**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

О.Г. Илларионова, И.В. Платонова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических заданий

*для студентов II курса
направления 25.03.02
очной формы обучения*

Москва - 2017

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики
О.Г. Илларионова, И.В. Платонова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических заданий

для студентов II курса
направления подготовки 25.03.02
очной формы обучения

Москва - 2017

ББК 518
С17

Рецензент – доцент Ухова В.А.

Илларионова О.Г., Платонова И.В.

С17 Высшая математика. Учебно-методическое пособие по выполнению практических заданий. - М.: МГТУ ГА, 2017. - 48 с.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Высшая математика» по учебному плану для студентов II курса по направлению подготовки 25.03.02 очной формы обучения.

В пособии содержатся варианты двух контрольных домашних заданий по темам «Ряды», «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление», приведены образцы решения наиболее трудных задач и некоторые справочные материалы из курса высшей математики, необходимые для выполнения КДЗ.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 12.09.2017 г. и методического совета 24.10.2017 г.

Подписано в печать 10.11.2017 г.

Печать офсетная Формат 60x84/16 0,44 уч.-изд. л.

2,77 усл.печ.л. Заказ № Тираж экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 1
Тема «Ряды»

Задачи 1-4. Исследовать сходимость знакоположительных рядов.
Задача 5. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.
Задача 6. Найти область сходимости степенного ряда.
Задача 7. Разложить функцию в ряд Маклорена. Указать область сходимости.
Задача 8. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.
Задача 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$.
Задача 10. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

Вариант № 1

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^3 n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n}$

7. $f(x) = \sqrt{1+x}$ 8. $\int\limits_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ 9. $y' = \sin x + y^2; \quad y(0) = 1$

10. $f(x) = x, \quad (-2 < x < 2)$

Вариант № 2

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^4+3}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^3}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot (x-3)^n$

7. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ 8. $\int\limits_0^1 \cos x^2 \cdot dx$ 9. $y' = y + y^2; \quad y(0) = 3$

10. $f(x) = |x| + 1, \quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 3

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{3n-1}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (x+2)^n}{n}$

7. $f(x) = \frac{1}{4-x}$ 8. $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx$ 9. $y' = 2e^y - xy; \quad y(0) = 0$

10. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 4

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot 2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x-1)^n}{n!}$

7. $f(x) = \frac{6}{2x+3}$ 8. $\int_0^{0,25} \frac{\sin x}{x} dx$ 9. $y' = e^x + y^2; \quad y(0) = 0$

10. $f(x) = 2x+1, \quad (-1 < x < 1)$

Вариант № 5

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (x+1)^n$

7. $f(x) = \ln(1-x)$ 8. $\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx$ 9. $y' = \cos x + y^2; \quad y(0) = 1$

10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 2 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 6

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!\cdot 2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+1}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot(x-1)^n}{3^n}$

7. $f(x)=\sqrt{4+x}$ 8. $\int_0^{0,5} e^{\frac{-x^2}{4}}dx$ 9. $y'=e^x+y; \quad y(0)=4$

10. $f(x)=x+1, \quad (-\pi<x<\pi)$

Вариант № 7

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^2+3}$ 5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2}$

7. $f(x)=2\cos^2 x$ 8. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$ 9. $y'=x^2+y^2; \quad y(0)=1$

10. $f(x)=|x|, \quad (-3<x<3)$

Вариант № 8

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{1+n^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+2}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\cdot e^{-n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{4n}{n+1}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n+1}}$

7. $f(x)=\ln(1+x^2)$ 8. $\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$ 9. $y'=\sin x+\frac{y^2}{2}; \quad y(0)=1$

10. $f(x)=x-1, \quad (-1<x<1)$

Вариант № 9

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+5n+1}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{8^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^n$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n^3}}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 5^n}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$

7. $f(x)=\frac{1}{1-x^4}$ 8. $\int\limits_0^{0,2}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ 9. $y'=2e^y+xy;\quad y(0)=0$

10. $f(x)=2x,\quad (-5<x<5)$

Вариант № 10

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\cdot 3^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9+n^2}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2n^2-1}$

7. $f(x)=\frac{x}{1+x^3}$ 8. $\int\limits_0^1\sin(x^3)\cdot dx$ 9. $y'=x+x^2+y^2;\quad y(0)=5$

10. $f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } -\pi<x\le 0\\ 1 \text{ при } 0<x<\pi\end{cases},\quad (-\pi<x<\pi)$

Вариант № 11

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+2}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x+4)^n}{n+1}$

7. $f(x)=x\cdot e^{3x}$ 8. $\int\limits_0^1\frac{\sin x^2}{x}dx$ 9. $y'=\cos x-y^2;\quad y(0)=2$

10. $f(x)=1-x,\quad (-\pi<x<\pi)$

Вариант № 12

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ 3. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$

7. $f(x) = \ln(1+2x)$ 8. $\int_0^{0,5} \sin(4x^2)\, dx$ 9. $y' = e^x + 2y^2; \quad y(0) = 1$

10. $f(x) = 2|x|, \quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 13

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+2)^n$

7. $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ 8. $\int_0^{0,4} e^{\frac{-3x^2}{4}}\, dx$ 9. $y' = y^2 - y; \; y(0) = -2$

10. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 14

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{3^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{3n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-7)^n}{n+1}$

7. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ 8. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ 9. $y' = e^x + 2xy; \quad y(0) = 0$

10. $f(x) = 2x + 3, \quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 15

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+6)}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^n$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^4 n}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{n^2}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$

7. $f(x) = \sqrt{1+4x}$ 8. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$ 9. $y' = 3y^2 - 2\sin x;\quad y(0) = 2$

10. $f(x) = 3 - x, \quad (-3 < x < 3)$

Вариант № 16

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+n+7}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^{n+1}}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n^2}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{3/2} n}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

7. $f(x) = \sqrt{1-x}$ 8. $\int\limits_0^{1/2} \cos\sqrt{x} \cdot dx$ 9. $y' = 5e^x - y + x;\quad y(0) = 1$

10. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } -3 < x \le 0 \\ 2 \text{ при } 0 < x < 3 \end{cases}, \quad (-3 < x < 3)$

Вариант № 17

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n-1}}{2^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}$ 5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$

7. $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ 8. $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\, dx$ 9. $y' = 2x^2 - 3y^2;\quad y(0) = 2$

10. $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -\pi < x \le 0 \\ 1 \text{ при } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 18

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 4^n}{3^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{2n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt[5]{\ln n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n(n+1)}$

7. $f(x) = x\cdot e^{3x}$ 8. $\int_0^{0,5} \cos(4x^2)\,dx$ 9. $y' = \sin x - 2y^2;\quad y(0) = -1$

10. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2 < x \le 0 \\ 0 & \text{при } 0 < x < 2 \end{cases},\quad (-2 < x < 2)$

Вариант № 19

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{3n+1}\right)^{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^2\sqrt{n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{6^n}{(n+1)\cdot 7^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\sqrt{n}}$

7. $f(x) = \sqrt{1+3x}$ 8. $\int_0^{1/4} \frac{\sin x^2}{x}\,dx$ 9. $y' = e^y - 3xy;\quad y(0) = 0$

10. $f(x) = x+2,\quad (-1 < x < 1)$

Вариант № 20

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln^6 n}$ 5. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$

7. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$ 8. $\int_0^{0,2} \sin(5x^2)\,dx$ 9. $y' = 2x - y^2;\quad y(0) = 4$

10. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ -1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases},\quad (-\pi < x < \pi)$

Вариант № 21

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+5}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{3^n}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3 - 8n + 1}{4n^3 + 2n - 1} \right)^{2n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{4^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}(x-8)^n$

7. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ 8. $\int_0^{0,2} \cos(5x^2)\, dx$ 9. $y' = y^2 + \cos x + \sin x$; $y(0) = 2$

10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < x \le 0 \\ x & \text{при } 0 < x < 1 \end{cases}$, $(-1 < x < 1)$

Вариант № 22

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 4n^2 + 1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! \cdot 4^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n-1} \right)^n$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{3n+6}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$

7. $f(x) = \ln(x^3 + 1)$ 8. $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\, dx$ 9. $y' = e^x + y^2 + x^2$; $y(0) = 1$

10. $f(x) = |x|$, $(-1 < x < 1)$

Вариант № 23

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 1}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2 + 5}$

7. $f(x) = 1 - \cos 2x$ 8. $\int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{4}}{x}\, dx$ 9. $y' = 2\cos x - y^2 - \sin x$;

10. $f(x) = x + 2$, $(-3 < x < 3)$

Вариант № 24

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+4)}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{2n}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^3+1}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+3)^n$

7. $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 8. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$ 9. $y' = y^3 + x$; $y(0) = 2$

10. $f(x) = 3 - x$, $(-2 < x < 2)$

Вариант № 25

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{7^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n\sqrt{n+3}}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(n+1)}{n!}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-10)^n$

7. $f(x) = \frac{\ln(1+4x)}{x}$ 8. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$ 9. $y' = e^y - 2xy + x$; $y(0) = 0$

10. $f(x) = x$, $(-4 < x < 4)$

Вариант № 26

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+2}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{9^n}$ 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^4 n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^3}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n}$

7. $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$ 8. $\int\limits_0^{1} \cos x^2 \cdot dx$ 9. $y' = 2\sin x + y^2$; $y(0) = 2$

10. $f(x) = |x| + 2$, $(-\pi < x < \pi)$

Вариант № 27

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{(n+1)\cdot 2^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5^{n+1}\cdot(x-1)^n}{n}$

7. $f(x)=\frac{1}{5-x}$ 8. $\int\limits_0^{0,25}\frac{\sin 2x}{x}dx$ 9. $y'=6e^y-2xy;\quad y(0)=12$

10. $f(x)=\frac{2-x}{2},\quad (-\pi<x<\pi)$

Вариант № 28

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\frac{1}{n^3}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{5^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+2}{3n+1}\right)^{2n}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^5 n}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot(x-3)^n}{4^n}$

7. $f(x)=\ln(1-3x)$ 8. $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin 2x-2x}{x}dx$ 9. $y'=\cos 2\,x+y^2;\quad y(0)=4$

10. $f(x)=\begin{cases}4 & \text{при } -\pi<x\le 0\\ 0 & \text{при } 0<x<\pi\end{cases},\quad (-\pi<x<\pi)$

Вариант № 29

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n^3+2n^2+1}{3+n^2}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^n\cdot e^{-n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+7}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n+2}}$

7. $f(x)=\cos^2 2x$ 8. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{8+x^3}$ 9. $y'=2\sin x+\frac{y^2}{2};\quad y(0)=4$

10. $f(x)=x-1,\quad (-2<x<2)$

Вариант № 30

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+n+5}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+3}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n^5+1}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+2)!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5n^2-1}$

7. $f(x) = \frac{x}{1-x^3}$ 8. $\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$ 9. $y' = 2x + x^4 + y^2; \quad y(0) = 10$

10. $f(x) = 2x - 1, \quad (-4 < x < 4)$

Вариант № 31

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n-1}{n^4+3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^7 n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2+4}$

7. $f(x) = 1 - \cos 3x$ 8. $\int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} dx$ 9. $y' = 2\cos x - y^2$; $y(0) = 1$

10. $f(x) = -x + 1, \quad (-2 < x < 2)$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ № 1

Вариант № 0

Задачи 1-4. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{2n^3+n^2+5}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{3n-2}\right)^n$ 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Решение . 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+2n+3}{2n^3+n^2+5}$

Для исследования ряда применим второй признак сравнения:

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$. Тогда, если $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, то ряды ведут себя одинаково (или оба сходятся, или оба расходятся).

Для сравнения возьмём гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Таким образом, $a_n = \dfrac{n^2+2n+3}{2n^3+n^2+5}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+3)\cdot n}{2n^3+n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n}{2n^3+n^2+5} = \frac{1}{2}.$$

Здесь $A = \dfrac{1}{2} \neq 0$ и $A \neq \infty$, значит, данный ряд расходится, так как расходится гармонический ряд.

Ответ: ряд расходится (по второму признаку сравнения).

Решение. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

Применим признак Даламбера: Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ и $q < 1$, то ряд сходится, а при $q > 1$ – расходится.

Здесь $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n!\cdot(n+1)}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n!}{(n+1)^n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

(использован второй замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$).

Таким образом, $q = \frac{1}{e} < 1$, значит, данный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится (по признаку Даламбера).

Решение. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{3n-2} \right)^n$

Применим признак Коши: Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ и $q < 1$, то ряд сходится, а при $q > 1$ – расходится.

Здесь $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+1}{3n-2} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{3n-2} = \frac{5}{3}$; таким образом, $q = \frac{5}{3} > 1$, значит, данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится (по признаку Коши).

Решение. 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Применим интегральный признак Коши: Если функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[1, +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Вычислим $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty$. Интеграл расходится, значит, и данный ряд тоже.

Ответ: ряд расходится (по интегральному признаку).

Задача 5. Исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$. Если он сходится, то указать, абсолютно или условно.

Решение. Ряд знакочередующийся. Для его исследования применим признак Лейбница: Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$, где $a_n > 0$, монотонно убывают по абсолютной величине ($a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$) и стремятся к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд сходится.

Здесь $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \ldots$, так как функция $f(x) = \ln x$ монотонно возрастает при $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. Значит, данный ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

Этот ряд расходится по признаку сравнения. В самом деле, при $x > 0$ $\ln x < x$, то есть $\ln n < n$, откуда $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический) расходится, а члены ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ больше, чем соответствующие члены гармонического ряда. Значит, ряд из абсолютных величин расходится.

Таким образом, данный ряд сходится условно (не абсолютно).

Ответ: ряд сходится условно.

Задача 6. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+2)^n$.

Решение. Найдём радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Тогда интервал сходимости может быть найден из неравенства

$$|x+2| < R,$$

то есть: $|x+2| < 1$, $-1 < x+2 < 1$, $-3 < x < -1$. Таким образом, интервал сходимости данного ряда $-3 < x < -1$. Исследуем сходимость ряда в концах интервала:

1) $x = -1$. Ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot 1^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$; этот ряд расходится, так

как не выполнен необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (здесь $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$);

2) $x = -3$. Ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (-1)^n$. Этот ряд также расходится, так как его члены тоже не стремятся к нулю.

Ответ : область сходимости данного ряда – промежуток $(-3,\ -1)$.

Задача 7. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{4}{4+x}$ в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

Решение. Используем одно из основных разложений

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \qquad \text{верное при } |x|<1:$$

$$\frac{4}{4+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{4}} = 1 - \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{4}\right)^n .$$

Это разложение верно при условии $\left|\dfrac{x}{4}\right| < 1$, то есть при $-4 < x < 4$.

Ответ: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n} x^n$ при $-4 < x < 4$.

Задача 8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем основное разложение $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$; тогда

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots,$$

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{1/2} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^5\cdot 10} - \frac{1}{2^7\cdot 42} + \ldots$$

Если для приближённого вычисления интеграла взять 3 первых члена, то по теореме Лейбница ошибка δ будет меньше первого из отброшенных членов, то есть $\delta < \dfrac{1}{2^7 \cdot 42} < 0{,}001$.

Значит, $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} = \frac{443}{960} = 0{,}461\ldots$

Ответ: с точностью до 0,001 данный интеграл равен 0,461.

Задача 9. Найти четыре первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = 2x^2 + 3x + y^2,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение. Пусть $y = y(x)$ – искомое частное решение. Ряд Маклорена для функции $y(x)$ имеет вид:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Из начальных условий следует, что $y(0) = 2$. Из уравнения найдём $y'(0)$:

$$y'(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 2^2 = 4.$$

Дифференцируем уравнение:

$$y'' = 4x + 3 + 2\,yy',$$

$$y''(0) = 4 \cdot 0 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 19;$$

$$y''' = 4 + 2\,(y')^2 + 2\,yy'',$$

$$y'''(0) = 4 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 2 \cdot 19 = 112.$$

Таким образом, можно написать четыре первых члена ряда:

$$y(x) = 2 + \frac{4}{1!}x + \frac{19}{2!}x^2 + \frac{112}{3!}x^3 + \ldots$$

Ответ: $y(x) = 2 + 4x + 9{,}5\,x^2 + \dfrac{56}{3}x^3 + \ldots$

Задача 10. Разложить функцию

$$f(x) = \pi - x, \ \ (-\pi < x < \pi)$$

в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\ \pi)$. Построить график функции и график суммы ряда Фурье.

Решение. Функция $f(x)$ на интервале $(-\pi,\ \pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле, и её ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Найдём коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi^2+\pi^2)=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi-x}{n}\sin nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi-x}{n}\cos nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x-\pi}{n}\cos nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2}\sin nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\cos\pi n=\frac{2}{n}(-1)^n.$$

Ответ: ряд Фурье данной функции имеет вид: $\pi-x=\pi+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$.

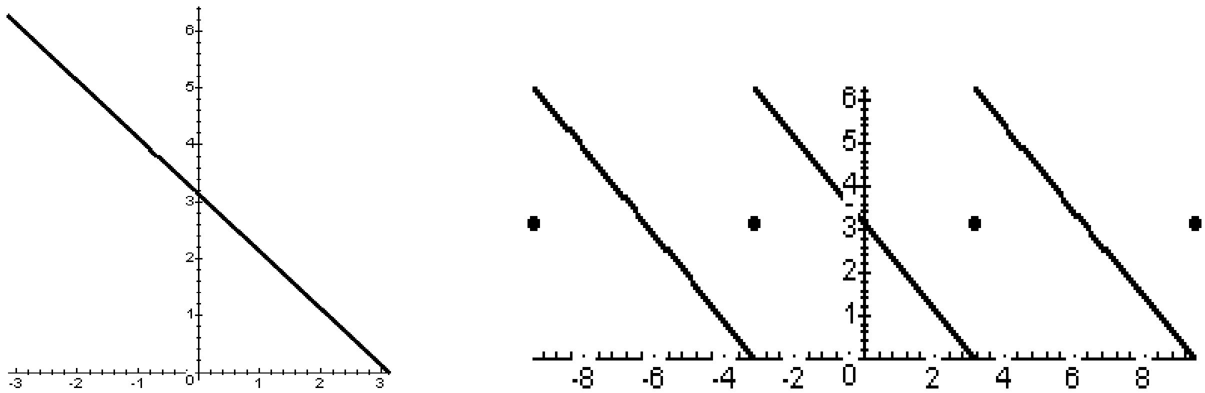

Рис.1. График функции $f(x)=\pi-x$ на интервале $(-\pi,\ \pi)$ (слева) и график суммы $S(x)$ ряда Фурье (справа).

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 2
Темы «Теория функций комплексного переменного» и «Операционное исчисление»

Задачи 1-3. Представить число в тригонометрической и показательной формах.
Задача 4. Вычислить значение функции. Результат представить в алгебраической форме. Найти действительную и мнимую часть полученного числа.
Задача 5. Найти особые точки функции и определить их тип.
Задача 6. Найти вычеты функции в особых точках.
Задача 7. Задача на дифференцирование функции комплексного переменного.
Задачи 8-10. Вычислить интегралы.
Задача 11. Найти изображение $F(p)$ по данному оригиналу $f(t)$.
Задача 12. Найти оригинал $f(t)$ по данному изображению $F(p)$.
Задача 13. Операционным методом решить задачу Коши для дифференциального уравнения.
Задача 14. Операционным методом решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений.

Вариант 1

1. $z=-3i$

2. $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

3. $z=\dfrac{2+3i}{7-5i}$

4. $\sin(\dfrac{\pi}{4}+2i)$

5. $f(z)=\dfrac{e^z+1}{z^3(z+1)^2}$

6. $f(z)=\dfrac{1}{z^4-z^2}$

7. Проверить выполнение условий Коши Римана для функции $f(z)=i\,e^{3z}$. Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z|=1} z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}dz$

9. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \dfrac{e^z+1}{z(z-1)}dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z^2-1}{z^3}dz$

11. $f(t)=4t\cdot\sin t-e^{2t}\cdot\cos 4t$

12. $F(p)=\dfrac{3p^2-p+2}{(p-1)(p^2-4p+5)}$

13. $\begin{array}{l} x''+x=2\cos t; \\ x(0)=0,\;\; x'(0)=1 \end{array}$

14. $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=x+y \end{cases};\;\; x(0)=1, y(0)=0$

Вариант 2

1. $z=7i$
2. $z=4i+4$
3. $z=\dfrac{-4-2i}{3+7i}$
4. $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)$
5. $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{z^4-1}$
6. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-3)}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z)=i\,z^2+5$ в точке $z_0=\sqrt{3}-i$.

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{1}{(z^2+1)^3}dz$
9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3}\frac{ze^z}{\sin z}dz$
10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$

11. $f(t)=3t^2-e^{-2t}\cos 5t$
12. $F(p)=\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+15)}$

13. $x''+x=6e^{-t};$ $x(0)=3,\ x'(0)=1$
14. $\begin{cases}x'=x+3y+2\\ y'=x-y+1\end{cases};\ x(0)=-1,\ y(0)=2$

Вариант 3

1. $z=-4$
2. $z=-6\sqrt{3}i-6$
3. $z=\dfrac{3i-5}{2i+4}$
4. $\operatorname{sh}(2+\dfrac{\pi i}{4})$
5. $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$
6. $f(z)=z^2e^{1/z}$

7. Проверить выполнение условий Коши Римана для функции $f(z)=iz^3-2$. Вычислить $f'(z)$.

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\operatorname{ctg} z\,dz$
9. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=3}\frac{z^2+\cos z}{z^3}dz$
10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^{1/z}+1}{z}dz$

11. $f(t)=3e^{2t}\sin t-2e^{-t}\cos 5t$
12. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$

13. $x''+x'=t^2+2t;$ $x(0)=0,\ x'(0)=-2$
14. $\begin{cases}x'=-x+3y+2\\ y'=x+y\end{cases};\ x(0)=1,\ y(0)=2$

Вариант 4

1. $z = 2i$

2. $z = 6 + 2\sqrt{3}i$

3. $z = \dfrac{5i+1}{z-6i}$

4. 1^{2i}

5. $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$

6. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)^3}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = i\, e^{2z}$ в точке $z_0 = 2\pi i.$

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz$

9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz$

10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz$

11. $f(t) = (3t^2 - 8t)e^{-t} - 4e^{15t} \cos 8t$

12. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

13. $\begin{array}{l} x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}; \\ x(0) = 2,\ x'(0) = 6 \end{array}$

14. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2 \\ y' = 3x + y + 1 \end{cases}$; $x(0) = 0, y(0) = 2$

Вариант 5

1. $z = -8i$

2. $z = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

3. $z = \dfrac{3-5i}{4i+1}$

4. $\sin(\dfrac{\pi}{3} + i)$

5. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$

6. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 5}$

7. Проверить условия Коши Римана для функции $f(z) = e^{3z} + z$.
Вычислить $f'(z)$.

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{5 - 2z + 3z^2 - z^3}{2z^2} dz$

9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 - 4\pi^2} dz$

10. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3 - 1} dz$

11. $f(t) = 2e^{-3t} \sin 4t - (4t^2 + 2t)e^{-t}$

12. $F(p) = \dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$

13. $\begin{array}{l} x'' + 4x = 8\sin 2t; \\ x(0) = -1,\ x'(0) = -1 \end{array}$

14. $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -4x \end{cases}$; $x(0) = 3,\ y(0) = 1$

Вариант 6

1. $z = 6i$

2. $z = -2\sqrt{3} - 2i$

3. $z = \dfrac{-3-7i}{2i-1}$

4. $\operatorname{sh}(3 + \dfrac{\pi i}{6})$

5. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$

6. $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = i(1 - z^2) - 2z$ в точке $z_0 = 1 + 2i$.

8. $\oint\limits_{|z-i|=2} \dfrac{z^3}{z^4+1} dz$

9. $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \dfrac{\operatorname{tg} z + 2}{4z^2 + \pi z} dz$

10. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{1-\cos z^2}{z^2} dz$

11. $f(t) = 3t^2 + t - 2 + 3e^{-7t}\cos 2t$

12. $F(p) = \dfrac{1}{p^5 + p^3}$

13. $\begin{matrix} 2x'' + 5x' = 29\cos t; \\ x(0) = -1,\ x'(0) = 0 \end{matrix}$

14. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}; \ x(0) = 0,\ y(0) = 5$

Вариант 7

1. $z = 3$

2. $z = 2\sqrt{3}i - 6$

3. $z = \dfrac{7-2i}{2i-1}$

4. i^{3i}

5. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$

6. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-1)}$

7. Проверить условия Коши Римана для функции $f(z) = \sin 2z$.
Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{1-\cos z}{z^3 - \dfrac{\pi}{2} z^2} dz$

9. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \dfrac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz$

11. $f(t) = (t^2+2)e^{2t} - e^{-3t}\cos 2t$

12. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p^2-4p+4)}$

13. $\begin{matrix} x'' - 2x' - 3x = 2t; \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1 \end{matrix}$

14. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}; \ x(0) = 1,\ y(0) = 1$

Вариант 8

1. $z = -4i$

2. $z = -3 + 3i$

3. $z = \dfrac{4i-3}{6i-5}$

4. $\operatorname{Arccos}(-5)$

5. $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$

6. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = 2z^2 - 4z$ в точке $z_0 = 3 + 2i$.

8. $\oint\limits_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$

9. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3} dz$

11. $f(t) = 8e^{-2t} \sin 3t + 2e^{2t} \cos 8t$

12. $F(p) = \frac{1}{p^3 + p^2 + 2p + 2}$

13. $x'' - x' = t^2;$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

14. $\begin{cases} x' = -4x + y \\ y' = -2x - y \end{cases};$ $x(0) = 2,\ y(0) = 3$

Вариант 9

1. $z = -7$

2. $z = -2i + 2\sqrt{3}$

3. $z = \frac{3+4i}{2i+3}$

4. $\cos(\frac{\pi}{6} + 2i)$

5. $f(z) = \frac{ze^z}{\sin z}$

6. $f(z) = \frac{z-1}{z^2+4}$

7. Проверить условия Коши Римана для функции $f(z) = \operatorname{sh} 3z$. Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z|=10} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 + 4\pi^2} dz$

9. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4}$

10. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz$

11. $f(t) = e^{-4t} \sin 3t \cos 2t + t^2 \sin t$

12. $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$

13. $x'' + 2x' + x = \cos t;$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

14. $\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases};$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1$

Вариант 10

1. $z = 3i$

2. $z = 12i - 4\sqrt{3}$

3. $z = \frac{5i-1}{3i+8}$

4. $\operatorname{sh}(2 - \pi i)$

5. $f(z) = ctg^2 z$

6. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = z^4 - 3$ в точке $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$.

8. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$ 9. $\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}dz$

11. $f(t)=5e^{3t}\cos 3t\cos 4t+1+t^2e^{3t}$ 12. $F(p)=\frac{4p^2+16p-8}{p^3-4p}$

13. $\begin{array}{l} x''+x'=t^2+2t; \\ x(0)=4,\ x'(0)=-2 \end{array}$ 14. $\begin{cases} x'=-x-2y+1 \\ y'=-3x+y \end{cases}$; $x(0)=2, y(0)=0$

Вариант 11

1. $z=4$ 2. $z=3-3\sqrt{3}i$ 3. $z=\frac{4-6i}{2i-3}$

4. $(-1)^{4i}$ 5. $f(z)=\frac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$ 6. $f(z)=\frac{z^2+4}{(z-1)^3}$

7. Показать, что функция $f(z)=\operatorname{ch}5z$ является аналитической при любом z. Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$ 9. $\oint\limits_{|z-3|=1/2} \frac{e^z}{\sin z}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}dz$

11. $f(t)=t(e^t+\operatorname{sh}t)-2\sin^2 2t$ 12. $F(p)=\frac{p+3}{p^3+p^2-2p}$

13. $\begin{array}{l} x''+9x=\cos 3t; \\ x(0)=1, x'(0)=0 \end{array}$ 14. $\begin{cases} x'=-y \\ y'=2x+2y \end{cases}$; $x(0)=1, y(0)=1$

Вариант 12

1. $z=-6i$ 2. $z=-15i+5\sqrt{3}$ 3. $z=\frac{3i+1}{4-2i}$

4. $\cos(\frac{\pi}{2}-i)$ 5. $f(z)=\frac{e^z-1}{\sin\pi z}$ 6. $f(z)=\frac{1}{z^3-1}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z)=z\cdot e^z$ в точке $z_0=i$.

8. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{\sin^2 z\cdot\cos z}dz$ 9. $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}$ 10. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}dz$

11. $f(t) = \operatorname{sh} t \cdot \cos 2t + t^3 e^{-3t}$ 12. $F(p) = \dfrac{1}{p^3 + 8}$

13. $x'' + 3x' + 2x = 1 + t + t^2;$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$ 14. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \end{cases};\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$

Вариант 13

1. $z = 2$ 2. $z = 5\sqrt{2}i - 5\sqrt{2}$ 3. $z = \dfrac{4i - 6}{6i + 5}$

4. $\operatorname{Arsh}(-4i)$ 5. $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$ 6. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$

7. Показать, что функция $f(z) = i\,z^3$ аналитическая при любом z. Вычислить $f'(z)$.

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2 + 1)}$ 9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{1 - \sin\frac{1}{z}}{z} dz$ 10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^5} dz$

11. $f(t) = -\dfrac{t}{2}\sin 2t - e^{-3t}\cos t$ 12. $F(p) = \dfrac{p^2 - 3}{p^4 + 5p^2 + 6}$

13. $x'' - x = \cos 3t;$ $x(0) = 1,\ x'(0) = 1$ 14. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases};\ x(0) = 0, y(0) = 2$

Вариант 14

1. $z = -5i$ 2. $z = 6i - 6\sqrt{3}$ 3. $z = \dfrac{3 - 2i}{-6 - 5i}$

4. $\cos(\dfrac{\pi}{4} - 2i)$ 5. $f(z) = \dfrac{1}{\cos^2 z}$ 6. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2 + z}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = e^{-z^2}$ в точке $z_0 = i$.

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \frac{2}{z^2(z - 1)} dz$ 9. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{\sin 2z \cdot (z - \pi)} dz$ 10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz$

11. $f(t) = 3t^4 e^{2t} + e^{-t}\sin 8t$ 12. $F(p) = \dfrac{2p^2 - 3p + 1}{p^3 + 1}$

13. $x'' + x' + x = 7e^{2t};$ $x(0) = 1,\ x'(0) = 4$

14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -5x - 3y + 2 \end{cases};\ x(0) = 2,\ y(0) = 0$

Вариант 15

1. $z = 7$

2. $z = 5i + 5\sqrt{3}$

3. $z = \dfrac{8i - 3}{4i + 2}$

4. $\mathrm{Ln}(\sqrt{3} + i)$

5. $f(z) = \dfrac{z + \pi}{z \sin z}$

6. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4z + 5}$

7. Показать, что функция $f(z) = \cos 4z$ аналитическая при любом z. Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{2 + \sin z}{z(z + 2i)} dz$

9. $\oint\limits_{|z+2|=4} \dfrac{e^{3z} - 1}{z^3} dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{z^5 - 3z^3 + 7z}{z^4} dz$

11. $f(t) = 2t\cos 3t - t^3 e^{4t} + 1 - t^2$

12. $F(p) = \dfrac{p^2}{p^4 - 81}$

13. $x'' - 9x = \sin t - \cos t;$ $x(0) = -3,\ x'(0) = 2$

14. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases};\ x(0) = 0,\ y(0) = 2$

Вариант 16

1. $z = -5$

2. $z = -4\sqrt{3}i - 12$

3. $z = \dfrac{7 - 4i}{6i + 1}$

4. $(-i)^{5i}$

5. $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$

6. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z^2 + 1)^2}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = (i\,z)^3$ в точке $z_0 = -1 + i$.

8. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \dfrac{z(\sin z + 2)}{\sin z} dx$

9. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1/3} \dfrac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz$

11. $f(t) = \mathrm{ch}\, 3t \cdot \sin^2 t - t^{10} e^t$

12. $F(p) = \dfrac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$

13. $x'' + x' - 2x = -2t - 2;$ $x(0) = 1,\ x'(0) = 1$

14. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1 \\ y' = 3x + 4y \end{cases};\ x(0) = 2,\ y(0) = 1$

Вариант 17

1. $z=-2i$

2. $z=4+4\sqrt{3}i$

3. $z=\dfrac{5i+1}{2+3i}$

4. $\sin(\dfrac{\pi}{4}+i)$

5. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$

6. $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{z^2(z-1)}$

7. Найти точки, в которых дифференцируема функция $f(z)=z\cdot|\overline{z}|^2$.

8. $\oint\limits_{|z-3|-1/2}\dfrac{e^z}{\sin z}dz$

9. $\oint\limits_{|z|=1/3}\dfrac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1-\cos 3z}{z^5}dz$

11. $f(t)=2-3t^2+t\cos 5t+e^{-t}\sin 3t$

12. $F(p)=\dfrac{p^2-p+1}{p^4+2p^2-3}$

13. $\begin{aligned}&x''+2x'=2+e^t;\\&x(0)=1,\ x'(0)=1\end{aligned}$

14. $\begin{cases}x'=2x+2y+2\\y'=4y+1\end{cases};\ x(0)=0,\ y(0)=1$

Вариант 18

1. $z=6$

2. $z=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$

3. $z=\dfrac{6i-8}{3-2i}$

4. $\mathrm{Ln}(1+i)$

5. $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z(z^2+1)}$

6. $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z)=z^2-2z$ в точке $z_0=3+2i\sqrt{3}$.

7. $\oint\limits_{|z-1/2|=1}\dfrac{e^z+1}{z(z+1)}dz$

8. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2e^{1/z^2}-1}{z}dz$

9. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos iz-1}{z^3}dz$

11. $f(t)=\mathrm{sh}\,4t\cdot\cos^2 3t-t\cdot\cos 5t$

12. $F(p)=\dfrac{p^3-6}{p^4+6p^2+8}$

13. $\begin{aligned}&2x''-x'=\sin 3t;\\&x(0)=2,\ x'(0)=1\end{aligned}$

14. $\begin{cases}x'=x+y\\y'=4x+y+1\end{cases};\ x(0)=1,\ y(0)=0$

Вариант 19

1. $z=-7i$

2. $z=-5+5\sqrt{3}i$

3. $z=\dfrac{6i-1}{3-8i}$

4. $\mathrm{ch}(1+\dfrac{\pi i}{3})$

5. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$

6. $f(z)=\dfrac{z^4}{(z^2+1)^2}$

7. Показать, что функция $f(z)=e^{5iz}-3z$ аналитическая при любом z. Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z-1/2|=1}\frac{(z-i)}{\sin\pi z}dz$ 9. $\oint\limits_{|z|=1/3}\frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^2+\cos z}{z^3}dz$

11. $f(t)=t^2e^t+4e^{2t}\cos 5t$ 12. $F(p)=\frac{p+5}{(p-1)(p^2-2p+5)}$

13. $x''+2x'=\sin\frac{t}{2};$ $x(0)=-2,\ x'(0)=4$

14. $\begin{cases}x'=x+4y+1\\ y'=2x+3y\end{cases};\ x(0)=0,\ y(0)=1$

Вариант 20

1. $z=-2$ 2. $z=-2\sqrt{3}-6i$ 3. $z=\frac{7i+4}{2i+5}$

4. $\operatorname{Arch}(3i)$ 5. $f(z)=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}z)}{z^2-1}$ 6. $f(z)=\frac{z^6}{(z-1)^4}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z)=3z^2-6z$ в точке $z_0=-3-4i\sqrt{3}$.

8. $\oint\limits_{|z-3|=10}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$ 9. $\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{z^5-3z^2+5z}{z^3}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-\sin z}{z^4}dz$

11. $f(t)=t^2\cos t-\frac{1}{2}t^4e^{-2t}+e^t\sin 3t$ 12. $F(p)=\frac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

13. $x''+x=\operatorname{sh}t;$ $x(0)=2,\ x'(0)=1$

14. $\begin{cases}x'=x+3y+3\\ y'=x-y+1\end{cases};\ x(0)=0,\ y(0)=1$

Вариант 21

1. $z=4i$ 2. $z=-3\sqrt{3}+3i$ 3. $z=\frac{4-8i}{3i-1}$

4. $\cos(\frac{\pi}{3}+3i)$ 5. $f(z)=\frac{1}{z^2}+\sin\frac{1}{z^2}$ 6. $f(z)=\frac{z^5}{z^2-1}$

7. Найти точки, в которых функция $f(z)=|z|\cdot\bar{z}$ является аналитической.

8. $\oint\limits_{|z-1/5|=2} \frac{1-z^2+3z^4}{2z^3}dz$ 9. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4}dz$

11. $f(t)=\operatorname{sh}2t\cdot\sin^2 3t-3+t\cdot\sin t$ 12. $F(p)=\frac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}$

13. $x''+4x'+20x=e^{-2t};$ $x(0)=0,\ x'(0)=1$ 14. $\begin{cases} x'=-x+3y+2 \\ y'=x+y+1 \end{cases};\ x(0)=0, y(0)=1$

Вариант 22

1. $z=5$ 2. $z=-2i-2$ 3. $z=\frac{5i+7}{6i-2}$

4. $(-1-i)^{4i}$ 5. $f(z)=\frac{\sin\pi z}{z(z-1)^2}$ 6. $f(z)=\frac{e^z}{(z-3)^2(z+5)}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z)=2z-i(1\text{-}z^2)$ в точке $z_0=2+i$.

8. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z(z^2+1)}$ 9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin(3zi)}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}dz$

11. $f(t)=1+2t^5-\operatorname{sh}t\cdot\cos 4t$ 12. $F(p)=\frac{1}{p(p^3+1)}$

13. $x''-3x'+2x=e^t;$ $x(0)=1,\ x'(0)=0$ 14. $\begin{cases} x'=x+3y \\ y'=x-y \end{cases};\ x(0)=1, y(0)=0$

Вариант 23

1. $z=-3$ 2. $z=6-2\sqrt{3}i$ 3. $z=\frac{3i-5}{4+3i}$

4. $\operatorname{ch}(2+\frac{\pi i}{2})$ 5. $f(z)=\frac{\cos\pi z}{(z-1)(z^2+1)}$ 6. $f(z)=\frac{\cos 4z}{(z-i)^3}$

7. Найти точки, в которых дифференцируема функция $f(z)=|\overline{z}|^2+5i$.

8. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz$ 9. $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}}-z-1}{z^3}dz$

11. $f(t)=2e^{-2t}\sin 5t-t+t^3e^t$ 12. $F(p)=\frac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$

13. $2x'' + 3x' + x = 3e^t;$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

14. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases};\ x(0) = -1, y(0) = 0$

Вариант 24

1. $z = 5i$

2. $z = 5 - 5i$

3. $z = \dfrac{2i + 8}{-3 - 8i}$

4. $\mathrm{Arcsin}\,4$

5. $f(z) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} z)}{(z-1)^3}$

6. $f(z) = \dfrac{z}{(z-5)^3}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = 5z^2 - 10z$ в точке $z_0 = 2 + i\sqrt{3}.$

8. $\oint\limits_{|z|=\pi/2} \dfrac{z^2 + z + 3}{\sin z \cdot (\pi + z)} dz$

9. $\oint\limits_{|z-i|=3} \dfrac{e^z - \sin z}{z^2} dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz$

11. $f(t) = e^{3t} \cdot \cos t \cdot \cos 3t + \dfrac{t}{2} - 2 + te^t$

12. $F(p) = \dfrac{1}{(p-2)(p^2 + 2p + 3)}$

13. $x'' + 4x = \sin 2t;$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

14. $\begin{cases} x' = 3y + 2 \\ y' = x + 2y \end{cases};\ x(0) = -1,\ y(0) = 1$

Вариант 25

1. $z = -7$

2. $z = 9i + 3\sqrt{3}$

3. $z = \dfrac{-4i - 1}{3i - 2}$

4. $\mathrm{Ln}(6 - 6i)$

5. $f(z) = \dfrac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2 + 1)}$

6. $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z - 5}{z^2(z-1)}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = 2z^3 - 4$ в точке $z_0 = 3 - 3i.$

8. $\oint\limits_{|z-1|=3} \dfrac{z(z+\pi)}{\sin z} dz$

9. $\oint\limits_{|z|=1/3} \dfrac{4z^5 - 3z^2 - 1}{z^6} dz$

10. $\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin\dfrac{i}{z^2} dz$

11. $f(t) = 5t\cos 2t - e^{2t}t^3 + e^{-t}\sin t$

12. $F(p) = \dfrac{2p + 1}{(p+1)(p^2 + 2p + 3)}$

13. $x'' + x' - 2x = e^{-t};$ $x(0) = -1,\ x'(0) = 0$

14. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 3x \end{cases};\ x(0) = 0,\ y(0) = 1$

Вариант 26

1. $z=-3i$

2. $z=-2\sqrt{3}-2i$

3. $z=\dfrac{2-4i}{3i-1}$

4. $\cos(\dfrac{\pi}{2}-i)$

5. $f(z)=\dfrac{1}{z^2}-\sin\dfrac{1}{z^2}$

6. $f(z)=\dfrac{2z^4}{z^2-1}$

7. Показать, что функция $f(z)=i\cdot\cos 2z+3$ является аналитической при любом z. Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z-1|=3}\dfrac{\cos^2 z-4}{2z^2-\pi z}dz$

9. $\oint\limits_{|z-1/4|=2}\dfrac{1-z^2+7z^4}{5z^3}dz$

10. $\oint\limits_{|z|=2} z^3\cos\dfrac{2i}{z}dz$

11. $f(t)=e^{-7t}\sin 6t-(3t^2+2t)e^{-t}$

12. $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$

13. $\begin{array}{l} x''+5x'=6\cos t; \\ x(0)=-1,\ x'(0)=0 \end{array}$

14. $\begin{cases} x'=2x+5y \\ y'=x-2y+2 \end{cases};\ x(0)=1,\ y(0)=1$

Вариант 27

1. $z=-5$

2. $z=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

3. $z=\dfrac{3i-4}{3-2i}$

4. $\operatorname{ch}(1-\pi i)$

5. $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z(z^2+4)}$

6. $f(z)=\dfrac{z+5}{(z-i)^3(z+2)}$

7. Показать, что функция $f(z)=\operatorname{ch}2iz$ является аналитической при любом z. Вычислить $f'(z)$.

8. $\oint\limits_{|z-1/3|=1}\dfrac{e^{2z}+3}{z(z+2)}dz$

9. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2e^{1/z^2}-1}{z}dz$

10. $\oint\limits_{|z|=1/3}\dfrac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz$

11. $f(t)=7e^{-3t}\sin 2t+2e^{2t}\cos 5t$

12. $F(p)=\dfrac{1}{p^3+p^2+4p+4}$

13. $\begin{array}{l} x''+6x'+9x=\cos 3t; \\ x(0)=0,\ x'(0)=0 \end{array}$

14. $\begin{cases} x'=-x-2y+1 \\ y'=-3x+y \end{cases};\quad x(0)=2, y(0)=0$

Вариант 28

1. $z=-7i$

2. $z=-6i+6\sqrt{3}$

3. $z=\dfrac{3-2i}{6+5i}$

4. $(-\sqrt{3}+i)^{-5i}$

5. $f(z)=\dfrac{1}{\cos^2 z}$

6. $f(z)=\dfrac{e^{3z}-1}{z^2-5z}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = 8z^2 - 16z$ в точке $z_0 = 3 + 2i$.

8. $\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \frac{7}{z^3(z-1)} dz$ 9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - 2i}{\sin 2z \cdot (z-4)} dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz$

11. $f(t) = 3t(e^t + \operatorname{sh} t) - \sin^2 5t$ 12. $F(p) = \frac{p+7}{p^3 - p^2 - 2p}$

13. $x'' + 5x' + 6x = 1 + t + t^2;$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$ 14. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 18 \end{cases}$; $x(0) = 1,\ y(0) = 0$

Вариант 29

1. $z = -8$ 2. $z = 2\sqrt{3}i - 6$ 3. $z = \frac{5-2i}{2i-1}$

4. $\operatorname{Arch}(-2)$ 5. $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-2)^4}$ 6. $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+16)(z-3)}$

7. Найти точки, в которых функция $f(z) = Re\, z \cdot |z|$ дифференцируема.

8. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1 - \cos 2z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2} dz$ 9. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{2 + \sin z}{z(z+2i)} dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz$

11. $f(t) = 3t \cos 2t - e^{5t} t^2 + e^{-2t} \sin t$ 12. $F(p) = \frac{4p+5}{(p-2)(p^2+6p+10)}$

13. $x'' + x = 2\operatorname{sh} t,$ $x(0) = 4,\ x'(0) = 1$ 14. $\begin{cases} x' = x + 5y + 5 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$; $x(0) = 0,\ y(0) = 1$

Вариант 30

1. $z = -3i$ 2. $z = 5\sqrt{3} + 5i$ 3. $z = \frac{2-4i}{3i-1}$

4. $(-1 + i\sqrt{3})^{-3i}$ 5. $f(z) = \frac{\sin 2z}{z(1 - \cos z)}$ 6. $f(z) = \frac{5z^4}{(z^2-1)^2}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z) = z^3 - z$ в точке $z_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{i}{\sqrt{6}}$.

8. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{\cos^2 z+5}{z^2-\pi^2}dz$ 9. $\oint\limits_{|z-1/4|=3} \frac{7-3z^2+5z^4}{2z^3}dz$ 10. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{e^z-\sin z}{z^2}dz$

11. $f(t) = -\frac{t}{4}\sin 2t - e^{-7t}\cos t$ 12. $F(p) = \frac{2p^2+5}{p^4+5p^2+6}$

13. $\begin{array}{l} x''+2x'-8x=4e^{2t}; \\ x(0)=1,\ x'(0)=0 \end{array}$ 14. $\begin{cases} x'=4x+y \\ y'=-3x-2y+1 \end{cases};\ x(0)=2,\ y(0)=0$

Вариант 31

1. $z=-4$ 2. $z=2\sqrt{3}i-6$ 3. $z=\frac{2-22i}{6-5i}$

4. $(-3i)^{4i}$ 5. $f(z)=\frac{z^2+4}{e^{5z}-1}$ 6. $f(z)=\frac{\sin 3z}{z^2(z+1)^2}$

7. Найти угол поворота и коэффициент растяжения плоскости при отображении $f(z)=e^{iz}$ в точке $z_0=\frac{\pi}{2}-i$.

8. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$ 9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$ 10. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{7-3z^2+z^4}{5(z-2)^3}dz$

11. $f(t)=\mathrm{ch}\,5t\cdot\sin^2 t - t^6e^t$ 12. $F(p)=\frac{2p+1}{p^3+5p^2+6p}$

13. $\begin{array}{l} x''+3x'=\sin 2t; \\ x(0)=0,\ x'(0)=6 \end{array}$ 14. $\begin{cases} x'=2x+y+1 \\ y'=3x+4y \end{cases};\ x(0)=1,\ y(0)=-2$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ № 2, 4, 7, 8, 9, 12, 13 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ № 2

Задача 2. Представить число $z=-8-i8\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательных формах.

Решение. Вычисляем модуль и аргумент числа z.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16.$

Так как $x=-8<0,\ y=-8\sqrt{3}<0,$ то угол $\varphi = arctg\frac{y}{x}-\pi = arctg\sqrt{3}-\pi=-\frac{2}{3}\pi.$

Следовательно, в тригонометрической форме

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = 16(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi)),$$

в показательной форме $z = 16 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

Ответ: $z = 16(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi))$; $z = 16 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

Задача 4а. Вычислить значение функции $(1 - i\sqrt{3})^i$. Результат представить в алгебраической форме. Найти действительную и мнимую часть полученного числа.

Решение. Представим $(1 - i\sqrt{3})^i$ согласно определению показательной функции в виде $(1 - i\sqrt{3})^i = e^{Ln(1-i\sqrt{3})^i} = e^{i \cdot Ln(1-i\sqrt{3})}$

Найдём значение $Ln(1 - i\sqrt{3})$.

Для чего найдём модуль и аргумент комплексного числа $1 - i\sqrt{3}$. Получим:

$$\left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \arg(1 - i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3},$$

отсюда имеем

$$Ln(1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k).$$

Используя последнее выражение, найдём

$$(1 - i\sqrt{3})^i = e^{iLn(1-i\sqrt{3})} = e^{i(\ln 2 + i(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k))} = e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} \cdot e^{i\ln 2} =$$

$$= e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2), k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(1 - i\sqrt{3})^i = e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} \cdot \cos\ln 2 + i\, e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} \cdot \sin\ln 2, \ k \in \mathbb{Z}$;

$$\operatorname{Re}(1 - i\sqrt{3})^i = e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} \cdot \cos\ln 2, \quad \operatorname{Im}(1 - i\sqrt{3})^i = e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} \cdot \sin\ln 2, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 4б. Вычислить значение функции $\operatorname{ch}(7 - \frac{\pi}{3}i)$. Результат представить в алгебраической форме. Найти действительную и мнимую часть полученного числа.

Решение. По определению $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Следовательно, $\operatorname{ch}\left(7-\frac{\pi}{3}\cdot i\right) = \dfrac{e^{7-\frac{\pi}{3}\cdot i}+e^{-7+\frac{\pi}{3}\cdot i}}{2} = \dfrac{e^{7}\cdot e^{-\frac{\pi}{3}\cdot i}+e^{-7}\cdot e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{7}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+e^{-7}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{7}\cdot\frac{1}{2}-e^{7}\cdot i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+e^{-7}\cdot\frac{1}{2}+e^{-7}\cdot i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(e^{7}+e^{-7})}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(e^{7}-e^{-7}\right)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\operatorname{ch}7-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sh}7.$$

Ответ: $\operatorname{ch}\left(7-\frac{\pi}{3}\cdot i\right) = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{ch}7-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sh}7;$

$\operatorname{Re}\left(\operatorname{ch}\left(7-\frac{\pi}{3}\cdot i\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{ch}7;\quad \operatorname{Im}\left(\operatorname{ch}\left(7-\frac{\pi}{3}\cdot i\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sh}7.$

Задача 7. Найти коэффициент растяжения (сжатия) и угол поворота плоскости при отображении $f(z)=\frac{1}{2}z^{2}$ в точке $z_0=-3-4i$.

Решение. Функция $f(z)=\frac{1}{2}z^{2}$ является аналитической в любой точке $z\in\mathbb{C}$, следовательно, и в точке $z_0=-3-4i$. Её производная $f'(z)=z,$ а в точке z_0 значение $f'(z_0)=-3-4i.$

Вычислим модуль $|f'(z_0)|=|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5>1$. Следовательно, коэффициент растяжения k для функции $f(z)=\frac{1}{2}z^{2}$ в точке $z_0=-3-4i$ равен 5 (плоскость растягивается).

Аргумент производной в точке $z_0=-3-4i$ – это искомый угол поворота φ

$\varphi=\arg f'(z_0)=\arg(-3-4i)=arctg\,\frac{4}{3}-\pi.$

Ответ: $k=5,\ \varphi=arctg\,\frac{4}{3}-\pi.$

Задача 8. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin^2 z}{z - \dfrac{\pi}{4}} dz.$

Решение. Применим интегральную формулу Коши, записанную в виде

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

В нашей задаче $f(z) = \sin^2 z$, точка $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$ лежит внутри окружности $|z| = 2.$

Получаем $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin^2 z}{z - \dfrac{\pi}{4}} dz = 2\pi i \cdot \sin^2 \dfrac{\pi}{4} = 2\pi i \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi i \cdot \dfrac{1}{2} = \pi i.$

Ответ: $\pi i.$

Замечание. Задачу 8 можно решить, применив теорему Коши о вычетах. Особая точка $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$ функции $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{(z - \dfrac{\pi}{4})}$ является полюсом первого порядка, вычет в ней $\operatorname{Res} f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = \lim\limits_{z \to \frac{\pi}{4}} (z - \dfrac{\pi}{4}) \cdot \dfrac{\sin^2 z}{(z - \dfrac{\pi}{4})} = \sin^2 \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}.$

Задача 9. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-1|=3} \dfrac{z^5 + 2z^3 + 10}{(z - 2i)^4} dz.$

Решение. Применим интегральную формулу Коши для производных, записанную в виде

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0).$$

В нашей задаче $f(z) = z^5 - 2z^3 + 10$, $z_0 = 2i$, $n = 3$. Вычислим $f'''(z)$.

$f'(z) = 5z^4 - 6z^2$,

$f''(z) = 20z^3 - 12z$,

$f'''(z) = 60z^2 - 12$.

Получим

$$\int\limits_{|z-1|=3} \frac{z^5 + 2z^3 + 10}{(z - 2i)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \cdot (60 z_0{}^2 - 12) = \frac{2\pi i}{6} \cdot (60(2i)^2 - 12) = \frac{\pi i}{3} \cdot (-240 - 12) = -84\pi i.$$

Ответ: $-84\pi i.$

Замечание. Задачу 9 также можно решить, применив теорему Коши о вычетах. Особая точка $z_0 = 2i$ функции $f\left(z\right) = \dfrac{z^5 + 2z^3 + 10}{(z-2i)^4}$ является полюсом четвертого порядка.

Задача 12. Найти оригинал $f(t)$ по данному изображению

$F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

Решение. Разложим $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$ в сумму простых дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4} =$$

$$= \frac{A(p-1)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + (Cp+D)p(p-1)}{p(p-1)(p^2+4)}$$

Из равенства

$$A(p-1)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + (Cp+D)p(p-1) = 1$$

находим коэффициенты A, B, C и D.

Получаем следующее выражение для $F(p)$:

$$F(p) = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4}$$

Далее находим оригиналы для каждой из простых дробей :

$1 \to \dfrac{1}{p}$, $\qquad e^t \to \dfrac{1}{p-1}$,

$\cos 2t \to \dfrac{p}{p^2+4}$, $\quad \sin 2t \to \dfrac{2}{p^2+4}$,

и, пользуясь свойством линейности, находим

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t$$

Ответ: $f(t) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}e^t + \dfrac{1}{20}\cos 2t - \dfrac{1}{20}\sin 2t.$

Задача 13. Операционным методом решить задачу Коши

$$x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Решение. Составляем уравнение в изображениях.

Пусть $x'(t) \to X(p)$, тогда

$$x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \to p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1,$$

$$\cos t \to \frac{p}{p^2+1}.$$

Получаем уравнение в изображениях $p^2 X(p) + 1 + X(p) = \dfrac{2p}{p^2+1}$.

Выражаем из уравнения $X(p)$: $X(p) = \dfrac{2p}{(p^2+1)^2} - \dfrac{1}{p^2+1}$.

По таблице приложения 3 находим оригинал для $X(p)$:

$$\frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t, \qquad \frac{2p}{(p^2+1)^2} \leftarrow t\sin t.$$

Значит, $X(p) \leftarrow t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t$.

Получаем решение исходного уравнения $x(t) = (t-1)\sin t$.

Ответ: $x(t) = (t-1)\sin t$.

Некоторые сведения теории функции комплексного переменного

1. Комплексные числа

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*, определяемая равенством

$$i^2 = -1,$$

x называется действительной частью, y мнимой частью числа z. Их обозначают так:

$$x = Re\, z, \quad y = Im\, z.$$

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то получается действительное число $x + i0 = x$.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется число, которое обозначается $|z|$ и вычисляется по формуле

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Модуль является действительным неотрицательным числом, то есть $|z| \ge 0$. Геометрически $|z|$ – это длина радиус-вектора точки z на комплексной плоскости. Равенство $|z| = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$ одновременно.

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором z называется *аргументом* z и обозначается $Arg\,z$. Он определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается $\arg z$. Имеет место равенство

$$Arg\,z = \arg z + 2\pi k,\;\; k \in Z.$$

Для $z = 0$ понятие аргумента не определено.

Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если}\quad x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если}\quad x < 0,\; y \ge 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если}\quad x < 0,\; y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad x = 0,\; y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad x = 0,\; y < 0. \end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определим $e^{i\varphi}$, где i – мнимая единица, $\varphi \in \mathbb{R}$, следующей формулой

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* Тогда любое комплексное число z можно представить в так называемой *показательной форме*

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

где r - модуль комплексного числа z, а φ - аргумент комплексного числа z.

2. Основные элементарные функции комплексного переменного

1. Показательная функция $e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y)$.

2. Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Общая показательная функция $a^z = e^{z\,Lna}$.

4. Степенная функция с натуральным показателем
$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),\ n \in \mathbb{N}$.

5. Степенная функция с дробным показателем $1/m$

$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{|z|} \cdot (\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{m} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{m}),$$

$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m-1, m \in \mathbb{N}$.

6. Общая степенная функция $z^a = e^{a\,Lnz}$.

7. Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

8. Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

9. Обратные тригонометрические функции

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \cdot \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \qquad \operatorname{Arccos} z = -i \cdot \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{i - z}{i + z}\right),\ (z \neq \pm i), \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z - i}{z + i}\right), (z \neq \pm i).$$

10. Обратные гиперболические функции

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

3. Условия Коши-Римана

Для дифференцируемости функции $f(z)=u(x;y)+i\,v(x;y)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства (условия Коши-Римана)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\ .$$

4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Величина $k=|f'(z_0)|$ – это коэффициент растяжения (сжатия) плоскости в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. Если $|f'(z_0)|>1$, то плоскость растягивается в k раз, если $|f'(z_0)|<1$, то плоскость сжимается в $\dfrac{1}{k}$ раз.

Аргумент производной в точке z_0 – это угол φ поворота при отображении $w=f(z)$ касательной к кривой, проходящей через точку z_0.

$$\varphi=\arg f'(z_0)\,.$$

5. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, точки $z_0\in D$ и $z_1\in D,$ то верна формула

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz=F(z)-F(z_0),$$

где $F(z)$ – некоторая первообразная функции $f(z)$ в области D.

6. Теорема Коши

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру L, лежащему в области D, равен нулю, т.е. $\oint\limits_L f(z)\,dz=0.$

7. Интегральная формула Коши

Пусть функция аналитична в замкнутой односвязной области $\overline{D}$ и L - граница области D. Тогда имеет место формула

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

где $z_0\in D$ - любая точка внутри области D, а интегрирование по контуру L производится в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки).

8. Интегральная формула Коши для производных

Для всякой дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ существуют производные всех порядков, причём n-ую производную можно вычислить по формуле

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

где $z_0 \in D$ - любая точка внутри области D, а интегрирование по контуру L производится в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки).

9. Вычет функции

Вычетом аналитической функции $f\left(z\right)$ в изолированно особой точке z_0 называется комплексное число

$$\text{Res } f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f\left(z\right)dz,$$

где L – окружность с центром в точке z_0, лежащая в области аналитичности функции $f(z)$, то есть в кольце $0 < \left|z - z_0\right| < R$ (интегрирование по контуру L производится в положительном направлении).

Для особой точки z_0 вычет равен коэффициенту при минус первой степени в разложении функции $f\left(z\right)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0

$$\text{Res } f\left(z_0\right) = c_{-1}.$$

Способ вычисления вычета зависит от типа особой точки.

1). Если точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f\left(z\right)$, то

$$\text{Res } f\left(z_0\right) = 0.$$

2). Если точка z_0 является простым полюсом (полюсом первого порядка) функции $f\left(z\right)$, то

$$\text{Res } f\left(z_0\right) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\cdot f(z);$$

если точка z_0 является полюсом порядка m функции $f\left(z\right)$, то

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{d\,z^{m-1}}\left(\left(z-z_0\right)^m \cdot f\left(z\right)\right).$$

3). Если точка z_0 является существенно особой точкой функции $f\left(z\right)$, то

$$\text{Res } f\left(z_0\right) = c_{-1}.$$

10. Теорема Коши о вычетах

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром L за исключением конечного числа особых точек z_k $(k=1,\ 2...,\ n)$, лежащих внутри области D, то

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \text{Res } f(z_k).$$

Некоторые сведения операционного исчисления

Свойства преобразования Лапласа $f(t) \to F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt.$

1. Линейность.

Линейной комбинацией оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений, т.е. если $f_1(t) \to F_1(p),\ f_2(t) \to F_2(p)$, c_1 и c_2 – постоянные числа, то $c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \to c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p)$.

2. Подобие.

Если $f(t) \to F(p)$, $\lambda > 0$, то $f(\lambda t) \to \frac{1}{\lambda} \cdot F(\frac{p}{\lambda})$, то есть умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

3. Смещение (затухание).

Если $f(t) \to F(p)$, $a = const$, то $e^{at} \cdot f(t) \to F(p-a)$, то есть умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой смещение переменной p.

4. Запаздывание.

Если $f(t) \to F(p)$, $\tau > 0$, то $f(t-\tau) \to e^{-p\tau} F(p)$, то есть запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$.

5. Дифференцирование оригинала.

Если $f(t) \to F(p)$ и функции $f'(t),\ f''(t),\ ...,\ f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \to p \cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \to p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \to p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),$$

$$f^{(n)}(t) \to p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - ... - f^{n-1}(0).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений arctg x

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
arctg x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

Приложение 2

Таблица разложений в ряд Тейлора-Маклорена некоторых элементарных функций

1. $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \qquad z \in \mathbb{C}$
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad z \in \mathbb{C}$
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad z \in \mathbb{C}$
4. $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots \qquad \lvert z \rvert < 1$
5. $(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$ $+ \ldots \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots, \qquad \lvert z \rvert < 1$ При $\alpha = -1$ получаем $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots, \qquad \lvert z \rvert < 1$
6. $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad z \in \mathbb{C}$
7. $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad z \in \mathbb{C}$

Приложение 3

Таблица оригиналов и изображений

№ п/п	Оригиналы f(t)	Изображения F(p)
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$sh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6	$ch(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
7	$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot cos(\omega t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
11	$t^n\cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
12	$t\cdot sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
13	$t\cdot cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
14	$\frac{\frac{1}{\omega}\cdot\sin(\omega t)-t\cdot\cos(\omega t)}{2\omega^2}$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис-пресс, 2013. ISBN 978-5-8112-3480-6
2. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного. М.: Высшая школа, 2013. ISBN 978-5-0600-3145-4
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М: Ленанд, 2013. ISBN 978-5-9710-1423-2
4. Жулева Л.Д., Шевелева В.Н. и др. Сборник задач по высшей математике, часть III. Ряды. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. М.: РИО МГТУ ГА, 2000 , № 1461.

Содержание