МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Е.А. Жукова, О.Г. Илларионова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению
практических заданий

для студентов I курса
направления подготовки 25.03.02
очной формы обучения

Москва - 2017

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики
Е.А. Жукова, О.Г. Илларионова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению
практических заданий

для студентов I курса
направления подготовки 25.03.02
очной формы обучения

Москва - 2017

ББК 518
С17

Рецензент – доцент В.А.Ухова

Жукова Е.А., Илларионова О.Г.

С17 Высшая математика. Пособие по выполнению практических заданий. - М.: МГТУ ГА, 2017. - 48 с.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Высшая математика» по учебному плану для студентов I курса направления подготовки 25.03.02 очной формы обучения.

В пособии содержатся варианты трех контрольных домашних заданий по темам «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Пределы», «Производная и её приложения», «Интегралы», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», приведены образцы решения наиболее трудных задач и некоторые справочные материалы из курса математики, необходимые для выполнения КДЗ.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 09.03.2017 г. и методического совета 12.03.2017 г.

	Подписано в печать .04.2017 г.	
Печать офсетная	Формат 60x84/16	0,87 уч.-изд. л.
усл.печ.л.	Заказ №	Тираж 80 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 1

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Вариант 1

1. Разложить вектор $\overline{c} = (6{,}5)$ по векторам $\overline{a} =(2{,}3)$ и $\overline{b} = (1,-2)$.
2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}{}^\wedge\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}{}^\wedge\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}{}^\wedge\overline{c}) = (\overline{b}{}^\wedge\overline{c}) = 60^0$. Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})\,(\overline{b} + 3\overline{c})$.
3. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 6$. Найти, при каком β векторы $\overline{a} + \beta\overline{b}$ и $\overline{a} - \beta\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.
4. Вычислить $|[\overline{a}\overline{b}]|$, если $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 15$ и $(\overline{a}{}^\wedge\overline{b}) = 30^0$.
5. При каком λ векторы $\overline{a} = (3\lambda,\ 1,\ 4)$, $\overline{b} = (3,\ 2\lambda,\ -6)$ и $\overline{c} = (3,\ 1,\ -2)$ будут компланарны?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ -3)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(1,\ 2)$ и $C(-1,\ -5)$.
7. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2,\ 1,\ -1)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n} = (1,\ -2,\ 3)$.

Вариант 2

1. Разложить вектор $\overline{c} = (4,-2)$ по векторам $\overline{a} =(1{,}3)$ и $\overline{b} = (2,-7)$.
2. Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}{}^\wedge\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}{}^\wedge\overline{c}) = (\overline{b}{}^\wedge\overline{c}) = 60^0$.
Найти $\left(3\overline{a} - 2\overline{b}\right)(\overline{b} + 3\overline{c})$.
3. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$. Найти, при каком β векторы $\overline{a} + \overline{\beta b}$ и $\overline{a} - \beta\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.
4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}{}^\wedge\overline{b}) = 60^0$.
5. При каком λ векторы $\overline{a} = (\lambda,\ 3,\ 2)$, $\overline{b} = (2,\ -3,\ -4)$ и $\overline{c} = (-3,\ 12,\ 6)$ будут компланарны?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,\ 2)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(-1,\ 0)$ и $C(2,\ 3)$.
7. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(0,\ -2,\ 3)$ и $B(3,\ -2,\ 1)$.

Вариант 3

1. Разложить вектор $\overline{c} = (2,\ 7)$ по векторам $\overline{a} =(1{,}2)$ и $\overline{b} = (3,-4)$.
2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}{}^\wedge\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}{}^\wedge\overline{c}) = (\overline{b}{}^\wedge\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.
3. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 10$. При каком β векторы $\overline{a} + \beta\overline{b}$ и $\overline{a} - \beta\overline{b}$ будут

взаимно перпендикулярны?

4. При каком α векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 5\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.
5. При каком λ векторы $\overline{a}$ = (1, 3, λ), $\overline{b}$ = (4, 5, -1) и $\overline{c}$ = (2, -1, 5) будут компланарны?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2, -2) параллельно прямой, соединяющей точки B(-5, 4) и C(0, 2).
7. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A(4, 5, 13) и B(-6, 0, 1).

Вариант 4

1. Разложить вектор $\overline{c} = (1, 8)$ по векторам $\overline{a}$ =(5,-2) и $\overline{b} =$ (1,3).
2. Дано: $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 1, $|\overline{c}|$ = 8, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.
   Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.
3. Дано: $|\overline{a}|$ = 4, $|\overline{b}|$ = 1. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(-1, 2, 3), B(5, 1, 4) и C(3, 2, 2).
5. При каком λ векторы $\overline{a}$ = (0, 1, λ), $\overline{b}$ = (1, 0, λ) и $\overline{c}$ = (1, 1, 2) будут компланарны?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-3, 2) параллельно прямой, соединяющей точки B(2, 1) и C(-5, -1).
7. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\overline{n}$ = (-1, 0, 2).

Вариант 5

1. Разложить вектор $\overline{c} = (0, 9)$ по векторам $\overline{a}$ =(4,3) и $\overline{b} =$ (5,6).
2. Дано: $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 4, $|\overline{c}|$ = 2, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.
   Найти $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(3\overline{a} + \overline{c})$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ =(2, -4, 4) и $\overline{b}$ =(-3, 2, 6).
4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a}$ = (3, -2, -2) и $\overline{b}$ = (1, -2, -1).
5. При каком λ векторы $\overline{a}$ = (0, 1, λ), $\overline{b}$ = (1, 3, 4λ) и $\overline{c}$ = (1, 1, 2λ) будут компланарны?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -2) параллельно прямой, соединяющей точки B(0, 7) и C(7, 0).
7. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A(2, 0, 2) параллельно прямой:
   $x = 2 + 2t, \quad y = 3 + 3t, \quad z = 7 - 4t.$

Вариант 6

1. Разложить вектор $\overline{c}$ =(-1, 10) по векторам $\overline{a}$ =(-1,1) и $\overline{b}$ = (5,4).
2. Найти $(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})^2$, если $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=4$, $|\overline{c}|=2$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=60^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})=90^0$, $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})=60^0$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ =(-4, 2, 4) и $\overline{b}$=(6, 2, -3).
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 3, 4), B(1, 0, 6) и C(4, 5, -2).
5. При каком λ векторы $\overline{a}$ = (λ, 2, -3), $\overline{b}$ = (1, -1, 4) и $\overline{c}$ = (1, -2, 3) будут компланарны ?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 6) перпендикулярно к прямой, соединяющей точки B(-1, 4) и C(-2, 3).
7. Точка P(0, -1, -2) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Вариант 7

1. Разложить вектор $\overline{c}$ =(-2, 11) по векторам $\overline{a}$ = (-5, -4) и $\overline{b}$ = (1, -1).
2. Вычислить $(\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}-2\overline{c})$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$, $|\overline{c}|=4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})=(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})=90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=60^0$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (3, 1, 4) и $\overline{b}$ =(2, 0, 5).
4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\overline{a}-2\overline{b}$ и $2\overline{a}+3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=30^0$.
5. Лежат ли точки A(1, 0, 2), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1) и D(2, 1, 3) в одной плоскости?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 3) перпендикулярно к прямой, соединяющей точки B(2, -1) и C(-8, 2).
7. Точка P(-2, 1, -2) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Вариант 8

1. Разложить вектор $\overline{c}$ =(-3, 12) по векторам $\overline{a}$ = (6, 5) и $\overline{b}$ = (1, -1).
2. Найти $(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c})^2$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$, $|\overline{c}|=4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})=(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})=90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=60^0$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$=(8, 6, 0) и $\overline{b}$ = (3, 0, -4).
4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$ и $3\overline{a}+3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=45^0$.
5. Лежат ли точки A(1, 3, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1) и D(2, 0, -4) в одной плоскости?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-7, 1) перпендикулярно прямой, соединяющей точки B(0, -2) и C(7, 1).
7. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки A(2, 3, -1) и B(-1, 2, 3).

Вариант 9

1. Разложить вектор по векторам $\overline{a}$ = (1, 4) и $\overline{b}$ = (2, -1).
2. Дано $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ = $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})$ = $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})$ = 60^0.
   Найти $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$ $(2\overline{a}-\overline{b})$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (2, 1, 3) , $\overline{b}$ = (-3, 3, 1).
4. Вычислить $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|$ = 12, $|\overline{b}|$ = 10, $|[\overline{a},\overline{b}]|$ = 72 и угол $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ – острый.
5. Лежат ли точки A(0, -1, 2), B(-2, 4, 1), C(5, 3, 7) и D(4, 0, 3) в одной плоскости?
6. Найти точку A, симметричную точке B(-2, 1) относительно прямой
   $3x+2y-1=0$.
7. Через точки A(0, -1, -2) и B(2, 1, 0) проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

Вариант 10

1. Разложить вектор $\overline{c}$ =(-5, 14) по векторам $\overline{a}$ = (4, 5) и $\overline{b}$ = (2, -2).
2. Вычислить $(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})^2$, если $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5 и
   $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ = $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})$ = $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})$ = 60^0.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (4, 2, 4) и $\overline{b}$ = (3, 4, 0).
4. Найти $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|$ = 5, $|\overline{b}|$ = 6, $|[\overline{\mathrm{a}},\overline{\mathrm{b}}]|$ = 15 и угол $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ – острый.
5. Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(1, -2, -2), C(0, -2, -1) и D(2, -3, -2) в одной плоскости?
6. Найти точку A, симметричную точке B(1, 2) относительно прямой
   $3x+5y-4=0$.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(1, 2, 0) параллельно векторам $\overline{a}$ = (1, -1, 0) и $\overline{b}$ = (0, 4, -2).

Вариант 11

1. Разложить вектор $\overline{c}$ =(-1, 3) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).
2. Найти угол между векторами $\overline{p}=\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{q}=2\overline{a}-\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 2 и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ = 30^0.
3. Определить при каком β векторы $\overline{a}$ = (2 β, β, 2) и $\overline{b}$ = (2, -3, -1) будут взаимно перпендикулярны.
4. Является ли четырехугольник с вершинами в точках A(2, -1, 3), B(1, 2, -1), C(-4, 7, 5) и D(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.
5. Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(-2, 1, -2), C(-1, 0, -2) и D(3, 2, 1) в одной плоскости?

6. Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины А, если координаты вершин известны координаты точек $A(-2, 3)$, $B(5, 7)$ и $C(-3, -2)$.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-4, 2,-1)$ и $B(0, 3, 2)$ параллельно вектору $\overline{a} = (3, 4, 7)$.

Вариант 12

1. Разложить вектор $\overline{c} = (4, 1)$ по векторам $\overline{a} = (2, -3)$ и $\overline{\mathrm{b}} = (1, 2)$.
2. Вычислить $(2\overline{a} - 5\overline{b})^2$, если $|\overline{a}| = 11$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,{}^\wedge \overline{b}) = 90^0$.
3. Определить при каком α векторы $\overline{a} = (\alpha, -3\alpha, 1)$ и $\overline{b} = (1, 2, -10)$ будут взаимно перпендикулярны.
4. Вычислить синус угла между векторами $\overline{a} = (2, 3, -1)$ и $\overline{b}(1, 2, 3)$.
5. Лежат ли точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$, $C(3, 1, -1)$ и $D(4, -2, -2)$ в одной плоскости?
6. Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если известны координаты вершин $A(-1, 1)$, $B(6, 5)$ и $C(-2, -4)$.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, 3, 6)$ и $B(2, 1, -1)$ параллельно прямой $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Вариант 13

1. Разложить вектор $\overline{c} = (5, 3)$ по векторам $\overline{a} = (2, -3)$ и $\overline{b} = (1, 2)$.
2. Вычислить скалярное произведение векторов $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $\overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\,{}^\wedge \overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,{}^\wedge \overline{c}) = (\overline{b}\,{}^\wedge \overline{c}) = 60^0$.
3. Определить, при каком α векторы $\overline{a} = (2\alpha, 3, 2)$ и $\overline{b} = (1, 2, -3\alpha)$ будут взаимно перпендикулярны.
4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,{}^\wedge \overline{b}) = 60^0$.
5. При каком значении x точки $M(x, 1, 0)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?
6. Определить острый угол между медианой и высотой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если известны координаты вершин $A(-3, 5)$, В(4, 9) и $C(-4, 0)$.
7. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x - z - 4 = 0$ и $x + y - 2z + 1 = 0$.

Вариант 14

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (6, 5) по векторам $\overline{a}$ = (-2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).
2. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$, и выполнено равенство $(\overline{a} - \overline{b})^2 + (\overline{a} + 2\overline{b})^2 = 20$.
3. Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = (1, 3α, 2) и $\overline{b}$ = (2, 3α, -3) будут взаимно перпендикулярны.
4. Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ =(0, 1, 2) и $\overline{b}$(2, 0, 1), образует тупой угол с осью OX и $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.
5. При каком значении x точки M(x, 2, -3), A(2, 1, 0), B(0, 1, 4) и C(1, 0, 1) будут лежать в одной плоскости?
6. В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин: A(5, 6), B(-2, 2) и C(-3, -3).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1, 0, 2) и B(3, 2, 5) параллельно оси OZ.

Вариант 15

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (7, 7) по векторам $\overline{a}$ = (-2, 3) и $\overline{b}$ = (1, 2).
2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 45^0$.
3. Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = (α -4, α, 4) и $\overline{b}$ = (α, -1, 1) будут взаимно перпендикулярны.
4. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (1, α, 1) и $\overline{b}$ = (2, 1, 0), равна $\sqrt{6}$.
5. При каком значении x точки M(x, 0, 0), A(1, 1, 1), B(2, 1, 0) и C(1, 0, 2) лежат в одной плоскости?
6. В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин треугольника: A(6, 4), B(-1, 0) и C(-2, -5).
7. Составить параметрические и канонические уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x + 4y - 7z + 8 = 0$ и $5x + 2y - z - 2 = 0$.

Вариант 16

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (8, 9) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (-1, -2).
2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 2\overline{a} - \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} + \overline{b}$ как на сторонах, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные векторы и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$.
3. Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = (2α, 4α, 1) и $\overline{b}$(2, 4, 2) будут взаимно перпендикулярны.

4. Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (1, -2, 3) и $\overline{b}$(2, 1, 1), образует острый угол с осью OZ и $|\overline{c}|$ = 2.
5. При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(2, 1, 1)$, $B(2, 2, 0)$ и $C(2, 0, 2)$ будут лежать в одной плоскости?
6. В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин треугольника: A(-4, 1), B(-3, 4) и C(4, 8).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(5, 3, 1) и B(1, 1, 2) параллельно оси OZ.

Вариант 17

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (9, 11) по векторам $\overline{a}$ = (4, -6) и $\overline{b}$ = (-1, -2).
2. Найти угол между единичными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если векторы $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} - 3\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.
3. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (0, 3, 4), образует тупой угол с осью OZ и $|\overline{c}|$ = 50.
4. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (3, 0, 1) и $\overline{b}$ = (α, 2, 2), равна $\sqrt{76}$.
5. При каком значении x точки M(-5, 1, 0), A(2, 1, 2), B(x, 0, 3) и C(0, 4, 2) будут лежать в одной плоскости?
6. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-5, -2), B(-4, 3) и C(3, 7). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OX и точку A(2, -1, 6).

Вариант 18

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (10, 13) по векторам $\overline{a}$ = (4, -6) и $\overline{b}$ = (2, 4).
2. Найти углы между векторами $\overline{a}$ и $\overline{p}$ и $\overline{p}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные векторы, $\overline{p} = 2\overline{a} - \overline{b}$, угол $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 120^0$.
3. Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (-2, -2, 1), образует острый угол с осью $OУ$ и $|\overline{c}|$ = 27.
4. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он образует острый угол с осью OX, перпендикулярен векторам $\overline{a}$ = (0, 0, 1), $\overline{b}$ = (8, -15, 3) и $|\overline{c}|$ = 51.
5. При каком значении х точки $M(x, 0, 0)$, $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 0)$ и $C(2, 0, 3)$ лежат в одной плоскости ?
6. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-4, -4), B(-3,1) и C(4, 5). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и точку A(-1, 4, -3).

Вариант 19

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (11, 15) по векторам $\overline{a}$ =(1,2) и $\overline{b} =$ (2,-3).
2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{}\overline{b}) = (\overline{c}\hat{}\overline{b}) = 90^0$ и $(\overline{c}\hat{}\overline{a}) = 120^0$.
3. Доказать, что векторы $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 7\overline{k}$ и $\overline{b} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$ взаимно перпендикулярны.
4. В треугольнике с вершинами A(2, -1, 6), B(3, 0, 5) и C(5, 2, 6) найти длину высоты AM.
5. Можно ли векторы $\overline{a}$ = (1, 0, 2), $\overline{b}$ = (-1, 1, 0) и $\overline{c}$ = (1, -1, 2) взять за базисные в трехмерном пространстве?
6. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-6, 0), B(-5, 5) и C(2, 9). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось $OУ$ и точку A(-1, 4, 5).

Вариант 20

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (7, 16) и по векторам $\overline{a}$ = (5, 2) и $\overline{b}$ = (1, -4).
2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} - \overline{2b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{}\overline{b}) = (\overline{b}\hat{}\overline{c}) = 90^0$ и $(\overline{c}\hat{}\overline{a}) = 60^0$.
3. Найти вектор $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (2, 1, -1) и $(\overline{c}, \overline{a})$ = 3.
4. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (2, -1, 2) и $\overline{b}$ = (1, α, -1), равна $3\sqrt{2}$.
5. Можно ли векторы $\overline{a}$(-1, 1, 0), $\overline{b}$(1, -1, 1) и $\overline{c}$(0, 2, 1) взять за базисные в трехмерном пространстве?
6. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-3, 5), B(4, 9) и C(-4, 0). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OX и точку A(-1, 7, 3).

Вариант 21

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (3, 11) по векторам $\overline{a}$ = (3, -1) и $\overline{b} =$ (3,-5).
2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{}\overline{b}) = (\overline{b}\hat{}\overline{c}) = 90^0$ и $(\overline{a}\hat{}\overline{c}) = 60^0$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{a}$ = (1, 3, 5) на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.
4. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он составляет тупой угол с осью $OУ$, перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (4, -2, -3), $\overline{b}$ = (0, 1, 3), $|\overline{c}|$ = 26.
5. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1) и D(4, 1, 3).

6. В треугольнике ABC известны координаты вершин: $A(2, -5)$, $B(1, -3)$, $C(4, 1)$. Найти угол BAC и написать уравнение средней линии, параллельной стороне BC.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 4, 1)$, $B(2, 3, -1)$ и $C(0, -1, 0)$.

Вариант 22

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (7, -4) по векторам $\overline{a}$ =(4, 3) и $\overline{b}$ = (2 ,-8).
2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{b} - \overline{a} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.
3. Вычислить $Пр_{\overline{c}}(3\overline{a} - 2\overline{b})$, если $\overline{a}$ = (-2, 1, 1), $\overline{b} = \overline{i} + 5\overline{j}$, $\overline{c} = (4, 4, -2)$.
4. При каких α и β вектор $\overline{c} = \alpha\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$, будет коллинеарен вектору $[\overline{a}, \overline{b}]$, если $\overline{a}$ =(3, -1, 1) и $\overline{b}$ = (1 ,2, 0)?
5. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(1, 2, 3)$, $B(6, 0, 0)$, $C(1, 4, 9)$ и $D(1, 8, 3)$.
6. В треугольнике ABC известны координаты вершин: $A(-4, -4)$, $B(-3, 1)$ и $C(4, 5)$. Найти угол ABC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, 0, 1)$ и $B(2, 3, 4)$ параллельно оси OZ.

Вариант 23

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (-8, 10) по векторам $\overline{a}$ =(-3 ,1) и $\overline{b}$ = (4, 6).
2. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$ и векторы $\overline{a} + 3\overline{b}$ и $7\overline{a} - 5\overline{b}$ перпендикулярны.
3. Найти модуль вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$, $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$.
4. Найти проекцию вектора $\overline{p} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ на вектор $[[\overline{a}, \overline{b}]]$, где $\overline{a} = \overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = -\overline{j} + 5\overline{k}$.
5. Вычислить обьем пирамиды с вершинами в точках $A(2, 1, 3)$, $B(4, -2, 0)$, $C(1, 3, -8)$ и $D(7, 5, 2)$.
6. В треугольнике ABC с вершинами $A(1, -3)$, $B(0, -1)$ и $C(3, 3)$ найти угол BAC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$ и $C(0, 3, 2)$.

Вариант 24

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (11, -6) по векторам $\overline{a}$ = (-2, 1) и $\overline{b}$ = (3, -2).
2. Вычислить длину вектора $\overline{p} + 2\,\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\,\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 120^0$.

3. Найти наименьший внутренний угол треугольника с вершинами в точках A(-1, 3, 1), B(0, 2, -3) и C(3, -1, 0).
4. Найти проекцию вектора $\overline{p} = \overline{b} - 2\overline{a}$ на вектор $\overline{q} = [\overline{c}, \overline{b}]$, если $\overline{a}$ = (2, 1, -1), $\overline{b}$ = (2, -1, 3) и $\overline{c}$ = (3, -1, 2).
5. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A(1, 1, 1), B(4, 4, -2), C(2, 0, 2) и D(0, 2, 2).
6. В треугольнике ABC известны координаты двух вершин A(2, -2) и B(3, -1) и точка пересечения медиан E(1, 0). Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины С.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(5, -1, 0), B(2, 1, 3) и C(1, 4, 1).

Вариант 25

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (13, -7) по векторам $\overline{a}$ = (-2, 1) и $\overline{b}$ = (3, -2).
2. Вычислить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 45^0.
3. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна с. Вычислить $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.
4. Треугольник ABC построен на векторах $\overline{AB} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$ и $\overline{BC} = \overline{a} + 5\overline{b}$. Найти длину высоты CK, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны и по модулю равны 1.
5. Найти координаты вершины D тетраэдра, если известно, что она лежит на оси OX, объем тетраэдра равен 3, A(5, 0, 3), B(3, 3, -2) и C(4, 2, 2).
6. В треугольнике ABC известны координаты двух вершин A(3, -4), B(4, -3) и точки пересечения медиан E(2, -2). Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(0, 3, 2), B(1, 0, -1) и C(1, 5, -1).

Вариант 26

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (3, 6) по векторам $\overline{a}$ =(5 ,4) и $\overline{b}$ = (2, 2).
2. Дано: $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 1, $|\overline{c}|$ = 4, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 90^0, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})$ = $(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})$ = 60^0. Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{b} + 3\overline{c})$.
3. Дано: $|\overline{a}|$ = 4, $|\overline{b}|$ = 10. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(-1, 2, 3), B(5, 1, 4) и C(3, 2, 2).
5. При каком λ векторы $\overline{a}$ = (0, 1, λ), $\overline{b}$ = (1, 0, λ) и $\overline{c}$ = (1, 1, 2) будут компланарны?

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-3, 2) параллельно прямой, соединяющей точки B(2, 1) и C(-5, -1).
7. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки A(0, -2, 3) и B(3, -2, 1).

Вариант 27

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (-1, 10) по векторам) $\overline{a}$ =(-1, 1) и $\overline{b}$ = (6, 3).
2. Найти $(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $|\overline{c}| = 2$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ =(-1, 1, 6) и $\overline{b}$ =(3, 2, 4).
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 3, 4), B(1, 0, 6) и C(4, 5, -2).
5. Лежат ли точки A(1, 2, 1), B(0, 1, 5), C(-1, 4, 1) и D(2, 1, 3) в одной плоскости?
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-7, 1) перпендикулярно прямой, соединяющей точки B(0, -2) и C(5, 1).
7. Точка P(0, -1, -2) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Вариант 28

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (-2, 11) по векторам $\overline{a}$ =(-1, 1) и $\overline{b}$ = (5, 4).
2. Найти $(\overline{a} + \overline{b} - \overline{c})^2$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 120^0$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (2, 1, 3), $\overline{b}$ = (-3, 4, 1).
4. Вычислить $(\overline{a}, \overline{b})$, если $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{b}| = 5$, $|[\overline{a}, \overline{b}]| = 15$ и угол $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ – тупой.
5. Лежат ли точки A(0, -1, 2), B(-2, 4, 1), C(5, 3, 7) и D(4, 0, 3) в одной плоскости?
6. Найти точку A, симметричную точке B(-2, 1) относительно прямой $3x + 2y - 1 = 0$.
7. Точка P(-2, 1, -2) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Вариант 29

1. Разложить вектор $\overline{c}$ =(-1, 3) по векторам $\overline{a}$ =(6 ,-3) и $\overline{b}$ = (3,-8).
2. Найти угол между векторами $\overline{p} = \overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 2\overline{a} - \overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.
3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (4, 2, 4) и $\overline{b}$ = (3, 4, 0).
4. Является ли четырехугольник с вершинами в точках A(2, -1, 3), B(1, 2, -1), C(-4, 7, 5) и D(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

5. Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(1, -2, -2), C(0, -2, -1) и D(2, -3, -2) в одной плоскости?
6. Найти точку A, симметричную точке B(1, 2) относительно прямой $3x + 5y - 4 = 0$.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(1, 2, 0) параллельно векторам $\overline{a}$ = (1, -1, 0) и $\overline{b}$ = (0, 4, -2).

Вариант 30

1. Разложить вектор $\overline{c} = (5, 7)$ по векторам $\overline{a}$ =(-1,2) и $\overline{b} =$ (3,-8).
2. Вычислить $(5\overline{a} - 3\overline{b})^2$, если $|\overline{a}| = 7$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$.
3. Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (α, -3α, 1) и $\overline{b}$ = (1, 2, -10) будут взаимно перпендикулярны.
4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 5\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 4\overline{a} - 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$.
5. При каком значении x точки M (x, 0, 4), A(5, -2, 1), B(3, -1, 2) и C(2, 0, -1) будут лежать в одной плоскости?
6. Определить острый угол между медианой и высотой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если известны координаты вершин A(-3, 5), B(4, 9) и C(-4, 0).
7. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x - z - 9 = 0$ и $2x + y - 2z + 4 = 0$.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ № 1, 6, 7

КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ № 1

Задача 1. Разложить вектор $\overline{c} = (2, 0)$ по векторам $\overline{a}$ =(1,1) и $\overline{b} =$ (1,-1).

Решение. Разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это значит представить $\overline{c}$ в виде $\overline{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$, где α и β пока неизвестные числа. Переходя к координатам, получим: $2\overline{i} + 0\overline{j} = (\alpha + \beta)\overline{i} + (\alpha - \beta)\overline{j}$.

В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases},$$

решением которой являются числа α = 1 и β = 1.

Отсюда $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

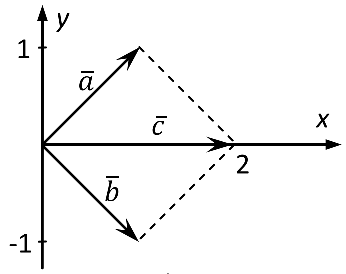


Рис.1

Ответ: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Задача 6. В треугольнике ABC известны координаты вершины A(4, 0) и уравнения высоты BE: $2x - 3y + 15 = 0$ и медианы BD: $2x + 3y - 3 = 0$. Составить уравнения сторон треугольника.

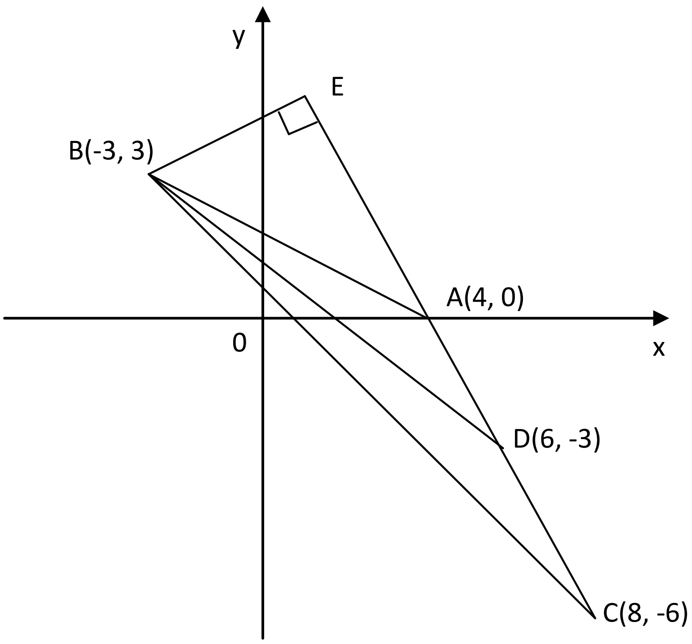


Рис. 2

Решение. Сделаем чертеж (Рис. 2). Находим координаты вершины B как точки пересечения прямой BD и высоты BE:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 \\ 2x + 3y - 3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x = -3 \\ y = 3. \end{cases}$$

Составим уравнение AC, для чего определим её угловой коэффициент из условия перпендикулярности AC и BE:

$$K_{BE} = \frac{2}{3}; \;\; K_{AC} = \frac{-1}{K_{BE}} = -\frac{3}{2}.$$

Зная угловой коэффициент прямой и одну точку, находим уравнение AC:

$$y = -\frac{3}{2}(x - 4) \text{ или } 2y + 3x - 12 = 0.$$

Находим координаты D как точки пересечения медианы BD и стороны AC:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \;\; => \;\; \begin{cases} x = 6 \\ y = -3. \end{cases}$$

Находим координаты вершины C, используя то, что D – середина отрезка AC. Получаем C(8, -6). Зная координаты всех вершин треугольника, составляем уравнения сторон AB и BC как прямых, проходящих через заданные точки.

$$AC\text{:} \; \frac{y-3}{0-3} = \frac{x+3}{4+3} \;\; => 3x + 7y - 12 = 0,$$

$$BC\text{:} \frac{y-3}{-6-3} = \frac{x+3}{8+3} \;\; => 11y + 9x - 6 = 0.$$

Ответ: AC: $3x + 7y - 12 = 0$; BC: $11y + 9x - 6 = 0$.

Задача 7. Найти длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если даны координаты D(1, 6, 3), A(4, 5, 2), B(-1, 11, 6) и C(2, -1, 3).

Решение. Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение этой плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -1-4 & 11-5 & -6-2 \\ 2-4 & -1-5 & 3-2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y-5)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-42(x-4) + 21(y-5) + 42(z-2) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

Находим теперь расстояние от точки D до плоскости ABC:

$$h = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 6 - 2\cdot 3 + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: $h = 3$.

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 2

Пределы. Производная и её приложения

Задачи 1– 4. Найти пределы функций.

Задачи 5 – 9. Найти производные функций.

Задачи 10. Найти $y''(x)$, если $y = f(x)$.

Задача 11. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

Задача 12. Решить задачу на уравнение и свойства касательной к графику функции $y = f(x)$.

Вариант 1

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2-1)x^4}{x+1-6x^6}$ 2. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}}\dfrac{15x^2-2x-1}{5x^2-4x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 6x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^x$ 5. $y=2\sqrt{x}+\ln x$ 6. $y=\frac{3x^3+15x-1}{x^2-1}$

7. $y=e^x\cdot\arcsin x$; 8. $y=3^{-x^4}$; 9. $y=\sqrt[5]{2+x-x^2}$;

10. $y=\sin^2 x$; 11. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=(x^3+1)/3$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Вариант 2

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+4x-5}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x+1)}{x^{10}+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin 3x}{\ln(1+x^2)}$

4. $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$ 5. $y=\frac{2x^2-1}{3x^3}$ 6. $y=\ln(x+\sqrt{x})$

7. $y=\cos^2 28x$ 8. $y=e^{2x}\sqrt{1-x}$; 9. $y=\arccos\frac{1}{x}$

10. $y=(2x+1)^{15}$ 11. $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

12. Найти точки, в которых касательные, проведенные к графику функции $y=x(x-4)^3$, параллельны оси абсцисс.

Вариант 3

1. $\lim\limits_{x\to5}\frac{5x^2-24x-5}{x^3-3x^2-10x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$ 5. $y=x-\ln\sqrt{x}$ 6. $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$

7. $y=2^{\sin x}$ 8. $y=\frac{\operatorname{arctg}3x}{x^3+12x}$; 9. $y=\cos 3x\cdot\sqrt[7]{x}$

10. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ 11. $y=\frac{2}{x^2+2x}$

12. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y=\frac{(x-4)}{(x-2)}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

Вариант 4

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1+2x}{x+2x^3-10x^5}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-9}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-4x}$ 5. $y=3x^2\cdot\operatorname{tg}x$ 6. $y=\ln(7x-5)$

7. $y=3^{\operatorname{ctg}x}$ 8. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2+x^4}$ 9. $y=\frac{4}{x^3}+\sqrt[5]{x^4}$

10. $y=\sin\sqrt{x}$ 11. $y=\frac{4x^2+9}{4x+8}$

12. Показать, что на графике функции $y=x^3+x^2+x+1$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

Вариант 5

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-6x+7x^3}{3-x^3}$ 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+1}$ 5. $y=\operatorname{ctg}3^x$ 6. $y=\dfrac{x^2-6}{\sqrt{x}}$

7. $y=e^{\sin x}$ 8. $y=3\operatorname{tg}x-\frac{1}{x}$ 9. $y=\arcsin x\cdot\sqrt[7]{x}$

10. $y=x\ln x$ 11. $y=\frac{12x}{9+x^2}$

12. Найти точки, в которых касательные к кривой $y=(1/3)x^3+x+1$ параллельны прямой $y=2x-1$.

Вариант 6

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-1}{x^3+2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\cos 4x\cdot\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x}}$ 5. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x}}$ 6. $y=\operatorname{arctg}e^x$

7. $y=5x\cdot\ln(2x-1)$ 8. $y=\cos^2 24x$ 9. $y=2^{\sin 2x}$

10. $y=\sqrt{x}(x-1)$ 11. $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

12. В каких точках касательная к графику функции $f(x)=(1/3)x^3-(5/2)x^2+7x-4$ образует с осью $0x$ угол $45°$?

Вариант 7

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2-x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{10}-11x+2}{(1+x)^{10}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{\operatorname{tg}5x\cdot\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$ 5. $y=\dfrac{1+x^8}{12x^{11}}$ 6. $y=2\sqrt{e^x}$

7. $y=(x+x^3)\cdot\operatorname{tg}x$ 8. $y=\arcsin\frac{1}{x}$ 9. $y=3\operatorname{arctg}2x$

10. $y=\log_2(2x-1)$ 11. $y=\frac{2x^2-6}{x-2}$

12. Под каким углом к оси $0x$ наклонена касательная, проведенная к кривой $y=2x^3-x$ в точке ее пересечения с осью $0y$?

Вариант 8

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4x^2+1}{5x^5+x-3x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin\frac{x}{3}}{\cos x-1}$

4. $\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x^2-2x}}$ 5. $y=\frac{2x^2-x-1}{x^2+x}$ 6. $y=\ln(3x-5)$

7. $y=\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}3x$; 8. $y=\arccos(-x^2)$ 9. $y=7x-\frac{1}{4}2^x+5$

10. $y=x^2e^x$ 11. $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$

12. Под каким углом к оси $0x$ наклонена касательная, проведенная к кривой $y=x^3-x^2-7x+6$ в точке $M_0(2;-4)$?

Вариант 9

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+4x}{1+15x-x^3}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{x}{2-x}}$ 5. $y=\frac{x^2+9}{6x^3}$ 6. $y=3\sqrt{x}\cdot\ln(1-x)$

7. $y=4\sin x-2\arcsin x$ 8. $y=e^{\operatorname{arctg}\,x}$ 9. $y=2^x-17\operatorname{tg}x+x^8$

10. $y=(5-2x)^6$ 11. $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$

12. Известно, что прямая $y=-(3/4)x-3/32$ является касательной к линии, заданной уравнением $y=0{,}5x^4-x$. Найти координаты точки касания.

Вариант 10

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7x+1}{4-2x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2\cdot\sin 3x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}$ 5. $y=\dfrac{4+3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}$ 6. $y=\operatorname{tg}x\cdot\ln(18-x)$

7. $y=2^{-x^7}$ 8. $y=3-\frac{1}{x^4}+x^4$ 9. $y=\arccos\frac{1}{x^3}$

10. $y=\cos^2 3x$ 11. $y=\frac{x^2-6x+4}{3x-2}$

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^7e^{-x}$ в точке с абсциссой $x=1$.

Вариант 11

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-10x^7+2}{x^3-x-3}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 x}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$ 5. $y=\dfrac{\cos 7x}{\operatorname{tg}x}$ 6. $y=\arccos\sqrt{x}$

7. $y=2^{\operatorname{arctg}\,x}$ 8. $y=\ln(x+7x^6)$ 9. $y=\sqrt[5]{x^6}\cdot(x-2)$

10. $y=\frac{1}{3^x}$ 11. $y=\frac{2-x^2}{9x^2-4}$

12. Составить уравнение касательных к кривым $y=2x^2-5$ и $y=x^2-3x+5$, проходящих через точки пересечения этих кривых.

Вариант 12

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x}{(x^2-x+2)^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}x}$ 5. $y=\sin^2 3x$ 6. $y=\ln\arccos x$

7. $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$ 8. $y=e^{\sqrt{x}}$ 9. $y=\frac{\operatorname{tg}x}{1+x^2}$

10. $y=\operatorname{ctg}x$ 11. $y=\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$

12. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y=(2/3)x^5-(1/9)x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x=1$.

Вариант 13

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-6x^3-1}{2x^3-x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ 5. $y=\dfrac{x^2-2}{24x^3}$ 6. $y=\cos^2 18x$

7. $y=\frac{3+x}{2}\cdot\operatorname{tg} x$ 8. $y=5^{\sin x}$ 9. $y=\arcsin\sqrt{x}$

10. $y=\ln(x^2-1)$ 11. $y=\frac{3x^2-7}{2x+1}$

12. Составить уравнение касательных к кривой $y=x^2-4x+3$, проходящих через точку $M(2,-5)$. Сделать чертеж.

Вариант 14

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{5x^3-x+3}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\operatorname{tg} 2x}{5x\cdot\sin 6x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{8x+1}$ 5. $y=\dfrac{x^6+8x^3+1}{x^2+3}$ 6. $y=5x\cdot\operatorname{tg} 3x$

7. $y=\cos\ln x$ 8. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$ 9. $y=\frac{1}{e^x}$

10. $y=\arccos 2x$ 11. $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\ln(2e-x)+5$ в точке с абсциссой $x=e$.

Вариант 15

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2-2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\ln(1+\sin 3x)}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x+3}{x-2}}$ 5. $y=\ln(1+e^x)$ 6. $y=\arccos\sqrt{x}$

7. $y=5x^4\cdot\sin x^3$ 8. $y=5^{1-x}$ 9. $y=\frac{3x+2}{\operatorname{tg} x}$

10. $y=\frac{1}{x^8}$ 11. $y=\frac{-8x}{x^2+4}$

12. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=2-4x-3x^2$ в точке с абсциссой $x=-2$.

Вариант 16

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-100x^{10}}{3x^{10}+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{tg}5x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x}$ 5. $y=\dfrac{x^6+8x^3+12}{\sqrt{8-x}}$ 6. $y=\ln^2(x-6x^2)$

7. $y=\sqrt[4]{x^3}\cdot\arcsin x$ 8. $y=2^{-x}$; 9. $y=\operatorname{arcctg}4x$

10. $y=\sin^2 2x$ 11. $y=\frac{21-x^2}{7x+9}$

12. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x^3-2x^2+x-1$ равен 3?

Вариант 17

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}\cdot x}{2x^3-12x+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x-x^2)}{\operatorname{arctg}x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1+x}{x}}$ 5. $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{7x+5}$; 6. $y=\operatorname{arctg}(3x+x^2)$

7. $y=\ln(1-4x)$ 8. $y=\sqrt[5]{x^7}\cdot\sin 6x$ 9. $y=(x^8-1)^4$

10. $y=e^{-x}$ 11. $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$

12. В каких точках касательная к графику функции $y=(x+2)/(x-2)$ образует с осью $0x$ угол $135°$.

Вариант 18

1. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin\pi x}}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+3}{x-x^2+5x^3}$ 3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}^2(2x-1)}{(2x-1)^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-6}$ 5. $y=5^{\operatorname{arctg}x}$ 6. $y=e^{-x^3}$

7. $y=\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}x}$ 8. $y=\sin^2\dfrac{x}{3}$ 9. $y=x\cdot\sqrt{x^2-1}$

10. $y=x^2(15+x)$ 11. $y=\frac{3x-2}{x^3}$

12. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y=(x-4)/(x-2)$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

Вариант 19

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+2x-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x+3}{2x^3+3x+4}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3^x-1}$ 5. $y=\dfrac{3x-7}{2x^4-1}$ 6. $y=(1-x+5x^2)^{20}$

7. $y=5x^3\cdot\operatorname{tg}x$ 8. $y=\sin 8x$ 9. $y=\arccos(\sqrt{x}+1)$

10. $y=xe^x$ 11. $y=\frac{x^2-11}{4x-3}$

12. Написать уравнение касательной к графику функции $y=(x+9)/(x+5)$, проходящей через начало координат.

Вариант 20

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{2x^2-3x-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x}{1-x-x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{x-3}{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$ 5. $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{1-x^4}}$ 6. $y=e^{-3x}$

7. $y=(2x^3-1)\cdot x^4$ 8. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ 9. $y=\ln\operatorname{ctg}x$

10. $y=\arcsin x$ 11. $y=(1-2x^3)/x^2$

12. На линии $y=1/(1+x^2)$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

Вариант 21

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{15x^2-2x-1}{3x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{11}-x^5+x}{100x^3+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x\cdot\sin 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^2}{x^2}\right)^{3x^2}$ 5. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{x^3-1}}$ 6. $y=\arccos\sqrt{x}$

7. $y=(1+3x^2)\cdot\ln x$ 8. $y=2^{-x}+\frac{1}{x}$; 9. $y=\operatorname{tg}^3 8x$

10. $y=\log_2(3x)$ 11. $y=\frac{4}{x^2+2x-3}$

12. Найти уравнение касательной к линии $x^2(x+y)=a^2(x-y)$ в начале координат.

Вариант 22

1. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4-x^2-6}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-1}{2x^4-x^2+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 4x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{7x\cdot\sin 3x}$ 5. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x^3-1}$ 6. $y=\ln(1-x+x^4)$

7. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$ 8. $y=\sqrt[4]{1-x}\cdot\cos x$ 9. $y=5^{\sin x}$

10. $y=(7x-3x^2)^5$ 11. $y=\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$

12. В каких точках линии $y=x^3+x-3$ касательная к ней параллельна прямой $y=4x-1$?

Вариант 23

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^2-25}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2-2x-1}{5x^3+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2-3x+2)\cos\pi x}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-2)}}$ 5. $y=3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+16x$ 6. $y=\dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2+x-1}$

7. $y=e^{\operatorname{arctg} x}$ 8. $y=\cos 7x$ 9. $y=x^5\ln x$

10. $y=2^{x^2}$ 11. $y=\frac{x^2-2x+2}{x+3}$

12. Составить уравнения касательных к линии $y=x-1/x$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

Вариант 24

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{3x-6x^2-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi-5x)}{e^{2x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$ 5. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{2x^2+5}$ 6. $y=7x\arcsin x$

7. $y=2x-\frac{1}{x}+\sqrt[5]{1-x^3}$ 8. $y=e^{\operatorname{ctg} x}$ 9. $y=5^{12x^2}$

10. $y=\operatorname{tg}5x$ 11. $y=\frac{x^2+6x+3}{x+4}$

12. Составить уравнение касательной к линии $y=x^3+3x^2-5$, перпендикулярной к прямой $2x-6y+1=0$.

Вариант 25

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{8-x^3}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-1}{6x^2-6x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3x+1)}{\left(e^{5\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{5x-1}$ 5. $y=\dfrac{2x-1}{x^2+5}$ 6. $y=3^{x^2}\cdot\cos x$

7. $y=\sqrt{5x-4-x^2}$ 8. $y=\ln 2\,\mathrm{tg}\,x$ 9. $y=e^{x^3}$

10. $y=\mathrm{arcctg}\,(-x)$ 11. $y=\frac{3x^2-10}{4x^2-1}$

12. Хорда параболы $y=x^2-2x+5$ соединяет точки с абсциссами $x_1=1$, $x_2=3$. Составить уравнение касательной к параболе, параллельной хорде.

Вариант 26

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^3-3x^2-10x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1+2x}{x+2x^3-10x^5}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$ 5. $y=3x^2\cdot\mathrm{tg}\,x$ 6. $y=\ln(7x-5)$

7. $y=3^{\mathrm{ctg}\,x}$ 8. $y=\frac{\mathrm{arctg}\;3x}{x^3+12x}$; 9. $y=\cos 3x\cdot\sqrt[7]{x}$

10. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ 11. $y=\frac{4x^2+9}{4x+8}$

12. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y=\frac{(x-4)}{(x-2)}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

Вариант 27

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-7}{5x^4+2x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{5x+1}$ 5. $y=\mathrm{arctg}\,e^x$ 6. $y=\dfrac{x^2-6}{\sqrt{x}}$

7. $y=\cos^2 24x$ 8. $y=3\,\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{x}$ 9. $y=\arcsin x\cdot\sqrt[7]{x}$

10. $y=x\cdot\ln 4x$ 11. $y=\frac{12x}{9+x^2}$

12. Найти точки, в которых касательные к кривой $y=(1/3)x^3+x+1$ параллельны прямой $y=2x-7$.

Вариант 28

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{2x^2-x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-7x^5+1}{x^5+x-3x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ \cdot\ \sin\frac{x}{3}}{\cos 6x-1}$

4. $\lim_{x\to2}(3-x)^{\frac{x}{2-x}}$ 5. $y=\frac{2x^2-3x-1}{x^2+x}$ 6. $y=\ln(3x-5)$

7. $y=\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}3x$; 8. $y=\arccos(-x^2)$ 9. $y=2^x-7\operatorname{tg}x+x^8$

10. $y=x^2\cdot e^x$ 11. $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$

12. Под каким углом к оси $0x$ наклонена касательная, проведенная к кривой $y=x^3-x^2-7x+4$ в точке $M_0(2;-6)$?

Вариант 29

1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x}{(x^2-x+2)^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 5x)^{\frac{1+x}{x}}$ 5. $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{7x+5}$ 6. $y=\operatorname{arctg}(3x+x^2)$

7. $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$ 8. $y=e^{\sqrt{x}}$ 9. $y=\frac{\operatorname{tg}x}{1+x^2}$

10. $y=3\arcsin\sqrt{x}$ 11. $y=\frac{4x^3-3x}{x^2-2}$

12. Известно, что прямая $y=-(3/4)x-3/32$ является касательной к линии, заданной уравнением $y=0{,}5x^4-x$. Найти координаты точки касания.

Вариант 30

1. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x+1}{7x^3-x+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x\cdot\ \operatorname{tg}2x}{7x\cdot\arcsin 6x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{6x+1}$ 5. $y=\ln(1+e^{2x})$ 6. $y=5x\cdot\operatorname{tg}3x$

7. $y=\cos\ln x$ 8. $y=5^{1-x}+\ \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ 9. $y=\frac{3x+2}{\operatorname{tg}x}$

10. $y=\arccos 2x$ 11. $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\ln(2e-x)$ в точке с абсциссой $x=e$.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧ № 11, 12 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ № 2

Задача 11. Исследовать и построить график функции $y=\frac{x^2-x-6}{x-2}$.

Решение. 1). Область определения функции $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2). Функция общего вида.

3). Находим асимптоты графика функции.

3а). Исследуем на наличие вертикальной асимптоты функцию в точке $x=2$.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\left\{\frac{2^2-2-6}{2+0-2}=\frac{-4}{+0}\right\}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\left\{\frac{2^2-2-6}{2-0-2}=\frac{-4}{-0}\right\}=+\infty$$

Эти пределы бесконечны, следовательно, в точке $x=2$ функция имеет разрыв второго рода и прямая $x=2$ является для графика этой функции вертикальной асимптотой.

3б). Наклонная асимптота имеет уравнение $y=kx+b$, коэффициенты которого определяются по формулам

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=1$$

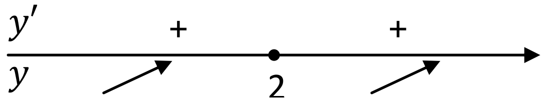
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x-6}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-6}{x-2}=1$$

График имеет наклонную асимптоту $y=x+1$.

4). Найдем производную функции:

$$y'=\frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x-6)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$$

Найдем критические точки. Производная не существует при $x=2$. Выясним, при каких значениях x производная равна нулю. Решим уравнение $x^2-4x+8=0$. Вычисляя дискриминант, получаем $D=16-32=-16<0$, поэтому у этого уравнения нет корней.

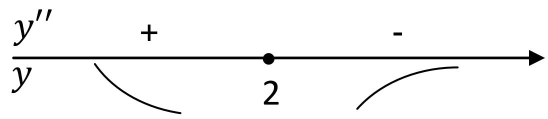


Производная всюду положительна, экстремумов у графика функции нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

5). Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)\left(x^2-4x+8\right)}{(x-2)^4} = \frac{-8}{(x-2)^3}$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому функция не имеет точек перегиба.



При $x \in (-\infty; 2)$ выполнено неравенство $y'' > 0$, поэтому на интервале $(-\infty; 2)$ график функции является вогнутым. При $x \in (2; +\infty)$ выполняется неравенство $y'' < 0$, поэтому на интервале $(2; +\infty)$ график функции является выпуклым.

6). Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Имеем $y(0) = \frac{0^2-0-6}{0-2} = 3$, поэтому с осью y функция пересекается в точке $(0; 3)$.

Далее, $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, следовательно, с осью $0x$ функция пересекается в точках $(-2; 0)$ и $(3; 0)$.

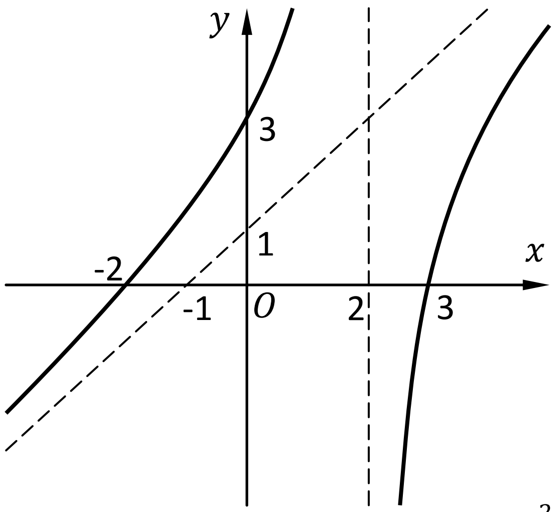


Рис. 3. График функции $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$

Задача 12. Составить уравнения касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках её пересечения с осью абсцисс.

Решение. 1). Найдем точки пересечения y с осью $0x$:

$$x - \frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 1.$$

2). Т.к. уравнение касательной в точке x_0 имеет вид:

$$y - y(x_0) = f'_{(x_0)}(x - x_0),$$

то вычислим $y(x_0) = y(x_1) = \left(x - \frac{1}{x}\right)|_1 = \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0;$

$$y(x_2) = \left(x - \frac{1}{x}\right)|_{-1} = (-1 + 1) = 0;$$

$$y'(x_0) = \left(x - \frac{1}{x}\right)'|_{x=\pm1} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)|_{x=\pm1} = 1 + 1 = 2.$$

Получаем две касательные с уравнениям

$$y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2;$$

$$y - 0 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 2.$$

Ответ: $y = 2x - 2$; $y = 2x + 2$.

СЕМЕСТР 2
КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
Интегралы, дифференциальные уравнения, ряды

Задачи 1 – 3. Найти неопределённые интегралы.

Задачи 4 – 6. Вычислить определённые интегралы (в задаче 5 сделать указанную замену переменной).

Задачи 7 – 8. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

Задача 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Задача 10 – 15. Решить дифференциальные уравнения.

Задача 16 – 19. Исследовать сходимость рядов.

Задача 20. Найти область сходимости степенного ряда.

Задача 21. Разложить функцию в ряд Маклорена. Указать область сходимости.

Задача 22. Разложить функцию в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

Вариант 1

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2} dx$; 2. $\int x^4 \cdot e^{(-x)^5}\, dx$; 3. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$; 4. $\int_0^2 x(3 - x)\, dx$;

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; 6. $\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$; 7. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$; 8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$;

9. $y = 2x^2 - 1$, $x - y - 1 = 0$; 10. $(x^2 \cdot y + 9y) \cdot dy + \sqrt{2 + y^2} \cdot dx = 0$;

11. $x \cdot y' + y = x^5$; $y(1) = 0$; 12. $(1 + x^2) \cdot y'' + 2x \cdot y' = 2$;

13. $y'' + 25y = 50 \cdot e^{5x}$; 14. $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$;

15. $y''' + 36y' = 0$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$;

21. $f(x) = \sqrt{1+x}$; 22. $f(x) = x, \quad -2 < x < 2$.

Вариант 2

1. $\int \left(\frac{1-3x}{x}\right)^2 dx$; 2. $\int \frac{5+2\ln x}{3x} dx$; 3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; 4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2} dx$;

5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$, $e^x = t$; 6. $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$; 7. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{5+2x^2}$;

9. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$; 10. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y \cdot y' = 0$;

11. $y' - \frac{y}{x} = \ln x$; $y(1) = 0$; 12. $x^5 \cdot y'' + x^4 \cdot y' = 1$;

13. $y'' + y' = 4x - 1$; 14. $y'' - 2y' = e^x(3x-1),\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

15. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+3}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot (x-3)^n$;

21. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; 22. $f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1$.

Вариант 3

1. $\int \left(3e^x - \sqrt{x^5} + 2\right) dx$; 2. $\int \frac{2^x}{4^x-1} dx$; 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin x\,(1-x^2)}}$; 4. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$, $2x+1 = t^2$; 6. $\int_0^{\pi} x \sin 2x\,dx$; 7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9+2x^2}$;

9. $y = x^2, y = \frac{x^3}{3}$; 10. $y \cdot (1 + \ln y) + x \cdot y' = 0$;

11. $y' - y \cdot \cos x = \cos^2 x \cdot e^{\sin x},\ y(0) = 0$; 12. $x^4 \cdot y'' + x^3 \cdot y' = 4$;

13. $y'''' - 9y'' = 0$; 14. $y'' - 6y' + 9y = 4x \cdot e^x$;

15. $y'' + 4y = e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{3n-1}$;

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n \cdot (x+2)^n}{n}$; 21. $f(x) = \frac{1}{4-x}$; 22. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $-\pi < x < \pi$.

Вариант 4

1. $\int \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) dx$; 2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[7]{\sin^2 x}} dx$; 3. $\int \frac{x\,dx}{x^4+4}$; 4. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

5. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$, $\sqrt{x} = t$; 6. $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$; 7. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^6}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

9. $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$; 10. $\sqrt{1-x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$;

11. $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2}$, $y(1) = 1$; 12. $x \cdot y'' + 2y' = 0$;

13. $y'' + y = x^2 + 6$; 14. $y'' - 5y' - 6y = 2x \cdot e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$;

15. $y''' + 5y'' - 14y' = 0$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot 2^n}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n!}$;

21. $f(x) = \frac{6}{2x+3}$; 22. $f(x) = 2x+3$, $-\pi < x < \pi$.

Вариант 5

1. $\int \frac{5^x}{10^x} dx$; 2. $\int x^2\sqrt{1-x^3}dx$; 3. $\int e^{arctg\ x} \frac{dx}{1+x^2}$; 4. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$;

5. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$, $x = 2\sin t$; 6. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$; 7. $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+3x^2}$;

9. $y = \ln x, y = \ln^2 x$; 10. $y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$;

11. $y' - 3x^2 \cdot y = x^2 \cdot e^{x^3}$, $y(0) = 0$; 12. $x \cdot y'' - 2y' = -\frac{2}{x^2}$;

13. $y''' - 3y'' - 4y' = 0$; 14. $y'' - 2y' + y = (2x+5) \cdot e^{2x}$;

15. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (x+1)^n$; 21. $f(x) = \ln(1-x)$; 22. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 2 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$.

Вариант 6

1. $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3} dx$; 2. $\int \frac{ctg^3 x}{sin^2 x} dx$; 3. $\int x\, e^{-x^2} dx$; 4. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\, dx$;

5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{3e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\, dx,\ e^x = t$; 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\cos x\, dx$; 7. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$; 9. $y = x^2 + 4x, y = x + 4$; 10. $\sqrt{5+y^2} + y' \cdot y \cdot \sqrt{1-x^2} = 0$;

11. $y' - 4xy = 4x^3 \cdot e^{2x^2}, y(0) = 0$; 12. $y'' \cdot ctgx + 2y' = 0$;

13. $y''' - 3y'' - 4y' = 0$; 14. $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$;

15. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 3x - 4,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!\cdot 2^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{3^n}$; 21. $f(x) = \sqrt{1+x}$; 22. $f(x) = x+1,\quad -\pi < x < \pi$.

Вариант 7

1. $\int \frac{(2+x)^2}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int \frac{2x\ dx}{\sqrt{x^2+2}}$; 3. $\int \frac{ln^5(x+1)}{x+1} dx$; 4. $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$;

5. $\int_3^4 \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\, dx,\ \sqrt{x-2} = t$; 6. $\int_0^1 x3^x\, dx$; 7. $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$;

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$; 9. $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$; 10. $\sqrt{4-x^2} \cdot y' + x \cdot (y^2+1) = 0$;

11. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(0) = \frac{1}{2}$; 12. $(1+\sin x) \cdot y'' = \cos x \cdot y'$;

13. $y'''' - 81y = 0$; 14. $y'' - 4y' + 3y = -4x \cdot e^x$;

15. $y'' + 6y' + 9y = 25 \cdot e^{2x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; 19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$;

21. $f(x) = 2\cos^2 x$; 22. $f(x) = |x|,\quad -3 < x < 3$.

Вариант 8

1. $\int \frac{1-2x}{\sqrt[5]{x^3}} dx$; 2. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$; 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot sin^2\sqrt{x}}$; 4. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

5. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, $\operatorname{ctg} x = t$; 6. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$; 7. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$;

9. $y = 4x^2, y = \frac{x^2}{9}, y = 2$; 10. $y' \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;

11. $y' + \frac{y}{2x} = x$, $y(1) = 0$; 12. $x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 1$;

13. $y''' - 9y'' + 8y' = 0$; 14. $y'' - y' - 2y = (1-2x) \cdot e^x$;

15. $y'' - 2y' + y = 16 \cdot e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{1+n^2}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+1}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot e^{-n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}}$;

21. $f(x) = \ln(1+x^2)$; 22. $f(x) = x-1, \quad -1 < x < 1$.

Вариант 9

1. $\int \frac{2x^5-3x}{x^2} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{lnx}}{x} dx$; 3. $\int \operatorname{Cos}(3-x)\, dx$; 4. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

5. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3} dx$, $x - 2 = t^3$; 6. $\int_0^{\pi} (x-3)\sin x \; dx$; 7. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 9. $y = x^2+1, y + x = 3$;

10. $\sqrt{4+x^2} \cdot dx - 4y \cdot dy = x^2 \cdot y \cdot dy$; 11. $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$;

12. $x^5 \cdot y'' + x^4 y' = 9$; 13. $y'' + 6y' + 13y = 75\cos 2x$;

14. $y'' + y = 4 \cdot e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$; 15. $y''' - 6y'' + 9y' = 0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+5n+1}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{8^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 5^n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$; 21. $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$; 22. $f(x) = x, \; -5 < x < 5$.

Вариант 10

1. $\int 5^{2x-1} dx$; 2. $\int \frac{cosx}{sinx-1} dx$; 3. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^3}} dx$; 4. $\int_0^1 \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$;

5. $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+2}, x+1=t^2$; 6. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\ dx$; 7. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

9. $y=2^x,\ x=2,\ y=2x-x^2, x=0$; 10. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2}+y$;

11. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$; 12. $x^2\cdot y'' + + x\cdot y' = 1$;

13. $y''' - 2y'' - 8y' = 0$; 14. $y'' + 2y' + y = 2-3x^2$;

15. $y'' + 81y = 162\cdot e^{9x},\ y(0)=0,\ y'(0)=9$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n\cdot 3^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$; 21. $f(x)=\frac{x}{1+x^3}$; 22. $f(x)=\begin{cases} 2 \text{ при } -\pi<x\le 0 \\ 1 \text{ при } \ 0<x<\pi \end{cases}$.

Вариант 11

1. $\int e^x\cdot 3^x dx$; 2. $\int \sin(9x+2)\,dx$; 3. $\int sin^3 x\,dx$; 4. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \sqrt{x}=t$; 6. $\int_0^3 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; 7. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$; 8. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4x^2+1}$;

9. $y=(x-4)^2,\ y=16-x^2,\ y=0$; 10. $y\cdot(1+ln\,y)+x\cdot y' = 0$;

11. $xy' + y = \ln x,\ y(1)=1$; 12. $2x\cdot y'' = y'$;

13. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$; 14. $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$;

15. $y'' + y = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+2}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^n}{n+1}$; 21. $f(x)=x\cdot e^{3x}$; 22. $f(x)=1-x,\ \ -\pi<x<\pi$.

Вариант 12

1. $\int \frac{x\cdot 2^x-1}{x} dx$; 2. $\int cosx\sqrt[3]{sinx}\,dx$; 3. $\int \frac{arc\,sin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$; 4. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$;

5. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$; 6. $\int_1^3 \ln x\ dx$; 7. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$; 8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$;

9. $y=4x-x^2, y=0$; 10. $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}\cdot y' = 0$;

11. $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1)=1$; 12. $xy'' + y' = x + 1$;

13 $y''' + 2y'' - 24y' = 0$; 14. $y'' + 3y' + 2y = (6x-1)\cdot e^x$;

15. $y'' + 9y = 18x + 9,\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5;$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$; 18. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$; 21. $f(x) = \ln(1+2x)$; 22. $f(x) = |x|,\ \ -1 < x < 1.$

Вариант 13

1. $\int \frac{3+2ctg^2 x}{cos^2 x} dx$; 2. $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$; 3. $\int \frac{dx}{x ln^3 x}$; 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2}\ dx$;

5. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx,\ e^x - 1 = t^2$; 6. $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\, dx$; 7. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+4}$;

9. $y = \ln x,\ y = 0,\ x = e$; 10. $2x \cdot dx - y \cdot dy = yx^2 \cdot dy - xy^2 \cdot dx$;

11. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$; 12. $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1$;

13. $y'' + 2y' - 3y = 30 \cdot \cos 3x$; 14. $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

15. $y''' + 4y'' + 4y' = 0$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+2)^n$;

21. $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$; 22. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$.

Вариант 14

1. $\int \frac{xsinx - 1}{x} dx$; 2. $\int 7^{x+2} dx$; 3. $\int (3x-2)^{\frac{1}{3}} dx$; 4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\ dx$;

5. $\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}},\ \sqrt[3]{x+1} = t$; 6. $\int_1^e x \ln x\ dx$; 7. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^4}$; 8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+17}$;

9. $y = x^3, y = 0, x = 1, x = 8$; 10. $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$;

11. $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1) = 0$; 12. $x \cdot y'' + y' + x = 0$;

13. $y'' - 3y' + 2y = -5e^x$; 14. $y'' - y = 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

15. $y''' + 3y'' - 4y' = 0$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2}{n!}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x-2)^n}{n+1}$;

21. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$; 22. $f(x)=2x+3,\quad -\pi<x<\pi$.

Вариант 15

1. $\int\frac{x^2+4}{x^2-1}dx$; 2. $\int\frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3. $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$; 4. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

5. $\int_4^9\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}, \sqrt{x}=t$; 6. $\int_0^1(3x+5)e^{2x}\,dx$; 7. $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{x^2}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$;

9. $y=2x-x^2,\ y=-x$; 10. $\sqrt{5+y^2}\cdot dx+4(x^2\cdot y+y)\cdot dy=0$;

11. $y'+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{3x^2}{1+x^2}$, $y(0)=0$; 12. $\operatorname{tg}x\cdot y''=y'$;

13. $y'''-9y''+8y'=0$; 14. $y''+y'-2y=9e^x$;

15. $y''+y=48\cos 5x+72\sin 5x, y(0)=0,\ y'(0)=0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$; 21. $f(x)=\sqrt{1+x}$; 22. $f(x)=3-x,\ -3<x<3$.

Вариант 16

1. $\int 5^{2x}dx$; 2. $\int\frac{5+3\ln x}{x}dx$; 3. $\int\frac{dx}{arctgx\cdot(1+x^2)}$; 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^2 x\ dx$;

5. $\int_0^3\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+1},\ x+1=t^2$; 6. $\int_1^e(3-2x)\ln x\ dx$; 7. $\int_0^2\frac{dx}{1-x}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{3x^2+4}$;

9. $y=x^3,\ y=8,\ \ x=0$; 10. $(e^{2x}+2)dy+y\cdot e^{2x}\cdot dx=0$;

11. $y'+\frac{y}{x}=\sin x$, $y(\pi)=1$; 12. $x\cdot y''-y'+\frac{1}{x}=0$;

13. $y'''+4y''-5y'=0$ 14. $y''+y'=x$;

15. $y''-3y'+2y=24\cdot e^{-2x},\ y(0)=-1,\ y'(0)=4$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3+n+7}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^3}}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$; 21. $f(x)=\sqrt{1-x}$; 22. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -3<x<0\\ 2 \text{ при } 0\le x<3\end{cases}$.

Вариант 17

1. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2x} dx$; 2. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$; 3. $\int cos^3 x\, dx$; 4. $\int_1^3 \frac{dx}{(2x-1)^2}$;

5. $\int_0^1 \sqrt{9-x^2}\, dx, x = 3\sin t$; 6. $\int_e^{e^2} \ln(2x)\ dx$; 7. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{8+9x^2}$;

9. $y = 3-2x,\ y = x^2$; 10. $x \cdot dx - y \cdot dy = yx^2 \cdot dy - xy^2 \cdot dx$;

11. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x \cdot (x+1),\ y(0) = 1$; 12. $y'' \cdot tgx = y' + 1$;

13. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; 14. $y'' + 3y' + 2y = 12x^2 + 8x$;

15. $y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x}, y(0) = 0,\ y'(0) = 4$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$; 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; 19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$; 21. $f(x) = x^2 \cdot \sin x$; 22. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$.

Вариант 18

1. $\int \left(2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right) dx$; 2. $\int x^2\sqrt{3+x^6}dx$; 3. $\int 3e^{3x^2-1} \cdot xdx$; 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\ dx$;

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$, $\operatorname{tg} x = t$; 6. $\int_0^{e-2} x\ln(x+2)\ dx$; 7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$;

9. $y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2},\ y = 2$; 10. $6x \cdot dx - 2y \cdot dy = 2yx^2 \cdot dy - 3xy^2 \cdot dx$;

11. $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x,\ y(\pi) = 0$; 12. $(1+x^2) \cdot y'' + 2x \cdot y' = 2x$;

13. $y''' + 8y'' + 15y' = 0$; 14. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x}$;

15. $y'' + y' = 16x + 10,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$; 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{2n}$; 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n(n+1)}$; 21. $f(x) = e^{3x}$; 22. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2 < x \le 0 \\ 0 & \text{при } 0 < x < 2 \end{cases}$.

Вариант 19

1. $\int \frac{x^2-3x+2}{x-1} dx$; 2. $\int x(x^2+5)^7 dx$; 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}$; 4. $\int_0^1 \sqrt{2+x}\, dx$;

5. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx,\ e^x-1=t^2$; 6. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos x\ dx$; 7. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 8. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{5x^2+3}$;

9. $y=\frac{x^3}{3}, y=4-\frac{2}{3}x^2$; 10. $x\cdot\sqrt{5+y^2}\cdot dx+y\cdot\sqrt{4+x^2}\cdot dy=0$;

11. $y' - y\cdot ctg\,x=2x\cdot\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$; 12. $x\cdot y'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

13. $y''' + y'' - 2y' = 0$; 14. $y'' - 3y' + 2y = -5\cdot e^x$;

15. $y'' - 64y = 128\cdot\cos 8x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{3n+1}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\sqrt{n}}$; 21. $f(x)=\sqrt{1+2x}$; 22. $f(x)=x+2,\ -1<x<1$.

Вариант 20

1. $\int sin^2\frac{x}{2}dx$; 2. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{3-5e^{2x}}}$; 3. $\int sin^5x\cdot cosx\,dx$; 4. $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$;

5. $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx,\ x=4\sin t$; 6. $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x\ dx$; 7. $\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+10}$;

9. $y=\frac{1}{x^2},\ y=0,\ x=1,\ x=4$; 10. $6x\cdot dx-y\cdot dy=yx^2\cdot dy-3xy^2\cdot dx$;

11. $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1)=0$; 12. $x^4\cdot y'' + x^3\cdot y' = 1$;

13. $y''' + 6y'' + 5y' = 0$; 14. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$;

15. $y'' + 3y' + 2y = 1-2x^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$; 19. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$; 21. $f(x)=\frac{1}{(1+x)^3}$; 22. $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{при } -\pi<x\le 0\\ 2 & \text{при } 0<x<\pi\end{cases}$.

Вариант 21

1. $\int\frac{1-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; 2. $\int\frac{dx}{arccosx\cdot\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\int\frac{dx}{x(lnx+5)}$; 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^5 x\,dx$;

5. $\int_0^{26}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3}dx,\ x+1=t^{\frac{3}{2}}$; 6. $\int_0^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}x\,dx$; 7. $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+10}$;

9. $y=x^2+1,\ y=0,\ x=-2,\ x=3$; 10. $(2-e^x)\cdot dy+3e^x\cdot tg\,y\cdot dx=0$;

11. $y' - tg\,x\cdot y=\frac{1}{\cos x},\ y(0)=0$; 12. $y''\cdot x\cdot\ln x=y'$;

13. $y''' + 10y'' + 16y' = 0$; 14. $y'' + y = 16\cos 3x - 24\sin 3x$;

15. $y'' - y' = 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{2^n}}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-8n+1}{4n^3+2n-1}\right)^{2n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{3^n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$; 21. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; 22. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < x \le 0 \\ x & \text{при } 0 < x < 1 \end{cases}$.

Вариант 22

1. $\int ctg^2 x\, dx$; 2. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-x^6}}$; 3. $\int \frac{(3\ln x - 5)^2}{x} dx$; 4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

5. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{x+3}-1}$, $\sqrt{x+3} = t$; 6. $\int_1^e \ln^2 x\, dx$; 7. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

9. $y = 3x - x^2,\ y = -x$; 10. $y' = (2y+1)ctgx$;

11. $y' - \frac{3y}{x} = x,\ y(1) = 6$; 12. $y'' - \frac{y'}{x(2+\ln x)} = 2 + \ln x$;

13. $y''' + y' = 0$; 14. $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 6$;

15. $y'' + 6y' + 5y = 84\, e^{2x},\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+1}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!\cdot 4^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n-1}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+6}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$; 21. $f(x) = \ln(x^3+1)$; 22. $f(x) = |x|,\ -1 < x < 1$.

Вариант 23

1. $\int 7^{x+2} dx$; 2. $\int \frac{3\sqrt[3]{x} - x^3 + 2}{x} dx$; 3. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 7)}$; 4. $\int_0^1 \frac{dx}{7+5x}$;

5. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$, $e^x - 1 = t^2$; 6. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos x\, dx$; 7. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x+1}$;

8. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^3}$; 9. $y = \frac{16}{x^2}, y = 17 - x^2,\ x > 0, y > 0$; 10. $y' \sin x = y \cdot \ln y$;

11. $y' + y \cdot ctg\, x = \cos x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$; 12. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;

13. $y''' + 25y' = 0$; 14. $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 6$;

15. $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4+3}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}$; 21. $f(x) = 1 - \cos 2x$; 22. $f(x) = x + 2, \ -3 < x < 3.$

Вариант 24

1. $\int \left(7e^x - \sqrt{x^5} + 3\right) dx$; 2. $\int \frac{2^x}{4^x - 1} dx$; 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin\ x (1-x^2)}}$; 4. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}, 2x + 1 = t^2$; 6. $\int_0^{\pi} x \sin 3x \, dx$; 7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9+2x^2}$;

9. $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$; 10. $\sqrt{1-x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$;

11. $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2}, \ y(1) = 1$; 12. $x \cdot y'' + 2y' = 0$;

13. $y'''' - 25y'' = 0$; 14. $y'' - 6y' + 9y = 4x \cdot e^x$;

15. $y'' + 4y = e^{-2x}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{n!}$; 21. $f(x) = \frac{6}{2x+3}$; 22. $f(x) = 4x - 1, \ -\pi < x < \pi$.

Вариант 25

1. $\int \frac{3^x}{10^x} dx$; 2. $\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$; 3. $\int e^{arctg\ x} \frac{dx}{1+x^2}$; 4. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$;

5. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx, \ x = 2\sin t$; 6. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$; 7. $\int_0^1 \frac{dx}{x^5}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+3x^2}$;

9. $y = \ln x, y = \ln^2 x$; 10. $y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$;

11. $y' - 3x^2 \cdot y = x^2 \cdot e^{x^3}, \ y(0) = 0$; 12. $x \cdot y'' - 2y' = -\frac{2}{x^2}$;

13. $y''' - 3y'' - 4y' = 0$; 14. $y'' - 2y' + y = (2x+5) \cdot e^{2x}$;

15. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^3}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n! \cdot 2^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x-1)^n}{5^n}$; 21. $f(x) = \sqrt{1+3x}$; 22. $f(x) = 2x + 1, \ -\pi < x < \pi.$

Вариант 26

1. $\int e^x \cdot 4^x dx$; 2. $\int \sin(7x+2)\,dx$; 3. $\int sin^3 x\,dx$; 4. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \sqrt{x}=t$; 6. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$; 7. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$; 8. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{9x^2+1}$;

9. $y=x^2+4x, y=x+4$; 10. $y\cdot(1+ln\,y)+x\cdot y'=0$;

11. $xy'+y=\ln x,\ y(1)=1$; 12. $2x\cdot y''=y'$;

13. $y'''-6y''+12y'-8y=0$; 14. $y''+y'-6y=10e^{2x}$;

15. $y''+y=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+3}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{7n+2}{2n-1}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$; 21. $f(x)=\ln(1+4x)$; 22. $f(x)=|x|,\ -2<x<2.$

Вариант 27

1. $\int\frac{x^2+4}{x^2-1}dx$; 2. $\int\frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3. $\int\frac{dx}{xln^3x}$; 4. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

5. $\int_0^3\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+1},\ x+1=t^2$; 6. $\int_1^e(3-2x)\ln x\ dx$; 7. $\int_0^2\frac{dx}{1-x}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{5x^2+4}$;

9. $y=x^2,\ \ y=\frac{x^2}{2},\ y=2$; 10. $\sqrt{9-x^2}\cdot y'+x\cdot(y^2+1)=0$;

11. $y'-4xy=4x^3\cdot e^{2x^2}, y(0)=0$; 12. $y''\cdot ctgx+2y'=0$;

13. $y'''-3y''-4y'=0$; 14. $y''-4y'+3y=-4x\cdot e^x$;

15. $y''-6y'+9y=9x^2-3x-4,\ y(0)=1,\ y'(0)=5$;

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\sqrt{2^n}}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-6n+4}{5n^3+2n-1}\right)^{2n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{5^n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}}$; 21. $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; 22. $f(x)=x-1,\ -2<x<2.$

Вариант 28

1. $\int\frac{1-2x}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; 2. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$; 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot sin^2\sqrt{x}}$; 4. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

5. $\int_3^4\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx,\ \sqrt{x-2}=t$; 6. $\int_0^1 x\cdot 4^x\,dx$; 7. $\int_{-3}^2\frac{dx}{(x+3)^3}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+9}$;

9. $y=4x^2, y=\frac{x^2}{9}, y=2$; 10. $y'\cdot y\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$;

11. $y' + \frac{y}{2x} = x$, $y(1) = 0$;
12. $x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 1$;
13. $y''' - 9y'' + 8y' = 0$;
14. $y'' - y' - 2y = (1 - 2x) \cdot e^x$;
15. $y'' + 6y' + 9y = 25 \cdot e^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 1}{2 + n^2}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+3}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot e^{-n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{\sqrt{n}}$; 21. $f(x) = \ln(1 + x^3)$; 22. $f(x) = x + 1$, $-1 < x < 1$.

Вариант 29

1. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2. $\int cos^7 x \cdot sinx\, dx$; 3. $\int sin^3 2x\, dx$; 4. $\int_2^3 \left(x + \frac{1}{x^3}\right) dx$;
5. $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$, $x = 5\sin t$; 6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1)\cos x\, dx$; 7. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$; 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5\, dx}{3x^2+5}$;
9. $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$;
10. $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$;
11. $y' - y\cos x = cosx$, $y(0) = 1$;
12. $xy'' + y' = 3x + 2$;
13. $y'''' - 16y = 0$;
14. $y'' - 2y' + y = e^{6x}$;
15. $y'' - 4y' + 3y = 10cosx$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+4)}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{2n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^3 + 1}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+1)^n$; 21. $f(x) = \frac{1}{2 + x}$; 22. $f(x) = 3 - x$, $-2 < x < 2$.

Вариант 30

1. $\int \frac{x^2 - 5x + 3}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int \frac{3 - 2ctg^2 x}{cos^2 x} dx$; 3. $\int e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$; 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$;
5. $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$, $\sqrt[4]{x} = t$; 6. $\int_1^e (2x - 1)\ln x\, dx$; 7. $\int_{-\infty}^0 \frac{3\, dx}{5x^2+4}$; 8. $\int_{-3}^3 \frac{dx}{(x+3)^2}$;
9. $y = 0{,}25x^2$, $y = 3x - 0{,}5x^2$;
10. $y' \sin x - y\cos x = 0$;
11. $y' - 4xy = 2x \cdot e^{x^2}$, $y(0) = 1$;
12. $y'' \cdot tgx = y' + 1$;
13. $y'''' - 7y'' = 0$;
14. $y'' - 9y = 3xe^{2x}$;
15. $y'' + 4y' + 5y = 25x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{10^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(n+1)}{n!}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$; 21. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$; 22. $f(x) = x$, $-4 < x < 4$.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧ № 7, 8, 13, 14, 22 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ № 3

Задачи № 7, 8. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

7. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \lim_{\delta\to 0} \int_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{0+\delta}^{1} =$

$= -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{(0-\varepsilon)^3} - \frac{1}{(-1)^3}\right] - \frac{1}{3}\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{(1)^3} - \frac{1}{(0+\delta)^3}\right] = \infty$

Следовательно, интеграл расходится. (Здесь подынтегральная функция $\frac{1}{x^4}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$).

Ответ: интеграл расходится.

8. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ \mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right]\Bigg|_{0}^{M} =$

$= \frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}(\mathrm{arctg}\, M - \mathrm{arctg}\, 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Известно, что $\mathrm{arctg}_{x\to+\infty}\, x \to \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}_{x\to-\infty}\, x \to -\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\, 0 = 0$.

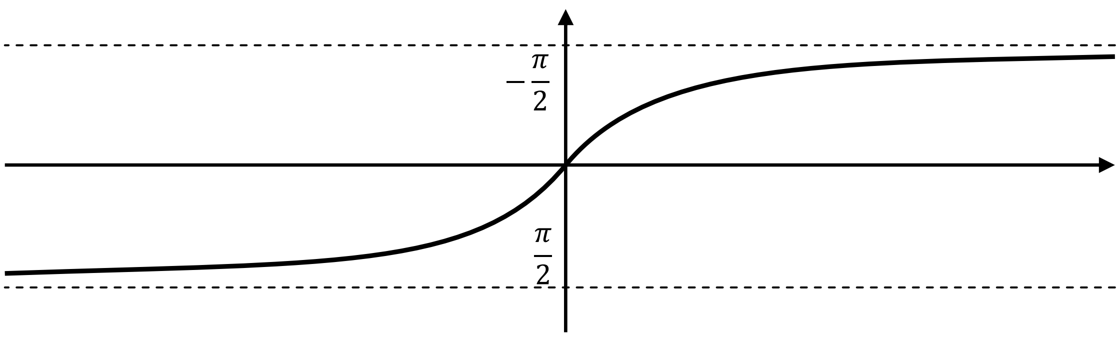


Рис. 4. График функции *y = arctg x*

Ответ: интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{4}$.

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 2$. Значит, общее решение однородного уравнения записывается в виде $Y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$. Заметим, что первый из корней характеристического уравнения совпадает с коэффициентом показателя степени функции в правой части. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi = Axe^{3x}$. Тогда $\varphi' = Ae^{3x}(1+3x)$, $\varphi'' = Ae^{3x}(6+9x)$. Подстановка в уравнение приводит к равенству $(6A + 9Ax - 5A - 15Ax + 6Ax)e^{3x} = 2e^{3x}$, откуда $A = 2$. Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + 2xe^{3x}$.

Ответ: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + 2xe^{3x}$.

Задача 14. Решить задачу Коши: $y'' - 10y' + 21 = 50\sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 7$. Значит, общее решение однородного уравнения $y'' - 10y' + 21y = 0$ записывается в виде $Y = C_1e^{3x} + C_2e^{7x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi(x) = A\cos x + B\sin x$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Для их определения вычислим $\varphi'(x) = -A\sin x + B\cos x$, $\varphi''(x) = -A\cos x - B\sin x$ и подставим в исходное уравнение. Тогда получим

$$-A\cos x - B\sin x - 10(-A\sin x + B\cos x) + 21(A\cos x + B\sin x) = 50\sin x,$$

$$(20A - 10B)\cos x + (20B + 10A - 50)\sin x = 0.$$

Это равенство должно выполняться для всех x, что с учетом линейной независимости функций $\cos x$ и $\sin x$ возможно лишь при выполнении условий: $\begin{cases} 20A - 10B = 0 \\ 20B + 10A - 50 = 0 \end{cases}$. Значит, $A = 1, B = 2$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{7x} + \cos x + 2\sin x$.

Для решения задачи Коши найдем производную $y' = 3C_1e^{3x} + 7C_2e^{7x} - \sin x + 2\cos x$. Подставив в начальные условия для y и y', получим систему $\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 + 1 \\ 13 = 3C_1 + 7C_2 + 2 \end{cases}$, откуда $C_1 = -1, C_2 = 2$.

Ответ: $y = -e^{3x} + 2e^{7x} + \cos x + 2\sin x$.

Задача 22. Разложить функцию

$$f(x) = \pi - x,\ -\pi < x < \pi$$

в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\ \pi)$. Построить график функции и график суммы ряда Фурье.

Решение. Функция $f(x)$ на интервале $(-\pi,\ \pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле, и её ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Найдём коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 + \pi^2) = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi - x}{n}\sin nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi - x}{n}\cos nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x - \pi}{n}\cos nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\sin nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\cos \pi n = \frac{2}{n}(-1)^n.$$

Ответ: Ряд Фурье данной функции имеет вид: $\pi - x = \pi + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$.

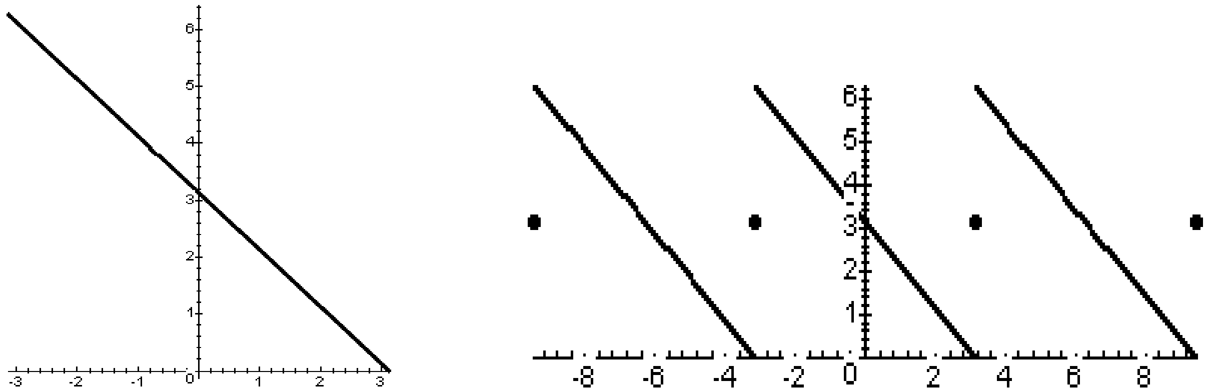


Рис. 5. График функции $f(x) = \pi - x$ на интервале $(-\pi,\ \pi)$ (слева) и график суммы $S(x)$ ряда Фурье (справа)

Приложение 1.

Таблица производных элементарных функций

1. $(C)'=0$

2. $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$

3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

4. $(e^x)'=e^x$

5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$

6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

7. $(\sin x)'=\cos x$

8. $(\cos x)'=-\sin x$

9. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

15. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$

16. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$

17. $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

18. $(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Приложение 2.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx=\int 1\cdot dx=x+C$

2. $\int x^n\cdot dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq -1)$

3. $\int \dfrac{1}{x}\cdot dx=\ln|x|+C$

4. $\int e^x\cdot dx=e^x+C$

5. $\int a^x\cdot dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

6. $\int \cos x\cdot dx=\sin x+C$

7. $\int \sin x\cdot dx=-\cos x+C$

8. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot dx=\operatorname{tg} x+C$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \mathrm{arctg}\, x + C$;

12. $\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \cdot dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$

16. $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

17. $\int \sqrt{x^2+k} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$

18. $\int \mathrm{sh}\, x \cdot dx = \mathrm{ch}\, x + C$

19. $\int \mathrm{ch}\, x \cdot dx = \mathrm{sh}\, x + C$

20. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \mathrm{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

21. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \mathrm{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис-пресс, 2009.
2. Шипачёв В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 2012.
3. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2011.
4. Данко П.Е., Кожевникова Т.Я., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, том I, М.: Айрис-пресс, 2006 .
5. Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике, ч. II. Пределы, производные и графики функций. М.: РИО МГТУ ГА, 2003 , № 536.

Содержание