространстве L.

Матрицей линейного оператора φ относительно базисов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ в пространстве L и $\overline{h}_1,\overline{h}_2,...,\overline{h}_m$ в пространстве L называется матрица A_φ, столбцами которой являются координаты образов базисных векторов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ в базисе $\overline{h}_1,\overline{h}_2,...,\overline{h}_m$.

Матрица $A_\varphi=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ имеет размерность $m \times n$.

Линейный оператор φ можно записать в координатном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=A_\varphi\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пример 37. Пусть V^2 – множество всех векторов на плоскости, на которой задана некоторая декартова система координат с осями Ox_1 и Ox_2, пусть $\varphi:V^2\to V^2$– отображение, которое каждому вектору $x\in V^2$ ставит в соответствие его проекцию на ось Ox_1.

Найти матрицу линейного оператора φ и записать линейный оператор в матричном виде.

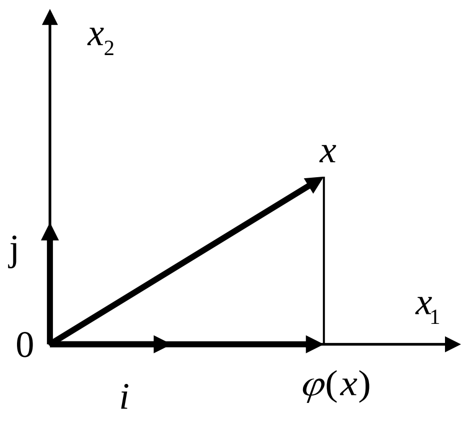


Рис. 28

Решение. Векторы единичной длины $\overline{i}, \overline{j}$, указывающие положительное направление осей Ox_1 и Ox_2, образуют один из базисов в пространстве всех векторов плоскости. Найдем образы базисных векторов:

$$\varphi(\overline{i}) = \overline{i} = 1\overline{i} + 0\overline{j}, \ \varphi(\overline{j}) = 0 = 0\overline{i} + 0\overline{j}.$$

Следовательно, матрица оператора $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а линейный оператор можно

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 38. Пусть $L = P_2[x]$ – множество многочленов степени меньше или равно двум, $\varphi : L \to L$ – оператор дифференцирования, пусть в L выбран базис $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$. Доказать линейность оператора и найти его матрицу.

Решение. Линейность оператора в данном случае следует из хорошо известных правил дифференцирования: 1) производная суммы двух функций равна сумме их производных, 2) число выносится за знак производной.

Для нахождения матрицы оператора вычислим координаты образов базисных векторов:

$\varphi(e_1) = 1' = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3,$ $\qquad \varphi(e_2) = (x)' = 1 = e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3,$

$\varphi(e_3) = (x^2)' = 2x = 2e_2 = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3.$

Получаем матрицу $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 39. Пусть $L = V^2$, $\varphi : L \to L$ – оператор поворота всех векторов плоскости на угол α. Написать матрицу линейного оператора.

Решение. Пусть на плоскости выбран некоторый базис из перпендикулярных векторов единичной длины. Тогда базисные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ в результате поворота перейдут в векторы

$$\varphi(\overline{e}_1) = \cos\alpha \cdot \overline{e}_1 + \sin\alpha \cdot \overline{e}_2,$$

$$\varphi(\overline{e}_2) = -\sin\alpha \cdot \overline{e}_1 + \cos\alpha \cdot \overline{e}_2.$$

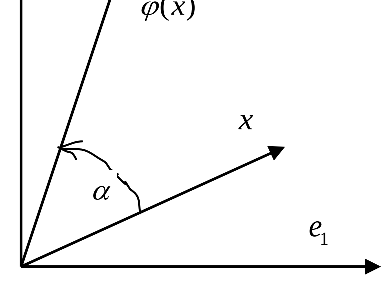


Рис. 29

Следовательно, $A_\varphi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \scriptstyle\varphi(e_1) & \scriptstyle\varphi(e_2) \end{array} \end{array}$.

14.3. Свойства линейных операторов

1) Если $\varphi_1 : L_1 \to L_2$ и $\varphi_2 : L_1 \to L_2$ линейные операторы с матрицами A_{φ_1} и A_{φ_2}, то их сумма $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, т.е. $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$ есть линейный оператор с матрицей $A_{\varphi_1} + A_{\varphi_2}$.

2) Если $\varphi_1 : L_1 \to L_2$ и $\varphi_2 : L_2 \to L_3$ линейные операторы с матрицами A_{φ_1} и A_{φ_2}, то их произведение $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, т.е. $\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$, есть линейный оператор с матрицей $A_{\varphi_2} \cdot A_{\varphi_1}$.

В дальнейшем матрицу линейного оператора A_φ будем обозначать через A.

14.4. Ядро и образ линейного оператора

Ядром линейного оператора $\varphi : L_1 \to L_2$ называется множество

$$\ker\varphi = \{x \in L_1 : \varphi(x) = 0\},$$

другими словами, ядро – это множество прообразов нуля.

Образом линейного оператора $\varphi : L_1 \to L_2$ называется множество значений оператора, то есть множество

$$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in L_2 : \exists x \in L_1,\ y = \varphi(x)\}.$$

В примере 37 образом $\operatorname{Im}\varphi$ линейного оператора φ является ось Ox_1, а ядром $\ker\varphi$ является ось Ox_2.

Теорема. Пусть A – матрица линейного оператора $\varphi : L_1 \to L_2$. Тогда ядро $\ker\varphi$ оператора является подпространством пространства L_1 размерности $\dim L_1 - \operatorname{rang} A$, а образ $\operatorname{Im}\varphi$ оператора является подпространством пространства L_2 размерности $\operatorname{rang} A$, то есть

$$\dim(\ker\varphi) = \dim L_1 - \operatorname{rang} A,$$

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \operatorname{rang} A.$$

Пример 40. Линейный оператор φ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти образ $\operatorname{Im}\varphi$, ядро $\ker\varphi$ и их размерность.

Решение. Находим $\operatorname{Im}\varphi$ из условия: $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$.

Запишем это условие в виде системы

$$\begin{cases}-2x_1+5x_2+3x_3=y_1\\-2x_1+5x_2+3x_3=y_2\\-(-2x_1+5x_2+3x_3)=y_3\end{cases}.$$

Из системы видно, что $y_1=y_2=-y_3$, поэтому множество $\operatorname{Im}\varphi$ можно задать в виде

$$\operatorname{Im}\varphi=\left\{\bar{y}=c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Очевидно, что $\dim(\operatorname{Im}\varphi)=1$.

Ядро $\ker\varphi$ линейного оператора находим из системы: $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$.

Решаем систему

$$\begin{cases}-2x_1+5x_2+3x_3=0\\-2x_1+5x_2+3x_3=0\\-(-2x_1+5x_2+3x_3)=0\end{cases}\Leftrightarrow -2x_1+5x_2+3x_3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}(5c_2+3c_1)\\x_2=c_2\\x_3=c_1\end{cases}.$$

Множество решений этой системы можно записать в виде

$$ker\varphi=\left\{c_1\begin{pmatrix}3/2\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5/2\\1\\0\end{pmatrix},c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\},$$

откуда видно, что $\dim(\ker\varphi)=2$.

Ответ: $\dim(\operatorname{Im}\varphi)=1$, $\dim(\ker\varphi)=2$.

§15. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

15.1. Основные понятия

Собственным вектором линейного оператора с матрицей A, соответствующим *собственному значению* λ, называется ненулевой вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условию:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}.$$

Если вектор $\vec{x}$ является собственным, то любой вектор $\alpha \cdot \vec{x}$ $(\alpha \neq 0)$, ему коллинеарный, тоже является собственным.

Собственные значения линейного операторы (или матрицы) находят из так называемого *характеристического уравнения:*

$$det(A - \lambda E) = 0.$$

Соответствующий многочлен $det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом.*

Для нахождения собственного вектора, соответствующего собственному значению λ, нужно решить систему линейных уравнений

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0.$$

Пример 41. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристический многочлен

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Решив характеристическое уравнение $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$, найдем его корни

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$$

Для нахождения собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 1$, решим систему

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

подставив $\lambda_1 = 1$ вместо λ.

Получим $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ или $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Получаем, что система имеет бесконечно много решений вида

$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 2c, \\ x_3 = c \end{cases}$ где $c \in \mathbb{R}$. Поэтому собственный вектор $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c,$ где $c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$

Аналогично для $\lambda_2 = 2$ получаем собственный вектор $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c$

и для $\lambda_3 = 3$ собственный вектор $\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot c,$ где $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0.$

Ответ: $\lambda_1 = 1, \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c$; $\lambda_2 = 2,$ $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c;$ $\lambda_3 = 3, \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot c,$

где $c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$

15.2. Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора

1. Все собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство.

2. Если собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$, соответствуют попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, то векторы линейно независимы.

3. Пусть собственное значение λ_0 является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда ему соответствует не более s линейно независимых собственных векторов.

4. Линейный оператор имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда он не является взаимно-однозначным.

5. Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

§16. Линейные, билинейные и квадратичные формы

16.1. Основные определения и примеры

Линейной формой или *линейным функционалом* на пространстве L называется всякий линейный оператор $\varphi : L \to \mathbb{R}$ с числовыми значениями.

Пример 42. Оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданный формулой

$$\varphi(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

является линейным. Свойство линейности есть следствие основных свойств определителя.

Билинейной формой на пространстве L называется всякая числовая функция двух векторных аргументов, линейная по каждому аргументу, то есть для всех $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R}$

$$B(x+y,z) = B(x,z) + B(y,z), \quad B(\lambda x, y) = \lambda B(x,y),$$
$$B(x,y+z) = B(x,y) + B(x,z), \quad B(x,\lambda y) = \lambda B(x,y).$$

Пример 43. В пространстве $L=\mathbb{R}^3$ одной из билинейных форм является функция

$$B(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Ее линейность по каждому из аргументов есть непосредственное следствие основных свойств определителя.

Пример 44. В пространстве $L = C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций одной из билинейных форм является функция $B(x,y) = \int\limits_a^b K(t)x(\mathrm{t})\,\mathrm{y}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$, где K – заданная непрерывная функция. Линейность $B(x,y)$ по каждому из аргументов есть непосредственное следствие основных свойств интеграла (интеграл суммы функций равен сумме интегралов, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла).

Билинейная форма называется *симметричной*, если ее значения не изменяются при перестановке аргументов: $B(x, y) = B(y, x)$ для всех $x, y \in L$.

Теорема. Билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда в одном (и тогда в любом) из базисов ее матрица симметрична.

Квадратичной формой на пространстве L называется всякая такая числовая функция $Q : L \to \mathbb{R}$, что $Q(x) = B(x, x)$ для некоторой симметричной билинейной формы B при всех $x \in L$. О такой симметричной билинейной форме будем говорить, что она порождает квадратичную форму Q.

Теорема. Существует только одна симметричная билинейная форма, порождающая данную квадратичную форму.

Матрицей квадратичной формы называется матрица A соответствующей симметричной билинейной формы. Таким образом, в координатах квадратичная форма может быть записана как $Q(x) = X^T A X$, где A – симметричная матрица, X – столбец координат, ^{T} означает транспонирование, то есть

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} 2a_{ij} x_i x_j.$$

Пример 45. Квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 - 7x_3^2 + x_1 \cdot x_2 - 4x_1 x_3 + 5x_2 x_3$$

может быть записана в матричной форме

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 4 & 5/2 \\ -2 & 5/2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

16.2. Закон инерции для квадратичных форм

Будем говорить, что квадратичная форма в некотором базисе имеет *канонический вид*, если в этом базисе ее матрица диагональна, то есть все элементы матрицы, расположенные вне ее главной диагонали равны нулю.

Канонический вид: $Q(x) = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$

Всякую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, то есть найти базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Коэффициенты λ_i зависят от выбора такого базиса. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема (закон инерции для квадратичных форм). Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в записи квадратичной формы $Q(x)$ в каноническом виде

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

не зависит от выбора базиса, относительно которого форма имеет такой вид.

Один из способов приведения квадратичных форм к каноническому виду основан на выделении полных квадратов, а другой способ заключается в нахождении собственных значений и собственных векторов матрицы квадратичной формы. В базисе из собственных векторов матрица A квадратичной формы $Q(x)$ будет иметь диагональный (канонический) вид, причем диагональные элементы матрицы совпадают с её собственными значениями.

Пример 46. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Решение. *Способ 1* – выделение полных квадратов.

$$Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 5(x_1^2 + \frac{4}{5}x_1x_2 + \frac{4}{25}x_2^2) + \frac{36}{5}x_2^2 =$$

$$= 5(x_1 + \frac{2}{5}x_2)^2 + \frac{36}{5}x_2^2 = 5(x_1')^2 + \frac{36}{5}(x_2')^2.$$

Здесь формула перехода от одних координат к другим

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Новый базис $e_1' = e_1, e_2' = -\frac{2}{5}e_1 + e_2$ составлен из неперпендикулярных векторов, что характерно для данного метода приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Согласно закону инерции все коэффициенты в записи данной формы $Q(x)$ в каноническом виде будут положительными независимо от выбора базиса.

2) *Способ 2* – нахождение собственных значений и собственных векторов.

Выпишем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Составим и решим характеристическое уравнение $det(A-\lambda E)=0.$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda)-4=\lambda^2-13\lambda+36=0.$$

Характеристическое уравнение имеет два действительных корня $\lambda_1=4, \lambda_2=9.$

Подставив $\lambda_1=4$ в уравнение $(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0,$ получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+4x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1+2x_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2c \\ x_2=c \end{cases}, \text{ где } c\in\mathbb{R},\ c\neq 0.$$

При подстановке $\lambda_2=9$ в уравнение $(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0,$ получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1+2x_2=0 \\ 2x_1-x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1-x_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=c \\ x_2=2c \end{cases},$$

где $c\in\mathbb{R},\ c\neq 0.$

Таким образом, в базисе из собственных векторов $\vec{h}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{h}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ матрица $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ имеет канонический (диагональный) вид, и квадратичная форма записывается в виде $Q(x_1', x_2')=(x_1', x_2')\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

или $Q(x)=4(x_1')^2+9(x_2')^2.$

Заметим, что собственные вектора $\vec{h}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{h}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ортогональны, в чем можно убедиться, вычислив их скалярное произведение.

§17. Алгебраические структуры: группы, кольца, поля

17.1. Определения и примеры

Декартовым произведением (или просто произведением) *множеств* X и Y называется множество всех упорядоченных пар, первый элемент которых принадлежит X, а второй – множеству Y.
Произведение этих множеств обозначается как $X\times Y$:

$$X\times Y=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}.$$

Пусть дано произвольное множество X.

Бинарной операцией на X называется отображение $*: X\times X\to X$ такое, что любой упорядоченной паре $(a,b)\in X\times X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $a*b\in X$. Также говорят, что множество X *замкнуто относительно операции* $*$, если ее применение не выводит за его пределы.

Примерами бинарных операций являются операции сложения и умножения в числовых множествах, операции $\cap$ и $\cup$ в множестве подмножеств данного множества, и т.д.

Операцию на множестве X можно задавать различными способами.

Если множество X – конечно и все его элементы известны, то операцию $*$ на X удобно задавать в виде таблицы Кэли.

$*$	a_1	a_2	$\dots$	a_n
a_1				
a_2				
$\dots$				
a_n				

Это квадратная таблица. В верхнем левом углу ставится знак рассматриваемой операции (в нашем случае – это $*$). Под этим знаком $*$ в первом столбце записываются все элементы множества X. Это – первые компоненты a пар (a,b), для которых будут указываться композиции. В первой же строке таблицы напротив символа $*$ тоже будут записаны все элементы множества X. Это будут вторые компоненты b. В клеточке на пересечении соответствующей строки и столбца для пары (a,b) будет стоять композиция $a*b$.

Пример 47. Пусть множество X состоит из двух элементов $X=\{a,b\}$.

Операция $*$ задана таблицей:

$*$	a	b
a	b	a
b	a	b

Эта операция является бинарной и ее применение не выводит за множество *X*.

Если множество X – бесконечное, то операция $*$ задается в виде правила получения композиции элементов $a*b$ по данным элементам a и b из множества X.

Пример 48. Пусть X – множество матриц, размера $m\times n$ с вещественными элементами. Операцию сложения "$+$" на множестве матриц задаем следующим образом: если $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$, то

$$A+B=C=(c_{ik}),\ \text{где } c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}.$$

Заметим, что сложение матриц произвольной размерности не является бинарной операцией, т.к. не для любых двух матриц существует их сумма.

Бинарная операция $*$ называется *ассоциативной*, если $(a*b)*c=a*(b*c)$ и *коммутативной*, если $a*b=b*a$ при всех a,b и c, принадлежащих X.

Множество X , вместе с одной или несколькими бинарными операциями, определенными на этом множестве называют *алгебраической структурой.*

Рассмотрим сначала алгебраическую структуру (X, *) с одной бинарной операцией.

Элемент $e \in X$ называется *единичным* (нейтральным) относительно бинарной операции $*$, если

$$e * a = a * e = a \text{ для любого } a \in X .$$

Нейтральный элемент относительно сложения называется *нулевым* элементом или просто нулем и обозначается соответствующей цифрой 0; тогда пишут:

$$0 + a = a + 0 = a \text{ для любого } a \in X.$$

Нейтральный элемент относительно умножения называется единичным элементом или просто единицей и обозначается либо цифрой 1, либо буквами e или E.

Теорема. Пусть (X, *) – алгебраическая структура. Тогда, если в множестве X существует нейтральный элемент, то он единственный.

Важной алгебраической структурой с одной бинарной операцией является группа.

Группой называется множество G с заданной на нем бинарной операцией $*$, которая:

1) ассоциативна,
2) имеет единичный элемент e,
3) для каждого $g \in G$ имеет обратный элемент g^{-1} такой, что

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e.$$

Группа называется *коммутативной*, если операция $*$ коммутативна, то есть выполняется свойство

4) $a * b = b * a$.

Коммутативная группа в честь Н.Х. Абеля, впервые применившего такие группы к теории уравнений, называется также *абелевой*.

Пример 49.

1. Множества чисел $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ относительно операции сложения "$+$" являются коммутативными группами. Единичным (нейтральным) элементом по сложению будет число 0. Операцию вычитания "–" рассматриваем как прибавление обратного элемента.

2. Множество всех невырожденных квадратных матриц порядка n будет группой относительно умножения. Единичным элементом будет единичная матрица E .

Теперь рассмотрим алгебраические структуры с двумя бинарными операциями – поле и кольцо.

Множество с двумя операциями "$+$" и "$\cdot$" называется *кольцом*, если по сложению оно является коммутативной группой, то есть выполняются свойства 1) – 4) (единичный элемент по сложению обозначается 0) и выполнены следующие свойства 5) — 7):

5) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ – ассоциативность по умножению,

6) существует единица по умножению (ее обозначают 1),

7) $(a+b)\cdot c = ac+bc$; $a\cdot(b+c) = ab+ac$ – умножение и сложение связывает свойство дистрибутивности.

Если операция умножения имеет еще и обратный элемент для всех элементов, кроме 0 (на ноль делить нельзя) и умножение коммутативно, то это кольцо будет *полем*. Повторим другими словами.

Полем называется алгебраическая структура, являющаяся коммутативной группой по сложению, ненулевые элементы которой образуют коммутативную группу по умножению. Причем умножение и сложение связаны законом дистрибутивности. То есть, поле – это коммутативное кольцо, в котором возможно деление на ненулевые элементы.

Из векторной алгебры известна еще одна алгебраическая структура – *векторное пространство* над множеством (полем) действительных чисел. Над произвольным полем K определение векторного пространства аналогичное.

Векторное пространство над полем K – это множество V с двумя операциями: сложением элементов и умножением на элемент из поля K. Операции эти должны подчиняться обычным аксиомам ассоциативности, коммутативности и т.д.

17.2. Кольцо Z_m вычетов по модулю m

Рассмотрим множество целых чисел Z и возьмем некоторое натуральное число $m > 1$. Известно, что для любого целого числа a и натурального m существует и притом единственная пара целых чисел q и r, удовлетворяющая условиям:

1) $a = mq + r$,

2) $0 \le r < m$

(r называют остатком от деления a на m, q называют неполным частным от деления a на m).

Разделим каждое число a на m. У каждого числа будет однозначно определен остаток. Остатками могут быть только числа 0, 1, 2,…, m–1.

Введем на множестве $\boldsymbol{Z}$ отношение «быть равноостаточными при делении на m», т.е. $a\sim b$ тогда и только тогда, когда числа a и b при делении на m имеют один и тот же остаток.

Введенное отношение является отношением эквивалентным, т.к.

1) для любого целого числа a верно, что $a\sim a$,
2) если $a\sim b$, то $b\sim a$,
3) если $a\sim b$, $b\sim c$, то $a\sim c$.

В дальнейшем это отношение будем называть отношением сравнимости целых чисел по модулю m и если $a\sim b$, то будем писать

$$a = b(\text{mod } m).$$

Например, 5 = 2 (mod 3), –2 = 5 (mod 7), 13 = 10 (mod 3), $5 \neq 1$(mod 3).

Таким образом, получаем определение:

Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m $(m \in N)$, если при делении на m они дают одинаковые остатки. Число m называется модулем сравнения.

Возьмем какое-нибудь число $a \in Z$. Объединим в один класс (множество) все целые числа x, которые сравнимы с a по mod m, то есть все целые числа x, которые имеют такой же остаток от деления на m, что и число a. Этот класс обозначим символом Cla. Число a называют представителем этого класса.

Если число b не попало в Cl_a, то есть, если число b при делении на m имеет другой остаток, то для этого числа мы создаем Cl_b, и т.д.

В результате множество Z разобьется на классы Cl_a, Cl_b, Cl_c, …. Каждый класс характеризуется своим представителем и всеми членами, сравнимыми с этим представителем по $\text{mod}\, m$. Так как, если $a_1 = a_2(\text{mod } m)$, то $\mathrm{Cl}_{a_1} \equiv \mathrm{Cl}_{a_2}$ и, следовательно, любое число, входящее в данный класс, может считаться его представителем. Тогда, множество целых чисел может быть разбито по mod m на классы Cl_0, Cl_1, Cl_2,…, Cl_{m-1}, где 0, 1, 2,…, m–1 – остатки при делении целых чисел по $\text{mod}\, m$. Эти классы называют классами вычетов по mod m, а их множество обозначают символом Z_m и называют *множеством классов вычетов по mod m.*

Значит, Z_m ={Cl_0, Cl_1, Cl_2,…, Cl_{m-1}}. Для упрощения записи слово "класс" часто не пишут, а пишут

$$Z_m = \left\{\bar{0},\, \bar{1},\, \bar{2},\ldots,\, \overline{m-1}\right\},$$

где через $\bar{k}$ обозначены остатки от деление на число m.

Но в этом случае не надо забывать, что символ "0" - это не символ числа, а символ класса вычетов Cl_0={x | $x \in Z$, $x = mq$, $q \in Z$ }, символ "1" – символ класса вычетов Cl_1={x | $x \in Z$, $x = mq + 1$, $q \in Z$ } и т.д.

Заметим, что в каждом классе вычетов находится бесконечно много целых чисел.

Пример 50. Множество Z_3 классов вычетов по модулю 3 состоит из трех классов: $Z_3 = \{Cl_0, Cl_1, Cl_2\}$, где

$Cl_0=\{x \mid x\in Z, x = 3q, q\in Z\}=\{0, 3,-3, 6,-6, \ldots\}$,
$Cl_1=\{x \mid x\in Z, x = 3q + 1, q\in Z\}=\{1, 4,-2, 7,-5, \ldots\}$,
$Cl_2=\{x \mid x\in Z, x = 3q + 2, q\in Z\}=\{2, 5, -4, 8,-1, \ldots\}$.

Два класса равны $Cl_a = Cl_b$ тогда и только тогда, когда a и b имеют один и тот же остаток при делении на m.

На множестве Z_m определим операции сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" следующим образом.

Суммой классов с представителями a и b является тот класс, где находится число $a + b$.

$$Cl_a + Cl_b = Cl_{a+b}.$$

Произведением классов с представителями a и b является тот класс, где находится число $a\cdot b$.

$$Cl_a \cdot Cl_b = Cl_{ab}.$$

Например, в Z_6 имеем: $Cl_2 + Cl_8 = Cl_4$, $Cl_2 \cdot Cl_8 = Cl_4$.

Действительно, сумма $2 + 8 = 10$ при делении на 6 имеем остаток 4, а произведение $2\cdot 8 = 16$ при делении на 6 имеем остаток 4.

Важное свойство: сложение и умножение классов не зависит от выбора представителей этих классов:

$$Cl_a + Cl_b = Cl_{a_1} + Cl_{b_1}, \qquad Cl_a \cdot Cl_b = Cl_{a_1} \cdot Cl_{b_1}.$$

Введение операций сложения и умножения превращает Z_m в *кольцо вычетов по модулю* m.

Проверим выполнимость аксиом кольца на множестве Z_m относительно введенных операций сложения и умножения классов.

1. Так как каждое целое число при делении на $m\in N$, $m\neq 1$, обязано иметь однозначно определённый остаток, то каждое целое число обязано находиться по $\mathrm{mod}\, m$ в каком-то классе, определённом однозначно. Поэтому класс $Cl_a + Cl_b = Cl_{a+b}$ обязан существовать в Z_m.

2. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность сложения и умножения классов следует из соответствующих свойств целых чисел. Например, свойство $Cl_{(ab)\cdot c} = Cl_{a\cdot(bc)}$ следует из свойства $(ab)\cdot c = a\cdot(bc)$.

3. Относительно сложения в Z_m имеется нейтральный элемент (ноль). Это Cl_0. Действительно, $Cl_0 + Cl_a = Cl_{0+a} = Cl_a$ для любого $Cl_a \in Z_m$.

4. Относительно умножения в Z_m имеется нейтральный элемент (единица). Это Cl_1. Действительно, $Cl_1 \cdot Cl_a = Cl_{1a} = Cl_a$ для любого $Cl_a \in Z_m$.

5. Для любого $Cl_a \in Z_n$ существует противоположный класс $-Cl_a = Cl_{-a}$, так как $Cl_a + Cl_{-a} = Cl_{a+(-a)} = Cl_0$.

Итак, мы можем сказать, что Z_m *есть коммутативное кольцо с единицей,* в котором содержится m элементов (классов).

Если операция умножения имеет еще и обратный элемент для всех элементов, кроме 0 и умножение коммутативно, то это кольцо будет полем.

Теорема. Кольцо вычетов Z_m является полем тогда и только тогда, когда m – простое число.

Следствие. Если m – простое число, то для любого ненулевого элемента x множества Z_m (пишут $x \in Z_m \setminus \{0\}$) существует единственный обратный элемент, и тогда любое линейное уравнение в поле Z_m имеет единственное решение.

Пример 51. Решить уравнение $\bar{3}x + \bar{7} = \bar{2}$ в Z_{11}.

Решение. $\bar{3}x = -\bar{5} \pmod{11}$.

Число –5 принадлежит классу вычетов, состоящему из чисел вида $\{-5 + 11k,\ где\ k \in Z\} = -\bar{5}$. Положив $k = 1$, получим $-5 = 6 \pmod{11}$ и наше уравнение примет вид $\bar{3}x = \bar{6} \pmod{11}$

Откуда получаем $x = \bar{2}$. *Ответ:* $x = \bar{2}$.

Замечание. В примере 51 число 11 является простым, следовательно, данное линейное уравнение имеет единственное решение. В случае если m не является простым числом, то линейное уравнение может иметь несколько решений или не иметь решений вообще.

Пример 52. Решить уравнение в Z_6 следующие уравнения:

а) $\bar{2}x = \bar{2}$; б) $\bar{3}x = \bar{0}$; в) $\bar{3}x + \bar{7} = \bar{2}$.

Решение. а) Напишем таблицу сложения и умножения для Z_6:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Из четвертой строки таблицы умножения видно, что решением уравнения являются два числа $x_1 = \overline{1},\ x_2 = \overline{4},$ так как 2·1= 2, 2·4 = 2.

б) Из пятой строки таблицы умножения видим, что три числа при умножении на 3 дают в результате 0, это числа 0, 2 и 4.

Следовательно, уравнение имеет три решения $x_1 = \overline{0},\ x_2 = \overline{2},\ x_3 = \overline{4}.$

Этот пример показывает, что существуют ненулевые делителя нуля.

в) $\overline{3}x + \overline{7} = \overline{2} \Leftrightarrow \overline{3}x = -\overline{5}\left(\operatorname{mod}\ 6\right) \Leftrightarrow \overline{3}x = \overline{1}\left(\operatorname{mod}\ 6\right)$

Далее решать данное уравнение аналогично примеру 51 нельзя, так как m = 6 не является простым числом, а Z_6 соответственно не является полем. Из пятой строки таблицы умножения видим, что нет таких чисел, при умножении которых на 3 получается 1. Значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: а) $x_1 = \overline{1},\ x_2 = \overline{4};$ б) $x_1 = \overline{0},\ x_2 = \overline{2},\ x_3 = \overline{4};$ в) решений нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – СПб.: Лань, 2004. – 356 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2003. – 303 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1.– М.: Физматлит, 1999. – 426 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – СПб.: Лань, 2010. – 224 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 608 с.
6. Туганбаев А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Задачи и упражнения. – ЭБС. iqlib.ru.