МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

О.Г. Илларионова, В.А. Ухова

МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ

по изучению дисциплины и

выполнению контрольных работ по темам

«Дифференциальные уравнения» и «Ряды»

для студентов I и II курсов

всех специальностей

дневного обучения

Москва - 2012

Введение

В курсе математики студенты дневного отделения изучают темы «Дифференциальные уравнения» и «Ряды» во втором или в третьем семестрах в зависимости от специальности.

Дифференциальные уравнения - наиболее востребованная часть курса математики в инженерных приложениях. Ряды представляют простой и весьма совершенный инструмент для приближённого вычисления функций, интегралов и решения дифференциальных уравнений, что отражено в задачах данного пособия. Важнейшим разделом теории рядов являются ряды Фурье, их приложения к задачам физики, электротехники, радиотехники.

В пособии содержатся два контрольных задания и образцы их выполнения.

Общие рекомендации студенту по работе над курсом математики

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1. Изучение материала по лекциям;

2. Изучение материала по учебнику и учебным пособиям (см. список литературы);

3. Выполнение еженедельных домашних заданий;

4. Выполнение контрольных домашних заданий (КДЗ).

Студент может обращаться к преподавателю для получения консультации, посещать имеющиеся факультативные занятия.

Указания к выполнению КДЗ

1. Каждое контрольное домашнее задание должно выполняться в отдельной тонкой тетради в клетку, чернилами чёрного или синего цвета. Необходимо оставлять поля для замечаний преподавателя.

2. На титульном листе тетради должны быть чётко написаны фамилия студента, его инициалы, название дисциплины, номер выполняемого варианта. Как правило, номер варианта задаётся преподавателем.

3. Решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, **обязательно записывая условие каждой задачи.**

4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

5. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».

6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочёты. Вносить исправления в текст работы после её рецензирования запрещается.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ »

Вариант № 0

1. Решить уравнение: $y'\cos 2x = 4y\ln y$.
2. Решить уравнение: $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.
3. Решить задачу Коши: $y' + y\cdot\cos x = \sin 2x$, $y(0) = 3$.
4. Найти общее и любое частное решение уравнения:
   $y'' = 5x + x^{-2} + 9\cos 3x$.
5. Решить уравнение: $y' = (y')^2$.
6. Найти общее решение уравнения: $y'' + 6y' + 18y = 17e^{2x}$.
7. Решить задачу Коши: $y'' - 10y' + 21 = 50\sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.
8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 5y' = 0$.

Задача 1. Решить уравнение $y'\cos 2x = 4y\ln y$.

Решение.

Это уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на $\cos 2x\cdot 4y\cdot\ln y \neq 0$ и умножив на dx, получаем уравнение $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{4dx}{\cos 2x}$.

Интегрируем обе части уравнения: $\displaystyle\int\frac{d\ln y}{\ln y} = 4\int\frac{dx}{\cos 2x}$;

$$\ln|\ln y| = 4\int\frac{\cos 2x dx}{\cos^2 2x} = 2\int\frac{d\sin 2x}{1-\sin^2 2x} = -2\int\frac{d\sin 2x}{\sin^2 2x - 1} = -\ln\left|\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}\right| + \ln C.$$

По свойствам логарифмов находим: $\ln y = \pm C\dfrac{\sin 2x + 1}{\sin 2x - 1}$; $\ln y = C_1\dfrac{\sin 2x + 1}{\sin 2x - 1}$.

Таким образом, $y=e^{C_1\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}}$ – общее решение, где произвольная постоянная $C_1 \neq 0$.

Отдельно рассмотрим случай $\cos 2x\cdot 4y\cdot \ln y=0$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение получаем, что $x=\frac{\pi n}{2}$, где n – натуральное число, и $y=0$ не являются решениями, а $y=1$ - решение, которое входит в общее решение при $C_1=0$. Окончательно получаем

Ответ: $y=e^{C_1\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}}$, где C_1 - произвольная постоянная.

Задача 2. Решить уравнение $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

Решение.

Это уравнение первого порядка является однородным второй степени. Разделив обе части этого уравнения на x^2dx, получим $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)-2\frac{y}{x}y'=0$.

Обозначим: $u=\frac{y}{x}$. Тогда $y=xu$, $y'=u+xu'$, и уравнение примет вид $\left(1+u^2\right)-2u\left(u+xu'\right)=0$, откуда $2xuu'=1-u^2$; $\frac{2udu}{1-u^2}=\frac{dx}{x}$; $-\frac{d(1-u^2)}{1-u^2}=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим: $-\ln\left|1-u^2\right|=\ln|x|+\ln C_1$; $\ln\left|\left(1-u^2\right)x\right|=\ln\frac{1}{C_1}$; $\left(1-u^2\right)x=\pm\frac{1}{C_1}$; $\left(1-u^2\right)x=C$. Возвращаясь к исходной функции, получим общий интеграл исходного уравнения: $\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)x=C$; $\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)x=C$; $x^2-y^2=Cx$.

Ответ: $x^2-y^2=Cx$.

Задача 3. Решить задачу Коши: $y' + y \cdot \cos x = \sin 2x$, $y(0) = 3$.

Решение.

Шаг 1. Находим общее решение данного линейного неоднородного уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

Первый способ (*метод вариации постоянной*). Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y' + y \cdot \cos x = 0$. Этим решением является функция $y = C \cdot e^{-\sin x}$.

Пусть теперь $C = C(x)$. Подставив выражение $y = C(x) \cdot e^{-\sin x}$ и $y' = C'(x) \cdot e^{-\sin x} - C(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x$ в исходное уравнение, найдем $C'(x)$, а затем интегрированием $C(x) = 2\sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_1$, где C_1 − произвольная постоянная. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \left(2\sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_1\right)e^{-\sin x} = 2\sin x - 2 + C_1 e^{-\sin x}.$$

Второй способ (*метод Бернулли*). Решение уравнения будем искать в виде $y = u(x) \cdot v(x)$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим $u' \cdot v + u \cdot v' + uv \cdot \cos x = \sin 2x$ или $u' \cdot v + u \cdot (v' + v \cdot \cos x) = \sin 2x$. Потребуем, чтобы функции u, v удовлетворяли условиям: $\begin{cases} v' + v \cdot \cos x = 0 \\ u' \cdot v = \sin 2x \end{cases}$.

Из этой системы последовательно находим:

$$v = e^{-\sin x},\ u = 2\sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_1.$$

Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = u \cdot v = \left(2\sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_1\right)e^{-\sin x} = 2\sin x - 2 + C_1 e^{-\sin x}.$$

Шаг 2. Находим частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 3$. Подставив $x = 0$ и $y = 3$ в общее решение $y = 2\sin x - 2 + C_1 e^{-\sin x}$, найдем константу $C_1 = 5$. Таким образом, получаем частное решение $y = 2\sin x - 2 + 5e^{-\sin x}$.

Ответ: $y = 2\sin x - 2 + 5e^{-\sin x}$.

Задача 4. Найти общее и любое частное решение уравнения

$y'' = 5x + x^{-2} + 9\cos 3x.$

Решение.

Это дифференциальное уравнение второго порядка решается непосредственным интегрированием. После первого интегрирования получаем $y' = \frac{5}{2}x^2 - x^{-1} + 3\sin 3x + C_1$. После второго интегрирования получаем общее решение $y = \frac{5}{6}x^3 - \ln|x| - \cos 3x + C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Частное решение получается из общего при конкретных значениях C_1 и C_2. Положив, например, $C_1 = 5$, а $C_2 = 10$, находим частное решение $y^* = \frac{5}{6}x^3 - \ln|x| - \cos 3x + 5x + 10.$

Ответ: $y = \frac{5}{6}x^3 - \ln|x| - \cos 3x + C_1 x + C_2;$

$y^* = \frac{5}{6}x^3 - \ln|x| - \cos 3x + 5x + 10.$

Задача 5. Решить уравнение: $y' = (y')^2$.

Решение.

Это уравнение второго порядка, не содержащее явно функцию y.

Сделаем замену переменной: $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$. Уравнение примет вид: $z' = z^2$ – это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его.

$\frac{dz}{dx} = z^2$; $\frac{dz}{z^2} = dx$; $-\frac{1}{z} = x + C$; $z = \frac{-1}{x + C_1}$.

Возвращаясь к исходной переменной y, получаем $y' = -\frac{1}{x + C_1}$.

Еще раз интегрируем и получаем общее решение $y = -\ln|x + C_1| + C_2$.

Ответ: $y = -\ln|x + C_1| + C_2$.

В задачах № 6 и № 7 нужно решать линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Вид решения таких уравнений зависит от корней характеристического уравнения и вида правой части уравнения. Поэтому приведем решение не одной, а трех задач такого типа.

Задача 6а. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + 6y' + 18y = 17e^{2x}$.

Решение.

Данное уравнение второго порядка является линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = -3 + 3i$ и $\lambda_2 = -3 - 3i$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y = e^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi(x) = Ae^{2x}$. Тогда $\varphi' = 2Ae^{2x}$, $\varphi'' = 4Ae^{2x}$. Подстановка в уравнение приводит к равенству $(4A + 12A + 18A)e^{2x} = 17e^{2x}$, откуда $A = \frac{1}{2}$. Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид $y = e^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{2}e^{2x}$.

Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{2}e^{2x}$.

Задача 6б. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$.

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 2$. Значит, общее решение однородного уравнения записывается в виде $Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$. Заметим, что первый из корней характеристического уравнения совпадает с коэффициентом показателя степени функции в правой части. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi = Axe^{3x}$. Тогда $\varphi' = Ae^{3x}(1+3x)$, $\varphi'' = Ae^{3x}(6+9x)$. Подстановка в уравнение приводит к равенству $(6A+9Ax-5A-15Ax+6Ax)e^{3x} = 2e^{3x}$, откуда $A=2$. Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + 2xe^{3x}$.

Ответ: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + 2xe^{3x}$.

Задача 6в. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + y = 2\cos x - 8x\sin x$.

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$ Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $Y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi = x((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x)$. Вычислим производные первого и второго порядка этой функции:

$$\varphi' = \left(cx^2 + (2a+d)x + b\right)\cos x + \left(-ax^2 + (2c-b)x + d\right)\sin x\ ,$$

$$\varphi'' = \left(-ax^2 + (4c-b)x + 2a + 2d\right)\cos x + \left(-cx^2 - (4a+d)x + 2c - 2b\right)\sin x\ .$$

Подставив их в исходное уравнение, получим соотношение $(4cx + 2a + 2d)\cos x + (-4ax + 2c - 2b)\sin x = 2\cos x - 8x\sin x$. Это равенство должно выполняться для всех *x*, что с учетом линейной независимости функций $\cos x$ и $\sin x$ возможно лишь при выполнении условий: $\begin{cases} 4cx + 2a + 2d = 2 \\ -4ax + 2c - 2b = -8x \end{cases}$, $\begin{cases} -4a = -8 \\ 2c - 2b = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4c = 0 \\ 2a + 2d = 2 \end{cases}$, откуда $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -1$. Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид: $\varphi = 2x^2\cos x - \sin x$, а общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x^2\cos x - \sin x$.

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x^2\cos x - \sin x$.

Задача 7. Решить задачу Коши: $y'' - 10y' + 21 = 50\sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 7$. Значит, общее решение однородного уравнения $y'' - 10y' + 21y = 0$ записывается в виде $Y = C_1e^{3x} + C_2e^{7x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi(x) = A\cos x + B\sin x$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Для их определения вычислим $\varphi'(x) = -A\sin x + B\cos x$, $\varphi''(x) = -A\cos x - B\sin x$ и подставим в исходное уравнение. Тогда получим

$$-A\cos x - B\sin x - 10(-A\sin x + B\cos x) + 21(A\cos x + B\sin x) = 50\sin x,$$

или

$$(20A - 10B)\cos x + (20B + 10A - 50)\sin x = 0.$$

Это равенство должно выполняться для всех x, что с учетом линейной независимости функций $\cos x$ и $\sin x$ возможно лишь при выполнении условий: $\begin{cases} 20A - 10B = 0 \\ 20B + 10A - 50 = 0 \end{cases}$. Значит, $A = 1, B = 2$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{7x} + \cos x + 2\sin x$.

Для решения задачи Коши найдем производную $y' = 3C_1e^{3x} + 7C_2e^{7x} - \sin x + 2\cos x$. Подставив в начальные условия для y и y', получим систему $\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 + 1 \\ 13 = 3C_1 + 7C_2 + 2 \end{cases}$, откуда $C_1 = -1, C_2 = 2$.

Ответ: $y = -e^{3x} + 2e^{7x} + \cos x + 2\sin x$.

Задача 8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 5y' = 0$.

Решение.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Составляем и решаем характеристическое уравнение λ^3 - 5λ = 0, $\lambda\cdot(\lambda^2$-5) = 0. Оно имеет действительные и различные корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{5}$. Следовательно, общее решение имеет вид

$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{\sqrt{5}x} + C_3 e^{-\sqrt{5}x}$, где C_1 , C_2 , C_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{\sqrt{5}x} + C_3 e^{-\sqrt{5}x}$.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ »

Вариант 1

1. Решить уравнение: $(x^2 \cdot y + 9y) \cdot dy + \sqrt{2 + y^2} \cdot dx = 0$.
2. Решить уравнение: $x \cdot y' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.
3. Решить задачу Коши: $x \cdot y' + y = x^5$; $y(1) = 0$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 24 \sin 2x + 3x^2 + 1$.
5. Решить уравнение: $(1 + x^2) \cdot y'' + 2x \cdot y' = 2$.
6. Решить уравнение: $y'' + 25y = 50 \cdot e^{5x}$.
7. Решить задачу Коши: $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.
8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 36y' = 0$.

Вариант 2

1. Решить уравнение: $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\cdot y\cdot y'=0$.
2. Решить уравнение: $2y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{8y}{x}+8$.
3. Решить задачу Коши: $y'-\frac{y}{x}=\ln x$; $y(1)=0$.
4. Найти общее решение уравнения: $y''=6e^{2x}-x^2+7$.
5. Решить уравнение: $x^5\cdot y''+x^4\cdot y'=1$.
6. Решить уравнение: $y''+y'=4x-1$.
7. Решить задачу Коши: $y''-2y'=e^x(3x-1)$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.
8. Найти общее решение уравнения: $y'''-3y''+2y'=0$.

Вариант 3

1. Решить уравнение: $y\cdot(1+\ln y)+x\cdot y'=0$.
2. Решить уравнение: $y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$.
3. Решить задачу Коши: $y'-y\cdot\cos x=\cos^2 x\cdot e^{\sin x}$, $y(0)=0$.
4. Найти общее решение уравнения: $y''=2x^{-3}+8e^{4x}+5$.
5. Решить уравнение: $x^4\cdot y''+x^3\cdot y'=4$.
6. Решить уравнение: $y''-6y'+9y=4x\cdot e^x$.
7. Решить задачу Коши: $y''+4y=e^{-2x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

8. Найти общее решение уравнения: $y'''' - 9y'' = 0$.

Вариант 4

1. Решить уравнение: $\sqrt{1 - x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$.

2. Решить уравнение: $x \cdot y' = 2 \cdot \sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2}$, $y(1) = 1$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = \sqrt{x} - 15 - 3\sin 4x$.

5. Решить уравнение: $x \cdot y'' + 2y' = 0$.

6. Решить уравнение: $y'' + y = x^2 + 6$.

7. Решить задачу

   Коши

   : $y'' - 5y' - 6y = e^x \cdot (-10x - 3)$, ,= $y(0) =$
   0, $y'(0) = 8$
   .

8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 5y'' - 14y' = 0$.

Вариант 5

1. Решить уравнение: $y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$.

2. Решить уравнение: $y' = \frac{y^2}{x^2} + 7 \cdot \frac{y}{x} + 13$.

3. Решить задачу Коши: $y' - 3x^2 \cdot y = x^2 \cdot e^{x^3}$; $y(0) = 0$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 3\cos 6x - \frac{5}{\cos^2 x} + 1.$

5. Решить уравнение : $x \cdot y'' - 2y' = -\frac{2}{x^2}$.

6. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = (2x+5) \cdot e^{2x}.$

7. Решить задачу Коши: $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$

8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 3y'' - 4y' = 0.$

Вариант 6

1. Решить уравнение : $\sqrt{5 + y^2} + y' \cdot y \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0.$

2. Решить уравнение : $x \cdot y' = 3 \cdot \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

3. Решить задачу Коши: $y' - 4xy = 4x^3 \cdot e^{2x^2}$; $y(0) = 0.$

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 6x^5 - \frac{3}{e^{2x}} + \sin 7x.$

5. Решить уравнение: $y'' \cdot ctgx + 2y' = 0$.

6. Решить уравнение: $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x.$

7. Решить задачу Коши: $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3;$

   $y(0) = \frac{4}{3};\ \ y'(0) = \frac{1}{27}.$

8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 3y'' - 4y' = 0.$

Вариант 7

1. Решить уравнение: $\sqrt{4 - x^2} \cdot y' + x \cdot (y^2 + 1) = 0.$

2. Решить уравнение: $y' = \frac{2y + 3x}{x}$.

3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3;\ y(0) = \frac{1}{2}$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sin^2 x} + 4.$

5. Решить уравнение : $(1 + \sin x) \cdot y'' = \cos x \cdot y'.$

6. Решить уравнение : $y'' - 4y' + 3y = -4x \cdot e^x.$

7. Решить задачу Коши: $y'' + 6y' + 9y = 25 \cdot e^{2x};\ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 2.$

8. Найти общее решение уравнения: $y'''' - 81y = 0.$

Вариант 8

1. Решить уравнение: $y' \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$

2. Решить уравнение: $x \cdot y' = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

3. Решить задачу Коши: $y' + \frac{y}{2x} = x\,;\ \ y(1) = 0.$

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 15e^{3-2x} - \frac{1}{x^2} + 8x.$

5. Решить уравнение: $x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 1.$

6. Решить уравнение: $y'' - y' - 2y = (1 - 2x) \cdot e^x.$

7. Решить задачу Коши : $y'' - 2y' + y = 16 \cdot e^x\ ;\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$

8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 9y'' + 8y' = 0.$

Вариант 9

1. Решить уравнение: $\sqrt{4 + x^2} \cdot dx - 4y \cdot dy = x^2 \cdot y \cdot dy\,.$

2. Решить уравнение: $y' = \frac{3y^3+2yx^3}{2xy^2+x^3}$.

3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{y}{x} = x^2$; $y(1) = 0$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 14\cos 7x - \sqrt[5]{x+4} + 6$.

5. Решить уравнение : $x^5 \cdot y'' + x^4 y' = 9$.

6. Решить уравнение: $y'' + 6y' + 13y = 75\cos 2x$.

7. Решить задачу Коши: $y'' + y = 4 \cdot e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 6y'' + 9y' = 0$.

Вариант 10

1. Решить уравнение: $xy' = \sqrt{2x' + y^2} + y$.

2. Решить уравнение: $x \cdot \sqrt{1+y^2} + y \cdot y' \cdot \sqrt{1+x^2} = 0$.

3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 6 \cdot \sin 3x + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{\sin^2 x}$.

5. Решить уравнение: $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' = 1$.

6. Решить уравнение: $y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2$.

7. Решить задачу Коши: $y'' + 81y = 162 \cdot e^{9x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 9$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 2y'' - 8y' = 0$.

Вариант 11

1. Решить уравнение: $y \cdot (1 \cdot ln\, y) + x \cdot y' = 0$.

2. Решить уравнение: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

3. Решить задачу Коши: $xy' + y = \ln x$; $y(1) = 1$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 6\sin 3x + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{\sin^2 x}$.

5. Решить уравнение: $2x \cdot y'' = y'$.

6. Решить уравнение: $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$.

7. Решить задачу Коши: $y'' + y = 1$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

Вариант 12

1. Решить уравнение: $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2} \cdot y' = 0$.
2. Решить уравнение: $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.
3. Решить задачу Коши: $y' + \frac{y}{x} = 3x$; $y(1) = 1$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 10e^{1-5x} + (x+3)^5 - 2$.
5. Решить уравнение: $xy'' + y' = x + 1$.
6. Решить уравнение: $y'' + 3y' + 2y = (6x - 1) \cdot e^x$.
7. Решить задачу Коши: $y'' + 9y = 18x + 9$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 5$.
8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 2y'' - 24y' = 0$.

Вариант 13

1. Решить уравнение: $2x \cdot dx - y \cdot dy = y \cdot x^2 \cdot dy - x \cdot y^2 \cdot dx$.
2. Решить уравнение: $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.
3. Решить задачу Коши: $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$; $y(1) = 1$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 3\sqrt{x-8} - 4\cos 5x + \frac{2}{x^4}$.
5. Решить уравнение: $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1$
6. Решить уравнение: $y'' + 2y' - 3y = 30 \cdot \cos 3x$
7. Решить задачу Коши: $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.
8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 4y'' + 4y' = 0$.

Вариант 14

1. Решить уравнение: $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$.
2. Решить уравнение: $x \cdot y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.
3. Решить задачу Коши: $y' + \frac{y}{x} = e^x$; $y(1) = 0$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = (2x + 5)^6 - e^{-x} + 4$.
5. Решить уравнение: $x \cdot y'' + y' + x = 0$.
6. Решить уравнение: $y'' - 3y' + 2y = -5e^x$.
7. Решить задачу Коши: $y'' - y = 2x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.
8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Вариант 15

1. Решить уравнение: $\sqrt{5+y^2}\cdot dx+4(x^2\cdot y+y)\cdot dy=0$.
2. Решить уравнение: $y'=\frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$.
3. Решить задачу Коши: $y'+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{3x^2}{1+x^2}$; $y(0)=0$.
4. Найти общее решение уравнения : $y''=\frac{5}{x^2}-2\sqrt{x+4}-7$.
5. Решить уравнение: $\operatorname{tg} x\cdot y''=y'$.
6. Решить уравнение: $y''+y'-2y=9e^x$.
7. Решить задачу Коши: $y''+y=48\cos 5x+72\sin 5x$;

   $y(0)=0,\quad y'(0)=0.$
8. Найти общее решение уравнения: $y'''-9y''+8y'=0$.

Вариант 16

1. Решить уравнение $(e^{2x}+2)dy+y\cdot e^{2x}\cdot dx=0$.
2. Решить уравнение: $x^2-y^2+2xy\cdot y'=0$.
3. Решить задачу Коши: $y'+\frac{y}{x}=\sin x$; $y(\pi)=1$.
4. Найти общее решение уравнения: $y''=\sqrt[3]{x-5}-\frac{11}{\cos^2 x}+3$.
5. Решить уравнение: $x\cdot y''-y'+\frac{1}{x}=0$.
6. Решить уравнение: $y''+y'=x$.
7. Решить задачу Коши: $y''-3y'+2y=24\cdot e^{-2x}$;

$y(0) = -1$; $y'(0) = 4$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 4y'' - 5y' = 0$.

Вариант 17

1. Решить уравнение: $x \cdot dx - y \cdot dy = y \cdot x^2 \cdot dy - x \cdot y^2 \cdot dx$.
2. Решить уравнение: $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{3y}{x} = 5$.
3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{y}{x+1} = e^x \cdot (x+1)$; $y(0) = 1$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = \frac{1}{(2x-5)^2} + 9e^{3x-1}$.
5. Решить уравнение: $y'' \cdot tgx = y' + 1$.
6. Решить уравнение: $y'' + 3y' + 2y = 12x^2 + 8x$.
7. Решить задачу Коши: $y'' - 5y' + 4y = 3 \cdot e^{4x}$;

   $y(0) = 0$; $y'(0) = 4$.
8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Вариант 18

1. Решить уравнение: $6x \cdot dx - 2ydy = 2y \cdot x^2 \cdot dy - 3xy^2 \cdot dx$.
2. Решить уравнение : $y' \cdot (x^2 - 6xy) = x^2 + xy - 5y^2$.
3. Решить задачу Коши: $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x$; $y(\pi) = 0$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 2\sin(5x - 3) - 4x^3 + 13$.
5. Решить уравнение: $(1 + x^2) \cdot y'' + 2x \cdot y' = 2x$.
6. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x}$.
7. Решить задачу Коши: $y'' + y' = 16x + 10$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 8y'' + 15y' = 0$.

Вариант 19

1. Решить уравнение: $x \cdot \sqrt{5 + y^2} \cdot dx + y \cdot \sqrt{4 + x^2} \cdot dy = 0$.
2. Решить уравнение: $4x^2 \cdot y' = y^2 + 10xy + 5x^2$.
3. Решить задачу Коши: $y' - y \cdot ctg\, x = 2x \cdot \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 3\cos(7x - 2) - 5e^{2x-7} + \sqrt{x}$.
5. Решить уравнение: $x \cdot y'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
6. Решить уравнение: $y'' - 3y' + 2y = -5 \cdot e^x$.
7. Решить задачу Коши: $y'' - 64y = 128 \cdot \cos 8x$; $y(0) = 0$; $y''(0) = 0$.
8. Найти общее решение уравнения: $y''' + y'' - 2y' = 0$.

Вариант 20

1. Решить уравнение: $6x \cdot dx - y \cdot dy = y \cdot x^2 \cdot dy - 3x \cdot y^2 \cdot dx$.
2. Решить уравнение: $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.
3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{y}{x} = x^2$; $y(1) = 0$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = (2x - 1)^9 - \frac{1}{e^{3x}} + 11$.
5. Решить уравнение: $x^4 \cdot y'' + x^3 \cdot y' = 1$.

6. Решить уравнение: $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.

7. Решить задачу Коши: $y'' + 3y' + 2y = 1 - 2x^2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 6y'' + 5y' = 0$.

Вариант 21

1. Решить уравнение: $(2 - e^x) \cdot dy + 3e^x \cdot tg\, y \cdot dx = 0$.

2. Решить уравнение: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

3. Решить задачу Коши: $y' - tg\, x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 3\sqrt{x-8} + \frac{7}{x^2} - 5\sin(2x - 3)$.

5. Решить уравнение: $y'' \cdot x \cdot \ln x = y'$.

6. Решить уравнение: $y'' + y = 16\cos 3x - 24\sin 3x$.

7. Решить задачу Коши: $y'' - y' = 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 10y'' + 16y' = 0$.

Вариант № 22

1. Решить уравнение: $y' = (2y + 1)ctgx$.

2. Решить уравнение: $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{3y}{x} = x$, $y(1) = 6$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 2x + 15e^{1-5x} - \frac{1}{x}$.

5. Решить уравнение: $y'' - \frac{y'}{x(2+\ln x)} = 2 + \ln x$.

6. Решить уравнение: $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 6$.

7. Решить задачу Коши: $y'' + 6y' + 5y = 84\,e^{2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' + y' = 0$.

Вариант № 23

1. Решить уравнение: $y' \sin x = y \cdot lny$.

2. Решить уравнение: $(x + y)dx - (x - 9y)dy = 0$.

3. Решить задачу Коши: $y' - \frac{3y}{x} = x$, $y(1) = 6$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 6x + 5e^{2-x} + \sqrt[3]{3x}$.

5. Решить уравнение: $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

6. Найти общее решение уравнения: $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 6$.

7. Решить задачу Коши: $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$; $y(0) = 1$, $y'^{(0)} = 0$.

8. Найти общее решение уравнения: $y''' + 25y' = 0$.

Вариант № 24

1. Решить уравнение: $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

2. Решить уравнение: $(x + y)dx - (x - 16y)dy = 0$.

3. Решить задачу Коши: $y' + y\cos x = cosx$; $y(0) = 1$.

4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 20\sin 2x + 3x^2 + 6$.
5. Решить уравнение: $xy'' + y' = 3x + 2$.
6. Найти общее решение уравнения: $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{6x}$.
7. Решить задачу Коши: $y'' - 4y' + 3y = 10cosx$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.
8. Найти общее решение уравнения: $y'''' - 16y = 0$.

Вариант № 25

1. Решить уравнение: $y'\sin x - y\cos x = 0$.
2. Решить уравнение: $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.
3. Решить задачу Коши: $y' - 3xy = 2x \cdot e^{x^2}$; $y(0) = 1$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 12\mathrm{e}^{6x-5} + \sqrt{x} + 7$.
5. Решить уравнение: $y'' \cdot tgx = y' + 1$.
6. Найти общее решение уравнения: $y'' - 9y = 3x\mathrm{e}^{2x}$.
7. Решить задачу Коши: $y'' + 4y' + 5y = 25x$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$.
8. Найти общее решение уравнения: $y'''' - 7y'' = 0$.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «РЯДЫ»

Вариант № 0

Задача 1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{2n^3+n^2+5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{3n-2}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{2n^3+n^2+5}$

Решение

Для исследования ряда применим II признак сравнения:

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$. Тогда, если $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, то ряды ведут себя одинаково (или оба сходятся, или оба расходятся).

Для сравнения возьмём гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; таким образом, $a_n = \frac{n^2+2n+3}{2n^3+n^2+5}$, $b_n = \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+3)\cdot n}{2n^3+n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n}{2n^3+n^2+5} = \frac{1}{2}.$$

Здесь $A = \frac{1}{2} \neq 0$ и $A \neq \infty$, значит, данный ряд расходится, так как расходится гармонический ряд.

Ответ: Ряд расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Решение

Применим признак Даламбера: Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ и $q<1$, то ряд сходится, а при $q>1$ – расходится.

Здесь $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{n!\cdot(n+1)}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{n!}{(n+1)^n}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

(использован II замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$).

Таким образом, $q=\dfrac{1}{e}<1$, значит, данный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится (по признаку Даламбера).

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n+1}{3n-2}\right)^n$

Решение

Применим признак Коши: Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ и $q<1$, то ряд сходится, а при $q>1$ – расходится.

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{5n+1}{3n-2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{3n-2}=\dfrac{5}{3}$; таким образом, $q=\dfrac{5}{3}>1$, значит, данный ряд расходится.

Ответ: Ряд расходится (по признаку Коши).

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$

Решение

Применим интегральный признак Коши: Если функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[1, +\infty)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Вычислим $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \ln\ln x \,\Big|_{2}^{\infty} = \infty$. Интеграл расходится, значит, и данный ряд тоже.

Ответ: Ряд расходится (по интегральному признаку).

Задача 2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать, абсолютно или условно.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

Решение

Ряд знакочередующийся. Для его исследования применим признак Лейбница: Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$, где $a_n > 0$, монотонно убывают по абсолютной величине ($a_1 > a_2 > a_3 > \dots$) и стремятся к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд сходится.

Здесь $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \dots$, так как функция $f(x) = \ln x$ монотонно возрастает при $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. Значит, данный ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

Этот ряд расходится по признаку сравнения. В самом деле, при $x>0$ $\ln x<x$, то есть $\ln n<n$, откуда $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ ($n=2,3,\ldots$). Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонический) расходится, а члены ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ больше, чем соответствующие члены гармонического ряда. Значит, ряд из абсолютных величин расходится. Таким образом, данный ряд сходится условно (не абсолютно).

Ответ: Ряд сходится условно.

Задача 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot(x+2)^n$$

Решение

Найдём радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1.$$

Тогда интервал сходимости может быть найден из неравенства

$$|x+2|<R,$$

то есть: $|x+2|<1$, $-1<x+2<1$, $-3<x<-1$. Таким образом, интервал сходимости данного ряда $-3<x<-1$. Исследуем сходимость ряда в концах интервала:

1) $x = -1$. Ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$; этот ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (здесь $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$);

2) $x = -3$. Ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (-1)^n$. Этот ряд также расходится, так как его члены тоже не стремятся к нулю.

Ответ : Область сходимости данного ряда – промежуток $(-3, -1)$.

Задача 4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{4}{4+x}$$

Решение

Используем одно из основных разложений

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \qquad \text{верное при } |x| < 1:$$

$$\frac{4}{4+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{4}} = 1 - \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

Это разложение верно при условии $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$, то есть при $-4 < x < 4$.

Ответ: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^n$ при $-4 < x < 4$.

Задача 5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$$

Решение

Используем основное разложение $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots;$ тогда

$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots,$

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1/2}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^5\cdot 10} - \frac{1}{2^7\cdot 42} + \ldots$$

Если для приближённого вычисления интеграла взять 3 первых члена, то по теореме Лейбница ошибка δ будет меньше первого из отброшенных членов, то есть

$$\delta < \frac{1}{2^7\cdot 42} < 0{,}001.$$

Значит, $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} = \frac{443}{960} = 0{,}461\ldots$

Ответ: С точностью до 0,001 данный интеграл равен 0,461.

Задача 6. Найти четыре первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = 2x^2 + 3x + y^2,$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 2$.

Решение

Пусть $y = y(x)$ – искомое частное решение. Ряд Маклорена для функции $y(x)$ имеет вид:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Из начальных условий следует, что $y(0) = 2$. Из уравнения найдём $y'(0)$:

$y'(0) = 2\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 2^2 = 4.$

Дифференцируем уравнение:

$$y'' = 4x + 3 + 2\,yy',$$

$$y''(0) = 4\cdot 0 + 3 + 2\cdot 2\cdot 4 = 19;$$

$$y''' = 4 + 2\,(y')^2 + 2\,yy'',$$

$$y'''(0) = 4 + 2\cdot 16 + 2\cdot 2\cdot 19 = 112.$$

Таким образом, можно написать четыре первых члена ряда:

$$y(x) = 2 + \frac{4}{1!}x + \frac{19}{2!}x^2 + \frac{112}{3!}x^3 + \ldots$$

Ответ: $y(x) = 2 + 4x + 9{,}5\,x^2 + \dfrac{56}{3}x^3 + \ldots$

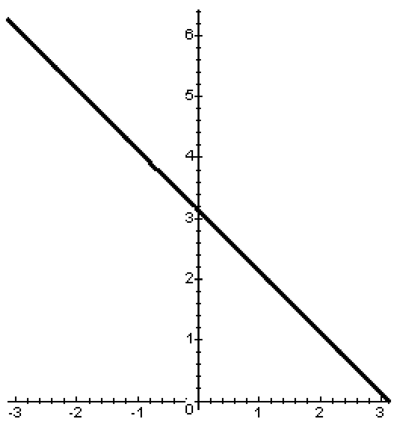
Задача 7. Разложить функцию

$$f(x) = \pi - x, \quad (-\pi < x < \pi)$$

в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\ \pi)$. Построить график функции и график суммы ряда Фурье.

Решение

График функции $f(x) = \pi - x$ на данном интервале имеет вид:



Функция $f(x)$ на интервале $(-\pi,\ \pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле, и её ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Найдём коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 + \pi^2) = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi - x}{n}\sin nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

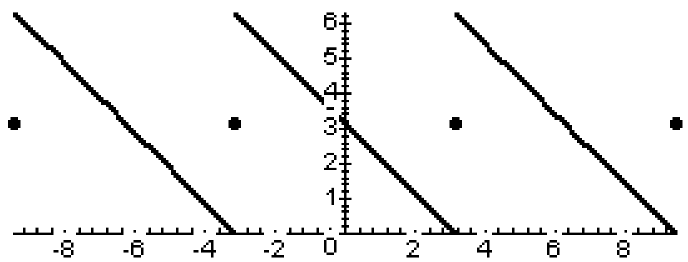
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi - x}{n}\cos nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x - \pi}{n}\cos nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\sin nx\,\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\cos \pi n = \frac{2}{n}(-1)^n.$$

Ответ: Ряд Фурье данной функции имеет вид

$$\pi - x = \pi + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$

График суммы $S(x)$ ряда Фурье изображён на рисунке:



КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «РЯДЫ»

Вариант № 1

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = \sin x + y^2; \quad y(0) = 1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = x, \quad (-2 < x < 2)$$

Вариант № 2

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+3}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{5^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$ г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ n}{n^3}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot(x-3)^n$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1\cos\ x^2\cdot dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0)=a$:

$$y'=y+y^2;\quad y(0)=3$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x)=|x|,\quad(-1<x<1)$$

Вариант № 3

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{3n-1}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n \cdot (x+2)^n}{n}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{1}{4-x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = 2e^y - xy; \quad y(0) = 0$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 4

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n!}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{6}{2x+3}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,25} \frac{\sin x}{x} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = e^x + y^2; \quad y(0) = 0$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = 2x+3, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 5

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$ г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (x+1)^n$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \ln(1-x)$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = \cos x + y^2; \quad y(0) = 1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 2 & \text{при } \ 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 6

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n! \cdot 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{3^n}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,5} e^{-\frac{x^2}{4}} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = e^x + y; \quad y(0) = 4$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = x+1, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 7

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^2}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = 2\cos^2 x$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = x^2 + y^2; \quad y(0) = 2$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье

$$f(x) = |x|, \quad (-3 < x < 3)$$

Вариант № 8

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{1+n^2}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+1}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot e^{-n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = \sin x + \frac{y^2}{2}; \quad y(0) = 1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = x - 1, \quad (-1 < x < 1)$$

Вариант № 9

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+5n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{8^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^3}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 5^n}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^4}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = 2e^y + xy; \quad y(0) = 0$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = x, \quad (-5 < x < 5)$$

Вариант № 10

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n \cdot 3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9+n^2}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^3}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1 \sin(x^3) \cdot dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = x + x^2 + y^2; \quad y(0) = 5$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } -\pi < x \le 0 \\ 1 \text{ при } \quad 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 11

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n \cdot \sqrt[3]{n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n+1}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = x \cdot e^{3x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x}\,dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = \cos x - y^2; \quad y(0) = 2$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = 1 - x, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 12

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \ln(1+2x)$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,5} \sin(4x^2)\, dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = e^x + 2y^2; \quad y(0) = 1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье

$$f(x) = |x|, \quad (-1 < x < 1)$$

Вариант № 13

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+2)^n$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = y^2 - y; \quad y(0) = -2$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } -\pi < x < 0 \\ 0 \text{ при } 0 \le x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 14

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n!}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-2)^n}{n+1}$$

4. Разложить функцию $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

5. Вычислить интеграл $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ с точностью до 0,001

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = e^x + 2xy; \quad y(0) = 0$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье

$$f(x) = 2x + 3, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 15

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$ г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^4 n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{n^2}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}\,dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = 3y^2 - 2\sin x; \quad y(0) = 2$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = 3 - x, \quad (-3 < x < 3)$$

Вариант № 16

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+n+7}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{3/2} n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{1/2} \cos\sqrt{x} \cdot dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = 5e^x - y + x; \quad y(0) = 1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } -3 < x \le 0 \\ 2 \text{ при } 0 < x < 3 \end{cases}, (-3 < x < 3)$$

Вариант № 17

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\, dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = 2x^2 - 3y^2; \quad y(0) = 2$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -\pi < x \le 0 \\ 1 \text{ при } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 18

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{2n}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{\ln n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n(n+1)}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = e^{3x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,5} \cos(4x^2)\, dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = \sin x - 2y^2; \quad y(0) = -1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2 < x \le 0 \\ 0 & \text{при } 0 < x < 2 \end{cases}, \quad (-2 < x < 2)$$

Вариант № 19

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{3n+1}\right)^n$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^2\sqrt{n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n \cdot 3^n}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\sqrt{n}}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \sqrt{1+2x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x^2}{x} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = e^y - 3xy; \quad y(0) = 0$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = x+2, \quad (-1 < x < 1)$$

Вариант № 20

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$ г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^6 n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,2} \sin(5x^2)\, dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = 2x - y^2; \quad y(0) = 4$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ -1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Вариант № 21

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{2^n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3 - 8n + 1}{4n^3 + 2n - 1} \right)^{2n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{3^n}$. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

5. Вычислить интеграл $\int_0^{0,2} \cos(5x^2)\,dx$ с точностью до 0,001

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = y^2 + \cos x + \sin x\ ; \quad y(0) = 2$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < x \le 0 \\ x & \text{при } 0 < x < 1 \end{cases}, \quad (-1 < x < 1)$$

Вариант № 22

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!\cdot 4^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n-1}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{3n+6}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \ln(x^3+1)$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = e^x + y^2 + x^2 \;; \quad y(0) = 1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = |x|, \quad (-1 < x < 1)$$

Вариант № 23

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = 1 - \cos 2x$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{4}}{x} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = 2\cos x - y^2 - \sin x \,; \quad y(0) = 1$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = x + 2, \quad (-3 < x < 3)$$

Вариант № 24

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+4)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{2n}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^3+1}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+1)^n$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{1}{2+x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = y^3 + x \ ; \quad y(0) = 2$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = 3 - x, \quad (-2 < x < 2)$$

Вариант № 25

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{10^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n\sqrt{n}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(n+1)}{n!}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал, в котором это разложение имеет место.

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0) = a$:

$$y' = e^y - 2xy + x; \quad y(0) = 0$$

7. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

$$f(x) = x, \quad (-4 < x < 4)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: «Айрис – пресс», 2007.
2. Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике. Интегралы. Дифференциальные уравнения. – М.: МГТУ ГА, 2005. – Ч.IV, №1448.
3. Жулёва Л.Д. и др. Сборник задач по высшей математике. Ряды. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: МГТУ ГА, 2000. – ч. III, №1461.