МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Л. Д. Жулёва, В. С. Козлова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению практических работ

для студентов II курса
направлений 230100, 09.03.01
дневной формы обучения

Москва – 2014

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. И. Дементьев

Л. Д. Жулёва, В. С. Козлова
Теория вероятностей и математическая статистика. Пособие по выполнению практических работ для студентов II курса направлений 230100, 09.03.01 (бакалавр) дневной формы обучения. – М.: МГТУ ГА, 2014. – 42 с.

Пособие издаётся в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» по рабочему учебному плану направлений 230100, 09.03.01.

Пособие охватывает разделы теории вероятностей и математической статистики, изучаемые студентами на втором курсе.

В пособии содержатся варианты контрольных работ.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры от 25 марта 2014 года и методического совета от 25 марта 2014 года.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§1 Классическая вероятностная модель

Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими полную группу несовместных событий. Такие исходы называются элементарными событиями (исходами, случаями, шансами). Случай, который приводит к наступлению события А, называется благоприятствующим ему.

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Такое определение вероятности называется ***классическим.***

Задача 1. К зоне обзора радиолокатора подходят два самолета ИЛ-62, три самолета ТУ-154 и пять самолетов ТУ-134. Вычислить вероятность того, что на экране радиолокатора первым появится: 1) ИЛ-62; 2) ТУ-154; 3) ТУ-134, если заранее неизвестен порядок их следования.

Решение. Обозначим через A={появление на экране радиолокатора самолета ИЛ-62}, B={появление на экране радиолокатора самолетаТУ-154}, C={появление на экране радиолокатора самолета ТУ-134}. Число элементарных событий равно числу всех самолетов, подходящих к зоне обзора радиолокатора, т.е. n=10, из них два исхода благоприятствуют событию А, три – событию В, пять – событию С. Согласно классическому определению вероятности (1) получаем:

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2;\ P(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3;\ \ P(C) = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

Задача 2. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

Решение. Элементарными событиями (случаями) здесь являются наборы, включающие 3 фрукта. Поскольку порядок фруктов безразличен, будем считать их выбор неупорядоченным (и бесповторным). Общее число элементарных событий (случаев) n равно числу способов выбрать 3 фрукта из 9, т.е. числу сочетаний C_9^3. Число благоприятствующих исходов m равно числу способов выбора 3 апельсинов из имеющихся 5, т.е. C_5^3. Тогда искомая вероятность:

$$P(A) = C_5^3/C_9^3 \ = \left(\frac{5!}{2!3!}\right)/\left(\frac{9!}{3!6!}\right) = 0{,}12.$$

Задача 3. Среди 14 билетов 4 выигрышных. Найти вероятность того, что из 6 купленных билетов ровно 2 выигрышных.

Решение. Решим задачу с помощью классического определения вероятности события. Из 14 билетов 6 штук можно выбрать C_{14}^{6} способами. Здесь C_{14}^{6} - число сочетаний из 14 элементов по 6 элементам. Значит, $n = C_{14}^{6}$. Два выигрышных билета могут быть выбраны из 4 билетов C_{4}^{2} способами. Остальные (4 билета) должны быть невыигрышными, их можно выбрать из 10 невыигрышных C_{10}^{4} способами.

Так как на один способ выбора двух выигрышных билетов приходится C_{10}^{4} способов выбора невыигрышных билетов, то на C_{4}^{2} способов выбора двух выигрышных билетов приходится $C_{4}^{2} \cdot C_{10}^{4}$ способов выбора невыигрышных билетов. Итак, $m = C_{4}^{2} \cdot C_{10}^{4}$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{4}^{2} \cdot C_{10}^{4}}{C_{14}^{6}}$. Число сочетаний из r элементов по k элементов находим по формуле: $C_{r}^{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

При этом получим: $P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{10}^4}{C_{14}^6} = \frac{4! \cdot 10! \cdot 6! \cdot 8!}{2! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 14!}$.

§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (2)$$

Если A, B несовместны, то AB=∅ (невозможное событие), тогда $P(A \cdot B) = 0$ и

$$P(A+B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}. \qquad (3)$$

Вероятность суммы трех событий:

$$P(A+B+C) = \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C). \qquad (4)$$

При решении задач иногда удобно найти вероятность противоположного события $\overline{\mathrm{A}}$, а затем найти вероятность события A по формуле:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \qquad (5)$$

Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (6)$$

Два события называются ***независимыми***, если наступление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий**:**

$$P(A) = P_B(A), \quad P(B) = P_A(B) \text{ и } \quad P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (7)$$

Для вероятности произведения n событий, имеем:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n). \qquad (8)$$

События $A_1,\ A_2, \ldots \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность каждого из них не зависит от осуществления или неосуществления любого числа остальных событий. В случае n независимых в совокупности событий имеем:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (9)$$

Задача 4. Три радиостанции независимо друг от друга передают сообщения самолёту, каждая по одному сообщению. Вероятность приема самолетом сообщения равна соответственно для каждой из них 0,4; 0.5; 0,7. Вычислить вероятность того, что в результате посылки сообщения тремя радиостанциями будет принято самолетом хотя бы одно.

Решение. Обозначим через A_i={прием сообщения от i-й радиостанции}, i=1, 2, 3. Тогда $B=A_1+A_2+A_3$={прием хотя бы одного сообщения самолетом}. Можно использовать формулу (4), но проще воспользоваться (5). Событие $\bar{B}$={ни одно из сообщений самолетом не принято} - противоположное B. Очевидно, что $\bar{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. События $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ независимы в совокупности, поэтому согласно (9) и (5):

$$P(\bar{B}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = \big(1 - P(A_1)\big) \cdot \big(1 - P(A_2)\big)\big(1 - P(A_3)\big) =$$
$$= (1 - 0{,}4) \cdot (1 - 0{,}5) \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}09.$$

А тогда $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$

Задача 5. Прибор содержит 3 элемента с вероятностями отказа 0,1; 0,4 и 0,2. Найти вероятности отказа а) только одного элемента; б) двух или трех элементов; в) хотя бы одного элемента.

Решение. Обозначим A_i= {отказ i-го элемента}, B={отказ одного элемента}, C={отказ двух или трех элементов}, D={отказ хотя бы одного элемента}. Тогда для случая а) запишем: $B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,$

где $\bar{A}_i$ ={ безотказная работа i –го элемента}. Слагаемые этой суммы – несовместные события. Поэтому, согласно теореме сложения для несовместных событий (3):

$$P(B)=P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right).$$

Сомножители в последнем выражении – независимые в совокупности события, значит, в соответствии с теоремой умножения (9):

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3).$$

Поскольку $P(\overline{A_i})=1-P(A_i)$, получаем:

$$P(B)=0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}444.$$

В случае б) имеем $C=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$.

Как и в случае а) справедливы следующие соотношения: $P(C)=P(A_1A_2\overline{A_3}+$ $+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+$ $+P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot$ $+P(A_3)+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2+$ $+0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}124.$

В случае в) искомое событие $D=A_1+A_2+A_3$, причем слагаемые – совместные события, и для вычисления вероятности можно использовать формулу (4) для трех произвольных событий, но можно решить задачу проще, используя противоположное событие $\overline{D}$ и формулу (5): $P(D)=1-P(\overline{D})$.

Так как D означает отказ одного или двух или трех элементов, то $\overline{D}$ – событие, противоположное D – означает безотказную работу всех трех элементов. А тогда $\overline{D}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. События $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ независимы, получаем

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=1-0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}568.$$

Задача 6. Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

Решение. Событие А={мастер проверил ровно две детали} означает, что при такой проверке первая деталь оказалась нестандартной, а вторая стандартная. Значит, $A=A_1A_2$, где A_1={первая деталь оказалась нестандартной} и A_2={вторая деталь – стандартная}. Очевидно, что вероятность события A_1 равна $P(A_1)=\frac{3}{10}$, кроме того, $P_{A_1}(A_2)=\frac{7}{9}$, так как перед взятием второй детали у мастера осталось 9 деталей, из которых только 2 нестандартные и 7 стандартных. По теореме умножения:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

§3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется ***полной группой*** попарно несовместных событий, если

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega \quad \text{и} \quad H_i \cdot H_j = \emptyset, \; i, j = 1,2, \ldots, n, \; i \neq j,$$

где Ω – достоверное событие, $\emptyset$ – невозможное событие.

Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа попарно несовместных событий, причем $P(H_i) \neq 0, \; i = 1,2, \ldots, n,$ то для любого события А имеет место равенство (***формула полной вероятности***):

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P_{H_k}(A). \qquad (10)$$

А для любого события А такого, что Р(А) $\neq 0$, справедлива ***формула Байеса:***

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) P_{H_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) P_{H_k}(A)} \qquad i = 1,2, \ldots, n. \qquad (11)$$

Задача 7. Для поисков пропавшего самолета послано десять вертолетов: 8 вертолетов в первый район и 2 вертолета во второй район возможной катастрофы. В каждом из районов пропавший самолет может находиться с вероятностями соответственно равными 0,8 и 0,2. Требуется ***1)*** вычислить вероятность обнаружения самолета, если поиски осуществляются вертолетами независимо и вероятность обнаружения самолета каждым из вертолетов равна 0,2; ***2)*** вычислить вероятность того, что самолет был найден в первом районе, если известно, что самолет обнаружен.

Решение. 1) Имеем две гипотезы: H_1={самолет находится в первом районе}, $P(H_1) = 0{,}8$ и H_2={самолет находится во втором районе}, $P(H_2) = 0{,}2$. Пусть событие А={обнаружение самолета в одном из районов}, A_i={обнаружение самолета в i-том районе}, i=1,2. Тогда $\overline{A_i}$={в i-том районе самолет не обнаружен ни одним вертолетом} и

$$P(\overline{A_1}) = (1-0{,}2)^8 = (0{,}8)^8, \quad P(\overline{A_2}) = (1-0{,}2)^2 = (0{,}8)^2.$$

Получаем:

$$P_{H_1}(A) = P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = 1 - (0{,}8)^8 \approx 0{,}832,$$
$$P_{H_2}(A) = P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - (0{,}8)^2 \approx 0{,}36\,.$$

Вероятность события А вычисляется по формуле полной вероятности (10):

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}832 + 0{,}2 \cdot 0{,}36 \approx 0{,}738.$$

2) Пусть событие А произошло, тогда по формуле Байеса получим:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot \ P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}832}{0{,}738} \approx 0{,}902.$$

Задача 8. Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй − 3 студентов, а третий − 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго − только 10%, у третьего − 70%. А) Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен. Б) Пусть известно, что студент не сдал экзамен, т.е. получил оценку «неудовлетворительно». Кому из трех преподавателей вероятнее всего он отвечал?

Решение. А) Обозначим через H_1, H_2, H_3 гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи:

$$P(H_1) = 6/30{=}0{,}2; \quad P(H_2) = 3/30{=}0{,}1; \quad P(H_3) = 21/30{=}0{,}7.$$

Пусть событие А={слабо подготовившийся студент сдал экзамен}. Тогда снова в силу условия задачи:

$$P_{H_1}(A) = 0{,}4; \quad P_{H_2}(A) = 0{,}1; \quad P_{H_3}(A) = 0{,}7$$

По формуле полной вероятности (10):

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}58.$$

Б) Вероятность получить «неуд» равна:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$$

Требуется вычислить условные вероятности. По формуле Байеса (11) получаем:

$$P_{\bar{A}}(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}42} = 0{,}285;$$

$$P_{\bar{A}}(H_2) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}42} = 0{,}214; \qquad P_{\bar{A}}(H_3) == \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}42} = 0{,}5.$$

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.

§4. Схема испытаний Бернулли.

Пусть вероятность появления события А при единичном испытании равна р. Опыт повторяется n раз, т.е. осуществляется серия из n независимых испытаний. Вероятность $P_n(k)$ того, что в результате n опытов событие А произойдет k раз (наступит k успехов), определяется по ***формуле Бернулли***:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n, \tag{12}$$

где q=1−p − вероятность наступления противоположного события $\bar{A}$ при единичном испытании. Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие А наступит не менее k_1 и не более k_2 раз:

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{13}$$

При больших значениях n (порядков десятков, сотен) применяют приближенные формулы (***локальная теорема Муавра-Лапласа***):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}. \tag{14}$$

И приближенные формулы для $P_n(k_1, k_2)$ (***интегральная теорема Муавра-Лапласа):***

$$P_n(k_1,k_2) = \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где } \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt. \tag{15}$$

Формула Пуассона:

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np, \; P_n(k_1,k_2) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{16}$$

Замечание 1. $\varphi(x)$ − функция Гаусса, $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Таблицы значений этих функций приводятся в приложении.
Замечание 2. Асимптотические приближенные формулы, основанные на теоремах Муавра-Лапласа рекомендуется применять в случае $n \geq 100, npq > 9$ (вероятности p, q не очень близки к нулю). Если n велико, а вероятность p достаточно мала, причем $\lambda = np$ не мало и не велико (обычно достаточно условий: *p<0,1; npq<10*), то применяются асимптотическая формула Пуассона.

Задача 9. Рассмотрим воздушное судно с четырьмя двигателями. Пусть вероятность отказа каждого двигателя равна р, причем двигатели выходят из строя независимо друг от друга. Какова вероятность того, что выйдут из строя: 1) два двигателя; 2) четыре двигателя.

Решение. Обозначим через $q=1-p$. Так как p и q постоянны, отказы двигателей не зависят друг от друга, поэтому данная задача может быть представлена схемой Бернулли при $n=4$. При этом искомые вероятности по формуле (12) равны: 1) $P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2!2!} p^2 \cdot q^2 = 6 \cdot p^2 \cdot q^2$;
2) $P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = \frac{4!}{4!0!} p^4 = p^4$.

Задача 10. Пусть вероятность того, что в каждом полете воздушное судно встретится с грозой равна 0,005. Какова вероятность, что в 10000 полетах произойдет встреча с грозовой деятельностью: а) ровно в 40 полетах; б) не более чем в 70 полетах.

Решение. По условию задачи: n=10000, p=0,005 и q=1-p=0,995. Искомые вероятности, вычисленные по формулам Бернулли(12) и (13), равны:

а) $P_{10000}(40) = C_{10000}^{40} \cdot (0{,}005)^{40} \cdot (0{,}995)^{9960}$

б) $P_{10000}(0;\ 70) = \sum_{k=0}^{k=70} C_{10000}^{k} \cdot (0{,}005)^{k} \cdot (0{,}995)^{10000-k}$, но вычисление по этим формулам приводит к затруднениям вычислительного характера, поэтому применим приближенные формулы (14) и (15) теорем Муавра-Лапласа.

а) Вычислим $\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995} = \sqrt{49{,}75} \approx 7{,}05$ и $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{40-10000\cdot 0{,}005}{\sqrt{10000\cdot 0{,}005\cdot 0{,}995}} \approx \frac{-10}{7{,}05} \approx -1{,}42.$ Определим по таблице (см. приложение 1) значение функции $\varphi(x)$ при $x = -1{,}42$, получим значение искомой вероятности $P_{10000}(40) \approx \frac{0{,}1456}{7{,}05} \approx 0{,}0206.$

Точные подсчеты по формуле Бернулли дают $P_{10000}(40) \approx 0{,}0206$**.** Сравнивая эти результаты, убеждаемся в достаточно хорошем приближении значения $\mathrm{P}_n(k)$, вычисленного по приближенной формуле к точному значению, т.е. относительная погрешность составляет 4,4%.
б) Применяем формулы интегральной теоремы Лапласа и используем таблицы приложения 2, имеем:

$$P_{10000}(0;\ 70) \approx \Phi\left(\frac{70 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}09) = \Phi(2{,}84) + \Phi(7{,}09) \approx 0{,}4975 + 0{,}5 = 0{,}9975.$$

Задача 11. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?

Решение. Имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p=0,005. Применяя пуассоновское приближение (16) с λ=np=5, получаем

$$P_{1000}(3) \approx \frac{5^3}{3!}e^{-5}; \quad P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) =$$

$$= 1 - \left(P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)\right) \approx 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{5^k}{k!} e^{-5}\,;\ P_{1000}(3) \approx 0{,}14\,;$$

$$P_{1000}(k \geq 3) \approx 0{,}875.$$

§5. Случайные величины.

Случайная величина (с. в.) – числовая функция, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно какое именно.

Дискретная случайная величина (д.с.в.) X – случайная величина, принимающая конечное $x_1, x_2, \cdots, x_n$, или счетное $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ множество значений. Закон распределения д.с.в. X удобно задавать с помощью таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Эта таблица называется рядом распределения,

$$p_i = P(X = x_i), \quad \sum_i p_i = 1.$$

Непрерывная случайная величина (н.с.в.) принимает значения, заполняющие конечный или бесконечный промежуток на числовой оси.

Функция распределения $F_X(x)$ (обозначается также $F(x)$) случайной величины X (непрерывной или дискретной) определяется формулой:

$$F_X(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения:

а) $0 \leq F_X(x) \leq 1$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} F_X(x) = 1$;

в) $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$ (монотонность);

г) $F_X(x)$ непрерывна слева в любой точке x, т.е. $F_X(x-0) = F_X(x)$;

д) $P(a \leq x < b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Если функция распределения $F_X(x)$ данной н.с.в. X непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, быть может конечного числа точек, тогда производная $f_X(x)$ её функции распределения называется ***плотностью распределения*** непрерывной с.в. X (или ***«плотностью вероятности»*** или просто ***«плотностью»***): $f_X(x) = F_X'(x)$ ($f_X(x)$ также обозначается: $f(x),\ p(x)$).

Свойства плотности:

а) $f_X(x) \geq 0$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ (условие нормировки);
в) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$;
г) $P(a \le x \le b) = \int_a^b f_X(x)dx$;
д) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_X(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_X(x) = 0.$

Математическое ожидание (или среднее значение) $M(X) = M_X$ случайной величины X определяется следующим образом:

$$M_X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \quad \text{для д. с. в. с конечным множеством значений} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i \quad \text{для д. с. в. с бесконечным множеством значений} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \quad \text{для н. с. в.} \end{cases} \tag{17}$$

Свойства математического ожидания: а) $M(X + Y) = M_X + M_Y$;
б) $M(aX + \ +b) = aM_X + b$ (здесь a и b — числа);
в) $M(X \cdot Y) = M_{XY} = M_X \cdot M_Y$, если X и Y независимы.
Дисперсия случайной величины: $D_X = M(X - M_X)^2 = M(X^2) - M_X^2.$ (18)
Свойства дисперсии: а) $Da = 0$, где a — число;
б) $D(aX + b) = a^2 D_X$, где a и b — числа;
в) $D(X + Y) = D_X + D_Y$ если X и Y независимы.
Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_X = \sqrt{D_X}$. Величина σ_X неотрицательна, имеет ту же размерность, что с.в. X, характеризует степень разброса с.в. вокруг математического ожидания.

Функции случайных величин. Пусть $g(x)$ - действительная функция. Если X – случайная величина и $Y = g(X)$, то

$$M_Y = \begin{cases} \sum_i g(x_i)p_i \quad \text{для д. с. в. } X \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx \quad \text{для н. с. в. } X \end{cases} \tag{19}$$

Задача 12. В связке из 3 ключей только один ключ подходит к двери. Ключи перебирают до тех пор, пока не отыщется подходящий ключ.
А) Построить закон распределения для случайной величины X – числа опробованных ключей. Б) Построить функцию распределения $F_X(x)$ для случайной величины X.

Решение. А) Число опробованных ключей может равняться 1, 2 или 3. Если испытали только один ключ, это означает, что этот первый ключ сразу подошел к двери, а вероятность такого события равна 1/3. Итак, $P(X = 1) = 1/3.$ Далее, если опробованных ключей было 2, т.е. X=2, это значит, что первый ключ не подошел, а второй – подошел. Вероятность этого события равна 2/3×1/2=1/3. То есть, $P(X=2)=1/3$. Аналогично вычисляется вероятность $P(X=3)=1/3$. В результате получается следующий ряд распределения:

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Б) Случайная величина X имеет три значения 1, 2, 3, которые делят всю числовую ось на четыре промежутка: $(-\infty;1]$; $(1;2]$; $(2;3]$; $(3;+\infty)$. Если $x\le 1$ то неравенство $X<x$ невозможно (левее x нет значений случайной величины X) и значит, для такого x функция $F_X(x)=0$. Если $1<x\le 2$, то неравенство $X<x$ возможно только если X=1, а вероятность такого события равна 1/3, поэтому для таких x функция распределения $F_X(x)$=1/3.

Если $2<x\le 3$, то неравенство $X<x$ означает, что или X=1, или X=2, поэтому в этом случае вероятность P(X<x)=P(X=1)+P(X=2)=2/3, т.е. $F_X(x)$=2/3. И, наконец, в случае $x>3$ неравенство $X<x$ выполняется для всех значений случайной величины X, поэтому P(X<x)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1, т.е. $F_X(x)=1$. Итак, мы получили следующую функцию:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 1\\ 1/3, & \text{если } 1<x\le 2\\ 2/3, & \text{если } 2<x\le 3\\ 1, & \text{если } x>3\end{cases}$$

Задача 13. Пусть случайная величина X имеет следующий закон распределения

X	–1	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Вычислить математическое ожидание M_X, дисперсию D_X и среднеквадратическое отклонение σ_X .

Решение. Применяя формулы (17) и (18) находим

$$M_X=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p_i=-1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot p_i=(-1)^2\cdot\frac{1}{4}++0^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4};$$

$$D_X=M(X^2)-M_X^2=\frac{5}{4}-\frac{1}{16}=\frac{19}{16};$$

$$\sigma_X=\sqrt{D_X}=\frac{\sqrt{19}}{4}.$$

Задача 14. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x\notin[0;2]\\ Cx^2, \ \text{если } x\in[0;2]\end{cases}$$

А) Определить константу С. Б) Построить функцию распределения $F_X(x)$ и вычислить вероятность $P\{-1 \le X \le 1\}$. В) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение с.в. X.

Решение. А) Константа С находится из условия: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

В результате имеем: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^2 Cx^2dx = C\frac{x^3}{3}|_0^2 = \frac{8C}{3}$, откуда $C = \frac{3}{8}$.

Б) Чтобы построить функцию распределения $F_X(x)$, отметим, что интервал [0,2] делит область значений аргумента x (числовую ось) на три части: $(-\infty; 0)$; $[0; 2]$; $(2; +\infty)$. Рассмотрим каждый из этих интервалов. В первом случае (когда x<0) вероятность события $(X < x)$ вычисляется так:

$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$, так как плотность $f_X(x)$ на полуоси (-∞; 0) равна нулю. Во втором случае (0≤x≤2):

$$F_X(x) = P(X < x) =$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \frac{3}{8}\int_0^x t^2dt = \frac{x^3}{8}.$$

Наконец, в последнем случае, когда x>2:

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_0^2 f_X(t)dt + \int_2^x f_X(t)dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \frac{3}{8}\int_0^2 t^2dt + \int_2^{+\infty} 0 \cdot dt = \frac{x^3}{8}|_0^2 = 1.$$

Итак, получена функция распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{x^3}{8}, \text{если } 0 \le x \le 2 \\ 1, \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Следовательно, $P(-1 \le X \le 1) = F_X(1) - F_X(-1) = 1/8 - 0 = 1/8$.

В)

$$M_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \frac{3}{8}\int_0^2 x \cdot x^2dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4}|_0^2 = \frac{3}{2}$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \frac{3}{8}\int_0^2 x^2 \cdot x^2dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5}|_0^2 = \frac{12}{5}$$

Согласно (18): $D_X = M(X^2) - M_X^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20} = 0{,}15; \sigma_X = \sqrt{D_X} = 0{,}387.$

§6. Системы случайных величин.

Во многих практических задачах результат опыта описывается не одной, а двумя (или более) случайными величинами X и Y. В этом случае говорят о системе двух случайных величин (X, Y) (или двумерной случайной величине (X, Y)). Геометрически систему двух случайных величин (X, Y) можно интерпретировать как случайную точку на плоскости.

Закон распределения системы (X, Y) двух дискретных с.в. в случае конечного числа значений можно задать формулой: $p_{ij} = P\big(X = x_i, Y = y_j\big)$, $i = 1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, m$ или с помощью таблицы:

$X\backslash Y$	y_1	y_2	….	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	….	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	….	p_{2m}
. .			. .	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	….	p_{nm}

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Функция распределения системы случайных величин:
$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$, событие: $(X < x, Y < y)$ означает произведение событий: $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$.
Свойства двумерной функции распределения: а) $0 \le F(x, y) \le 1$; б) $F(x, y)$ не убывает и непрерывна слева по каждому из своих аргументов;
в) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$; г) $F(+\infty, +\infty) = 1$; д) $F(x, +\infty) = F_X(x)$; $F(+\infty, y) = F_Y(y)$,
где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения с. в. X и Y соответственно.
В случае системы (X, Y) двух дискретных с.в.: $F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$.

Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ для любых действительных чисел x и y. В противном случае с.в. называются ***зависимыми***.

Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$. В случае системы (X, Y) дискретных с.в., имеем: X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$p_{ij} = P\big(X = x_i, Y = y_j\big) = P(X = x_i) \cdot P\big(Y = y_j\big)$ для любых $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \cdots, m$.

Условным законом распределения одной из с.в., входящих в систему (X,Y), называется закон её распределения, найденный при условии, что другая с.в. приняла определенное значение (или попала в некий интервал).

В случае системы (X,Y) двух д.с.в. условным законом распределения с.в. Y при условии $X=x_i$ называется совокупность вероятностей:

$$P\big(Y=y_j\ /\ X=x_i\big)=\frac{P\big(X=x_i,Y=y_j\big)}{P(X=x_i)},\ j=1,\cdots,m;\ i=1,\dots,n. \qquad (20)$$

Аналогично определяется закон распределения с.в. X при условии $Y=y_j$:

$$P\big(X=x_i\ /\ Y=y_j\big)=\frac{P\big(X=x_i,Y=y_j\big)}{P\big(Y=y_j\big)},\ \ i=1,\dots,n;\ \ \ j=1,\dots,m\ . \qquad (21)$$

Математическим ожиданием системы д.с.в. (X,Y) называется упорядоченная пара математических ожиданий: $(M_X;M_Y)$, определяемых равенствами:

$$M_X\ =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\cdot p_{ij},\qquad\qquad M_Y\ =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p_{ij}, \qquad (22)$$

Математическое ожидание с.в. $\varphi(X,Y)$, являющейся функцией компонент X,Y двумерной д.с.в. (X,Y) находятся аналогично по формуле:

$$M\big(\varphi(X,Y)\big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi\big(x_i,y_j\big)\cdot p_{ij} \qquad (23)$$

Дисперсия системы с.в. (X,Y): $D_X=M(X-M_X)^2$, $D_Y=M(Y-M_Y)^2$ вычисляется согласно формуле (23): $\varphi(x,y)=(x-M_X)^2,\varphi(x,y)=(y-M_Y)^2$.

Если (X,Y) – система д.с.в., то ***условное математическое ожидание*** д.с.в. Y при условии $X=x_i$ и д.с.в. X при условии $Y=y_j$ определяется равенствами:

$$M(Y/X=x_i)=M(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p\big(y_j/x_i\big)$$
$$M\big(X/Y=y_j\big)=M\big(X/y_j\big)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p\big(x_i/y_j\big), \qquad (24)$$

где $p\big(y_j/x_i\big)=p\big(Y=y_j/X=x_i\big)$; $p\big(x_i/y_j\big)=p\big(X=x_i/Y=y_j\big)$.

Для характеристики связи между величинами X и Y служит **корреляционный момент**:

$$K_{xy}=M\big((X-M_X)\cdot(Y-M_Y)\big)=M(X\cdot Y)-M_X\cdot M_Y \qquad (25)$$

Вычисляется согласно формуле (23): $M\big((X-M_X)\cdot(Y-M_Y)\big)$ для $\varphi(x,y)=$ $=(x-M_X)\cdot(y-M_Y)$ и $M(XY)$ для $\varphi(x,y)=xy$.

Если с.в. X и Y независимы то $K_{xy}=0$. Таким образом, если $K_{xy}\neq 0$, то с.в. X и Y зависимы. Случайные величины X и Y называются **коррелируемыми**, если $K_{xy}\neq 0$, называются **некоррелируемыми**, если $K_{xy}=0$.

Коэффициент корреляции r_{XY} двух с.в. X и Y есть безразмерная величина, определяемая равенством: $\boldsymbol{r_{XY}=\frac{K_{xy}}{\sigma_X\sigma_Y}}$, где σ_X и σ_Y – среднеквадратические отклонения случайных величин X и Y. Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости случайных величин X и Y. **Свойства коэффициента корреляции**: а) $-1\le r_{XY}\le 1$; б) если X и Y – независимые с.в., то $r_{XY}=0$; в) с.в. X и Y связаны линейной зависимостью $Y=aX+b,\ a\neq 0 \iff |r_{XY}|=1$.

Задача 15. Случайные приращения цен акций двух компаний за день X и Yимеют совместное распределение, заданное таблицей:

Y \ X	–1	+1
–1	0,3	0,2
+1	0,1	0,4

Найти коэффициент корреляции.

Решение. Прежде всего вычисляем согласно (23):
$M(XY)=0{,}3\cdot(-1)\cdot(-1)+0{,}2(-1)\cdot 1+0{,}1\cdot 1\cdot(-1)+0{,}4\cdot 1\cdot 1=0{,}4.$
Далее находим частные законы распределения X и Y:

Y \ X	–1	+1	p_y
–1	0,3	0,2	0,5
+1	0,1	0,4	0,5
p_x	0,4	0,6	

Определяем согласно (17) и (18):
$MX=0{,}5-0{,}5=0$; $MY=0{,}6-0{,}4=\ 0{,}2$; $M(X^2)=(-1)^2\cdot 0{,}5+1^2\cdot 0{,}5=$ $=1$; $M(Y^2)=(-1)^2\cdot 0{,}4+1^2\cdot 0{,}6=1$; $DX=M(X^2)-M^2X=$ $=1-0^2=1$; $DY=M(Y^2)-M^2Y=1-(0{,}2)^2=\ 0{,}96.$
Тогда из (25), имеем **:** $K_{xy}=M(XY)-MX\cdot MY=0{,}4-0\cdot 0{,}2=0{,}4.$

Коэффициент корреляции: $r_{XY}=\frac{K_{xy}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{0{,}4}{\sqrt{1}\sqrt{0{,}96}}\approx 0{,}408.$

Задача 16. Распределение двумерной случайной величины задано таблицей:

X / Y	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное распределение и условное математическое ожидание Y при условии, что X =1.

Решение. Условное математическое ожидание (24) равно $M(Y/X=x_1)=$
$=M(Y/x_1)=\sum_{j=1}^{2}y_j\cdot p(y_j/x_1)=y_1\cdot p(y_1/x_1)+y_2\cdot p(y_2/x_1)$

.

Из условия задачи найдем распределение составляющих Y и X (последний столбец и последняя строка таблицы).

X / Y	1	3	4	8	p_y
3	0,15	0,06	0,25	0,04	0,50
6	0,30	0,10	0,03	0,07	0,50
p_x	0,45	0,16	0,28	0,11	1

Поскольку $P(y_j/x_1)=P(Y=y_j/X=x_1)=\frac{P(X=x_1,Y=y_j)}{P(X=x_1)},\ j=1{,}2,$ то

$P(y_1/x_1)=\frac{P(X=x_1,Y=y_1)}{P(X=x_1)}=\frac{0{,}15}{0{,}45}=\frac{1}{3};$

$P(y_2/x_1)=\frac{P(X=x_1,Y=y_2)}{P(X=x_1)}=\frac{0{,}3}{0{,}45}=\frac{2}{3},$

Искомое условное математическое ожидание равно $M(Y/x_1)=3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{3}=5.$

Контрольное домашнее задание № 1.
Теория вероятностей.

Задача 1. Одновременно подбрасывают две игральные кости. В вариантах 1–10 найти вероятность того, что сумма выпавших очков 1) равна k; 2) меньше $k+1$; 3) больше $k–1$; 4) заключена в промежутке $[\alpha, \beta]$. В вариантах 11–25 найти вероятность того, что произведение выпавших очков: 1) равно k; 2) меньше $k+1$; 3) больше $k–1$; 4) заключено в промежутке $[\alpha, \beta]$. (Таблица 1).

Задача 2. Задана электрическая схема системы, состоящей из пяти элементов. Событие $\overline{A_i}$ – отказ i-го элемента за некоторый промежуток времени. Вероятности безотказной работы элементов заданы:

$$P(A_i)=0{,}95,\qquad i=1,3{,}5;\ P(A_i)=0{,}9,\qquad i=2,4.$$

Событие A состоит в безотказной работе всей системы за рассматриваемый промежуток времени. Требуется:

1) Выразить событие A через A_i или $\overline{A_i}$ (i=1,2,3,4,5);

2) найти вероятность $P(A)$ безотказной работы системы. (Таблица 1).

Задача 3. Из партии, содержащей n изделий, среди которых k – высшего сорта, для контроля последовательно выбирают наугад m изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий окажется ровно l высшего сорта, при условии, что выборка производится: 1) с возвращением (выбранное изделие после проверки возвращается обратно в партию); 2) без возвращения (выбранное изделие в партию не возвращается). (Таблица 1).

Задача 4. На склад поступили детали, изготовляемые на трех станках. Изготовлено деталей на первом станке $a\%$, на втором – $b\%$, на третьем – $c\%$. Вероятность выпуска бракованных деталей на i-ом станке равна $p_i, i = 1,2,3$. 1) Определить вероятность того, что изделие, наудачу взятое со склада оказалось бракованным. 2) Если известно, что изделие, наудачу взятое со склада оказалось бракованным, то найти вероятность того, что оно изготовлено на j-м станке, и определить на каком из трех станков оно наиболее вероятно изготовлено. (Таблица 2).

Задача 5. В зону аэродрома входят n самолетов. Вероятность правильного (по установленной схеме) захода на посадку каждого самолета, не требующего вмешательства диспетчера, равна $0,85$. Определить вероятность того, что: а) ровно k самолетов потребуют вмешательства диспетчера; б) более m самолетов не потребуют вмешательства диспетчера в вариантах 1–15 и менее m самолетов не потребуют вмешательства диспетчера в вариантах 16–25. (Таблица 2).

Задача 6. Пусть вероятность ошибочного выполнения каждой операции авиадиспетчером равна p. Авиадиспетчер выполняет за смену в среднем n операций. Определить вероятность того, что диспетчер за смену: а) не допустит ни одной ошибочной операции; б) допустит ровно k ошибочных операции; в) допустит не более m ошибочных операций. (Таблица 3).

Задача 7. Регулярность вылета воздушных судов по расписанию в среднем составляет 80%. По расписанию ежедневно должны вылетать 100 воздушных судов. Какова вероятность того, что без нарушения требования регулярности вылетят: а) ровно k воздушных судов; б) не менее k_1 и не более k_2 воздушных судов; в) не менее k_3 воздушных судов. (Таблица 3).

Задача 8. Произведено n выстрелов с постоянной вероятностью попадания при каждом выстреле, равной p. Для случайной величины $X = \{$число попаданий в цель$\}$ найти: 1) распределение вероятностей; 2) функцию распределения и построить её график; 3) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\alpha,\ \beta)$; 4) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение случайной величины X. (Таблица 2).

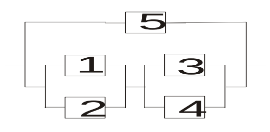
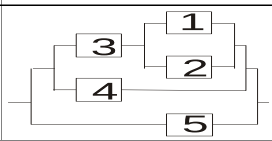
Задача 9. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности

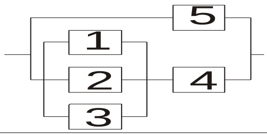
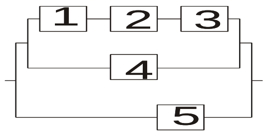
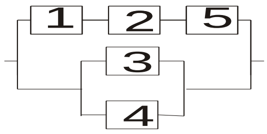
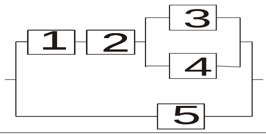
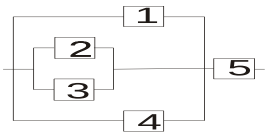
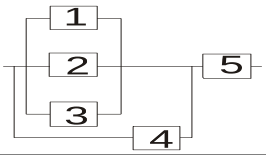
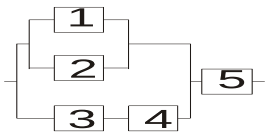
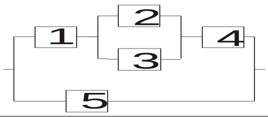
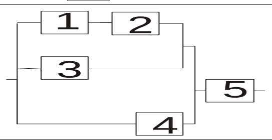
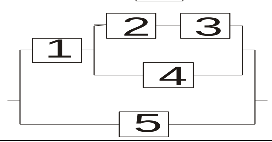
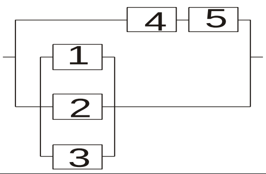
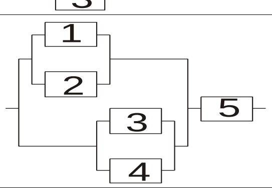
$f_X(x) = \begin{cases} A(ax+b), & \text{если } x \in [\alpha;\beta], \\ 0, \text{если } x \notin [\alpha;\beta]. \end{cases}$ Требуется; 1) коэффициент A; 2) найти её функцию распределения $F_X(x)$; 3) построить графики функции распределения $F_X(x)$ и плотность вероятности $f_X(x)$; 3) вычислить вероятности: $P(X > k_1)$; $P(X < k_2)$; $P(k_3 < X < k_4)$; 4) найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение случайной величины X. (Таблица 3).

Задача 10. Дана плотность вероятности $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ при } x \in [0,2] \\ 0 \text{ при } x \notin [0,2] \end{cases}$ случайной величины X. Случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью $Y = a \cdot X^2 + b$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y, используя плотность вероятности случайной величины X. (Таблица 1).

Задача 11. Дана система двух случайных величин (X,Y) закон распределения которой задан таблицей, где $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $y_1=-1$, $y_2=0$, $y_3=1$, $y_4=2$. Найти: 1) законы распределения случайных величин X и Y; 2) математическое ожидания и дисперсии случайных величин X и Y; коэффициент корреляции r_{XY}; условные распределения $P(x_i/y_2), P(y_j/x_2)$; 3) условные математические ожидания $M(X/y_2)$, $M(Y/x_2)$. (Таблица 4).

Таблица 1 (задачи 1, 2, 3, 10)

	Задача 1		Задача 2	Задача 3				Задача 10	
Вар.	***k***	***[α,β]***		***n***	***k***	***m***	***l***	***a***	***b***
1	3	[4;6]		10	6	7	4	1	0
2	4	[2;5]		12	6	6	4	1	1

3	5	[3;7]		11	7	3	2	2	0
4	6	[2;6]		13	8	7	2	1	2
5	7	[3;5]		14	7	5	3	2	1
6	8	[3;4]		15	9	6	4	2	2
7	9	[3;8]		16	10	6	5	2	3
8	10	[4;7]		17	7	6	2	3	0
9	2	[9;12]		18	12	6	4	3	-1
10	11	[8;12]		12	8	6	5	3	-2
11	4	[4;10]		10	5	4	3	1	0
12	5	[2;8]		13	8	6	4	1	1
13	6	[5;17]		12	9	4	2	1	2
14	7	[8;12]		14	10	6	5	2	0

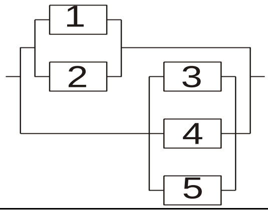
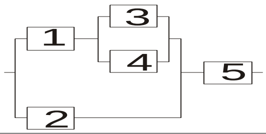
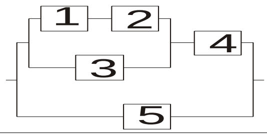
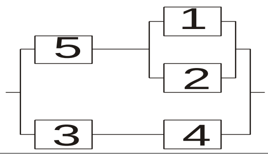
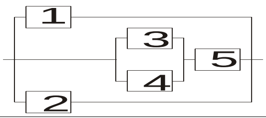
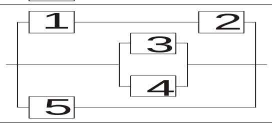
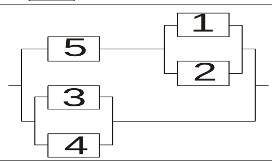
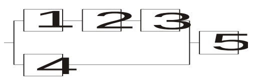
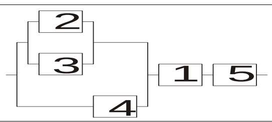
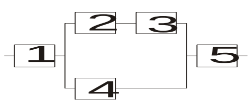
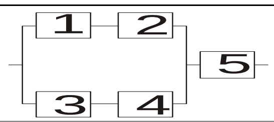
15	8	[10;13]		15	9	7	3	2	1
16	9	[20;28]		16	10	5	4	2	2
17	10	[30;35]		17	12	8	4	3	3
18	11	[21;26]		18	15	5	3	3	0
19	12	[15;18]		17	10	8	2	3	-1
20	13	[20;23]		12	7	5	4	3	-2
21	14	[19;24]		16	11	5	3	1	0
22	15	[24;28]		15	12	4	2	1	1
23	16	[28;31]		14	7	5	1	1	2
24	17	[21;36]		13	8	6	4	2	0
25	18	[17;22]		10	8	4	3	2	1

Таблица 2 (задачи 4, 8, 5)

Вар.	Задача 4							Задача 8			Задача 5		
	a, %	b, %	c, %	P_1	P_2	P_3	j	n	P	(α,β)	n	к	m
1	10	30	60	0.01	0.02	0.03	1	4	0.2	(1;0.5)	5	2	3
2	30	10	60	0.01	0.04	0.03	2	4	0.3	(0.5;3)	6	3	4
3	10	60	30	0.02	0.04	0.03	3	4	0.4	(1.5;2.5)	7	4	3
4	30	60	10	0.03	0.01	0.05	1	4	0.5	(4.5;3)	8	5	2
5	60	10	30	0.02	0.05	0.01	2	4	0.6	(0.5;3)	5	1	1
6	60	30	10	0.01	0.03	0.02	3	4	0.7	(0.5;2)	6	2	3
7	20	35	45	0.03	0.03	0.04	1	4	0.8	(2;3.5)	7	3	2
8	20	45	35	0.03	0.03	0.04	2	4	0.9	(1;3)	8	4	5
9	35	20	45	0.05	0.05	0.03	3	5	0.1	(0.5;4)	5	3	2
10	35	45	20	0.01	0.01	0.05	1	5	0.2	(-1;0.5)	6	4	3
11	45	20	35	0.02	0.03	0.01	2	5	0.3	(0.5;3)	7	5	3
12	45	35	20	0.03	0.01	0.04	3	5	0.4	(0.5;2.5)	8	6	4
13	25	40	35	0.03	0.04	0.02	1	5	0.5	(1.5;3)	5	4	3
14	25	35	40	0.05	0.01	0.03	2	5	0.6	(0.5;2)	6	3	2
15	40	35	25	0.05	0.01	0.02	3	5	0.7	(1.3;2)	7	2	5
16	40	25	35	0.02	0.01	0.03	1	5	0.8	(2;3.5)	8	1	3
17	35	40	25	0.03	0.01	0.02	2	5	0.9	(1;3)	5	3	2
18	35	25	40	0.03	0.04	0.01	3	6	0.1	(3;4)	6	5	3
19	40	15	45	0.03	0.02	0.04	1	6	0.2	(2;6)	7	4	2
20	40	45	15	0.05	0.03	0.01	2	6	0.3	(1.5;4)	8	2	4
21	15	40	45	0.05	0.02	0.01	3	6	0.4	(1;6)	5	4	2
22	15	45	40	0.03	0.02	0.01	1	6	0.5	(2;7)	6	2	3
23	45	15	40	0.04	0.01	0.03	2	6	0.6	(4;7)	7	3	5
24	45	40	15	0.04	0.02	0.03	3	6	0.7	(0.5;3)	8	5	4
25	10	55	35	0.01	0.03	0.05	1	6	0.8	(1;4)	5	1	3

Таблица 3 (задачи 6, 7, 9)

Вар.	*Задача 9*								*Задача 6*				*Задача 7*			
	a	b	α	β	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	n	p	k	m	k	κ_1	κ_2	k_3
1	2	6	0	5	2	1	-1	4	300	0.01	10	2	81	70	90	88
2	3	-2	2	7	3	4	-4	6	400	0.015	12	3	82	72	88	80
3	3	1	4	6	5	5	5	6	350	0.02	14	4	83	74	86	75
4	2	-1	1	6	3	5	-2	4	300	0.01	16	2	84	76	92	70
5	3	1	0	6	3	5	-1	4	350	0.02	18	3	85	78	94	76
6	1	3	2	6	3	5	-3	4	400	0.02	15	4	86	80	92	84
7	2	1	1	7	2	4	-3	6	350	0.01	13	2	87	82	97	82
8	1	2	1	5	2	4	-5	3	400	0.02	14	4	88	78	98	95
9	2	3	1	5	2	4	-7	3	400	0.015	8	4	81	71	91	50
10	2	3	3	7	4	6	-4	5	300	0.01	9	3	82	72	92	73
11	2	-3	3	8	4	6	-3	5	350	0.02	10	2	83	75	85	86
12	3	-2	2	7	3	4	-4	6	200	0.015	12	3	84	74	94	69
13	3	2	1	5	2	4	-5	3	300	0.01	15	2	85	75	95	70
14	1	2	0	5	2	4	-7	3	350	0.02	13	3	86	77	96	56
15	1	3	1	7	3	6	-5	5	400	0.015	14	4	87	76	94	76
16	1	-1	3	8	4	6	-3	4	300	0.01	15	2	88	60	80	83
17	2	1	0	5	2	3	-2	4	350	0.02	12	3	89	65	85	72
18	1	4	1	6	4	5	-8	3	400	0.015	13	4	70	50	70	93
19	1	2	0	4	3	2	-4	1	300	0.01	10	2	71	55	75	62
20	3	4	2	6	5	4	0	3	350	0.02	11	3	72	68	98	54
21	1	4	1	8	3	7	-3	6	400	0.015	15	4	73	60	80	72
22	1	-1	3	7	4	5	-2	6	300	0.01	16	4	74	64	92	63
23	3	-2	3	6	4	5	4	6	350	0.02	12	3	75	60	82	85
24	4	-2	2	6	3	4	-4	5	400	0.015	14	2	76	63	83	74
25	4	-1	1	8	3	7	-5	6	350	0.01	16	2	77	64	90	63

Таблица 4 (задача 11)

X	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
Y	*Вариант 1*			*Вариант 2*			*Вариант 3*			*Вариант 4*		
y_1	0.05	0.10	0.04	0	0.06	0.12	0	0.15	0.10	0	0.18	0.04
y_2	0.08	0	0.06	0	0.15	0.10	0.18	0.12	0.05	0.06	0.15	0.12
y_3	0.12	0	0.15	0.18	0.12	0.05	0.10	0.04	0.08	0.05	0.08	0.12
y_4	0.10	0.18	0.12	0.10	0.04	0.08	0	0.06	0.12	0.10	0.10	0
	Вариант 5			*Вариант 6*			*Вариант 7*			*Вариант 8*		
y_1	0.18	0.04	0.06	0.05	0.04	0	0.05	0.12	0.10	0	0.15	0.10
y_2	0.15	0.12	0.05	0.12	0.15	0.18	0	0.04	0.15	0.10	0.04	0.08
y_3	0.08	0.12	0.10	0.10	0.08	0.06	0.08	0.10	0	0.18	0.12	0.05
y_4	0.10	0	0	0	0.10	0.12	0.18	0.06	0.12	0	0.06	0.12
	Вариант 9			*Вариант 10*			*Вариант 11*			*Вариант 12*		
y_1	0.04	0.08	0.10	0	0	0.18	0.04	0.10	0.06	0.15	0.06	0.09
y_2	0.12	0.05	0.18	0.10	0.06	0.15	0.06	0.15	0.09	0.05	0.02	0.03
y_3	0.06	0.12	0	0.12	0.04	0.12	0.02	0.05	0.03	0.10	0.04	0.06
y_4	0.10	0	0.15	0.10	0.05	0.08	0.08	0.20	0.12	0.20	0.08	0.12
	Вариант 13			*Вариант 14*			*Вариант 15*			*Вариант 16*		
y_1	0.075	0.075	0.10	0.06	0.06	0.18	0.03	0.09	0.18	0.09	0.09	0.12
y_2	0.075	0.075	0.10	0.06	0.06	0.18	0.04	0.12	0.24	0.12	0.12	0.16
y_3	0.06	0.06	0.08	0.04	0.04	0.12	0.01	0.03	0.06	0.03	0.03	0.04
y_4	0.09	0.09	0.12	0.04	0.04	0.12	0.02	0.06	0.12	0.06	0.06	0.08
	Вариант 17			*Вариант 18*			*Вариант 19*			*Вариант 20*		
y_1	0.015	0.045	0.09	0.12	0	0.04	0.05	0	0.15	0	0.12	0.15
y_2	0.035	0.105	0.21	0.10	0	0.06	0.08	0	0.12	0.18	0.05	0.04
y_3	0.025	0.075	0.15	0.18	0.15	0.12	0.12	0.18	0.10	0.06	0	0.10
y_4	0.025	0.075	0.15	0.08	0.10	0.05	0.10	0.06	0.04	0.12	0.10	0.08
	Вариант 21			*Вариант 22*			*Вариант 23*			*Вариант 24*		
y_1	0.030	0.050	0.02	0.08	0.12	0	0.10	0.18	0.04	0.05	0.12	0.10
y_2	0.045	0.075	0.03	0.04	0.18	0.12	0	0.12	0.08	0.04	0.08	0
y_3	0.105	0.175	0.07	0.10	0.10	0.06	0	0.15	0.05	0.06	0.12	0
y_4	0.120	0.200	0.08	0.05	0.15	0	0.06	0.10	0.12	0.15	0.10	0.18
	Вариант 25 – см. Вариант 24.											

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§1. Основные формулы

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n. Наблюдавшиеся значения x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) признака X называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, вариационным рядом.

Статистическим распределением выборки называют перечень **различных** вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объёму выборки n) или относительных частот w_i,

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

(сумма всех относительных частот равна единице).

Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот. Для этого весь участок оси абсцисс, на котором расположены значения случайной величины X, наблюдавшиеся в опыте, делится на m отрезков равной длины h.

Интервальным статистическим распределением называется таблица, где в верхней строке указаны интервалы, а в нижней – соответствующие им частоты n_i ($i = 1, \ldots, m$) или относительные частоты w_i ($i = 1, \ldots, m$). В качестве частоты интервала принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал.

Для графического представления выборки строят гистограмму относительных частот. Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\dfrac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна w_i – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице: $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$. Гистограмма относительных частот является статистическим аналогом графика плотности распределения $f(x)$ случайной величины X.

Стандартными точечными оценками математического ожидания M (X) и дисперсии D (X) изучаемой случайной величины X являются выборочное среднее и выборочная дисперсия. При вычислении этих оценок по выборке, заданной интервальным статистическим рядом, предполагают, что все наблюдаемые значения выборки, попавшие в i-й интервал, совпадают с его серединой x_i^*. Приведем формулы для точечных оценок:

выборочное среднее

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^* \, n_i}{n} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* \, w_i \ ,$$

выборочная дисперсия

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i^*)^2 \, n_i}{n} - (\overline{x}_в)^2,$$

выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \ ,$$

исправленная выборочная дисперсия (применяется в случае малых выборок)

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в,$$

исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{s^2} \ .$$

Доверительным называют интервал, который с заданной доверительной вероятностью (надёжностью) γ покрывает заданный параметр. Чаще всего задают надёжность, равную 0,95; 0,99.

Интервальной оценкой (с надёжностью γ) математического ожидания М (Х) = a нормально распределенной случайной величины Х по выборочной средней $\overline{x}_в$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x}_в - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{x}_в$ – выборочное среднее, σ – известное среднее квадратическое отклонение, t – значение аргумента функции Лапласа Φ(x) (см. приложение 2), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

При неизвестном σ доверительный интервал для a имеет вид

$$\overline{x}_в - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} \ ,$$

где $\overline{x}_в$ – выборочное среднее, $s = \sqrt{s^2}$ – исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ найдено по известным γ и n (см. приложение 3).

При объёме выборки $n>30$ значение t_γ, найденное по таблице приложения 3 и значение t, найденное по формуле $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$ (приложение 2) практически совпадают.

§2. Проверка статистической гипотезы о законе распределения

Пусть закон распределения случайной величины X неизвестен, но есть основание полагать, что он нормальный. Опишем применение так называемого критерия χ^2 («хи-квадрат»), называемого также критерием Пирсона, для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X. С этой целью сравнивают эмпирические (наблюдаемые) и теоретические частоты, то есть частоты, вычисленные в предположении нормального распределения.

<u>Правило нахождения теоретических частот
в случае нормального закона</u>

1) Если в крайних интервалах частоты $n_i<5$, то эти интервалы следует объединить с соседними перед тем, как находить теоретические частоты. Пусть после такого объединения число интервалов стало равным m.

2) Для каждого частичного интервала (x_i, x_{i+1}) находят теоретическую вероятность p_i попадания нормально распределённой случайной величины с параметрами $\overline{x}_в$ и $\sigma_в$ в этот интервал:

$$p_i=\Phi\left(\frac{x_{i+1}-\overline{x}_в}{\sigma_в}\right)-\Phi\left(\frac{x_i-\overline{x}_в}{\sigma_в}\right),\ i=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1.$$

Для первого и последнего интервалов

$$p_1=\Phi\left(\frac{x_2-\overline{x}_в}{\sigma_в}\right)-\Phi(-\infty),$$

$$p_m=\Phi(+\infty)-\Phi\left(\frac{x_m-\overline{x}_в}{\sigma_в}\right).$$

3) Теоретические частоты n_i' находят по формуле $n_i'=n\cdot p_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Замечание. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определённое значение, равна нулю. Поэтому справедливы равенства

$$p_i=P\,(x_i<\mathrm{X}<x_{i+1})=P\,(x_i\le \mathrm{X}<x_{i+1})=P\,(x_i<\mathrm{X}\le x_{i+1})=P\,(x_i\le \mathrm{X}\le x_{i+1}).$$

Критерий «хи-квадрат»

В качестве меры расхождения эмпирического и теоретического распределения рассмотрим критерий χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Подставляя n_i и n_i', находим наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл}$. По таблице (приложение 4) в зависимости от заданного «уровня значимости» α и так называемого числа степеней свободы k определяют критическое значение критерия Пирсона $\chi^2_{кр}$. Число степеней свободы находят по формуле

$$k = m - r - 1,$$

где m – число интервалов (после объединения крайних, если таковое имело место), r – количество оцениваемых по выборке параметров распределения X. В нормальном законе этих параметров два: $\overline{x}_в$ и $D_в$, то есть r=2; таким образом, для нормального распределения $k = m - 3$.

В качестве уровня значимости α выбирают малое число (обычно полагают α = 0,001; 0,025; 0,05) такое, что событие, вероятность которого равна α, считается практически невозможным. Уровень значимости α – это вероятность совершить ошибку, отвергнув проверяемую гипотезу, когда она на самом деле верна.

Если окажется, что $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то выбранная гипотеза о нормальном законе распределения отвергается. Если же $\chi^2_{набл} \le \chi^2_{кр}$, то отвергнуть эту гипотезу на данном уровне значимости α нет оснований.

Замечание. Критерий χ^2 применим также для проверки гипотезы о других видах законов распределения (показательном, равномерном, биномиальном и т. д.). Для каждого из этих законов теоретические частоты n_i' и число степеней свободы k вычисляются по-своему; при этом остальные рассуждения сохраняются.

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 2
«Математическая статистика»

Задание

Данные наблюдений сведены в упорядоченные группы и представлены в виде интервального статистического ряда. Первая строка таблицы – интервалы наблюдавшихся значений случайной величины X, вторая – соответствующие им частоты. Требуется:

1. Построить гистограмму относительных частот;

2. Вычислить числовые характеристики выборки: выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение;

3. Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону, записать плотность вероятности случайной величины X и построить её график на одном чертеже с гистограммой относительных частот (график выравнивающей кривой);

4. Найти теоретические частоты нормального распределения. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить по критерию согласия Пирсона («хи-квадрат») гипотезу о нормальном законе распределения;

5. Найти интервальную оценку параметра a (математического ожидания) нормального распределения. Доверительную вероятность (надёжность) принять равной 0,95.

1.

Интервалы	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
Частоты	3	9	19	50	11	6	2

2.

Интервалы	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15]
Частоты	5	15	23	27	20	6	4

3.

Интервалы	[2; 6)	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30]
Частоты	7	13	20	30	13	10	7

4.

Интервалы	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)	[21; 25)	[25; 29)	[29; 33]
Частоты	6	7	10	40	20	12	5

5.

Интервалы	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)	[30; 36)	[36; 42]
Частоты	5	9	25	24	22	10	5

6.

Интервалы	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11]
Частоты	7	10	15	40	16	7	5

7.

Интервалы	[3; 7)	[7; 11)	[11; 15)	[15; 19)	[19; 23)	[23; 27)	[27; 31]
Частоты	2	3	20	40	30	3	2

8.

Интервалы	[1; 5)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)	[21; 25)	[25; 29]
Частоты	7	15	20	25	15	12	6

9.

Интервалы	[0; 9)	[9; 18)	[18; 27)	[27; 36)	[36; 45)	[45; 54)	[54; 63]
Частоты	4	5	25	30	25	6	5

10.

Интервалы	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24]
Частоты	4	8	20	25	24	15	4

11.

Интервалы	[2; 6)	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 34]
Частоты	5	10	18	30	20	12	4	1

12.

Интервалы	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18]
Частоты	1	6	12	18	25	20	12	6

13.

Интервалы	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)	[15; 17)	[17; 19)	[19; 21]
Частоты	3	9	15	27	22	12	7	5

14.

Интервалы	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24]
Частоты	3	6	13	20	35	15	5	3

15.

Интервалы	[2; 6)	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 34]
Частоты	2	6	12	18	28	19	10	5

16.

Интервалы	[2; 8)	[8; 14)	[14; 20)	[20; 26)	[26; 32)	[32; 38)	[38; 44)	[44; 50]
Частоты	2	5	15	30	20	14	9	5

17.

Интервалы	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22]
Частоты	3	4	12	20	23	21	11	6

18.

Интервалы	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 34)	[34; 38]
Частоты	5	12	21	28	15	10	6	3

19.

Интервалы	[2; 8)	[8; 14)	[14; 20)	[20; 26)	[26; 32)	[32; 38)	[38; 44)	[44; 50]
Частоты	3	4	6	10	30	25	15	7

20.

Интервалы	[2; 12)	[12; 22)	[22; 32)	[32; 42)	[42; 52)	[52; 62)	[62; 72)	[72; 82]
Частоты	5	8	16	25	28	11	5	2

21.

Интервалы	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40]
Частоты	3	5	12	20	30	18	9	3

22.

Интервалы	[15; 22)	[22; 29)	[29; 36)	[36; 43)	[43; 50)	[50; 57)	[57; 64]
Частоты	4	14	22	30	15	8	7

23.

Интервалы	[2; 12)	[12; 22)	[22; 32)	[32; 42)	[42; 52)	[52; 62)	[62; 72]
Частоты	5	16	20	30	17	8	4

24.

Интервалы	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)	[30; 36)	[36; 42)	[42; 48]
Частоты	7	16	21	26	15	12	3

25.

Интервалы	[0; 7)	[7; 14)	[14; 21)	[21; 28)	[28; 35)	[35; 42)	[42; 49]
Частоты	5	9	14	60	7	3	2

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Типовое задание

Данные наблюдений сведены в упорядоченные группы и представлены в виде интервального статистического ряда. Первая строка таблицы – интервалы наблюдавшихся значений случайной величины X, вторая – соответствующие им частоты. Требуется:

1. Построить гистограмму относительных частот;
2. Вычислить числовые характеристики выборки: выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение;
3. Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону, записать плотность вероятности случайной величины X и построить её график на одном чертеже с гистограммой относительных частот (график выравнивающей кривой);
4. Найти теоретические частоты нормального распределения. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить по критерию согласия Пирсона («хи-квадрат») гипотезу о нормальном законе распределения;
5. Найти интервальную оценку параметра a (математического ожидания) нормального распределения. Доверительную вероятность принять равной 0,95.

Интервалы	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 34)	[34; 38]
Частоты	4	15	38	58	50	26	8	1

Решение

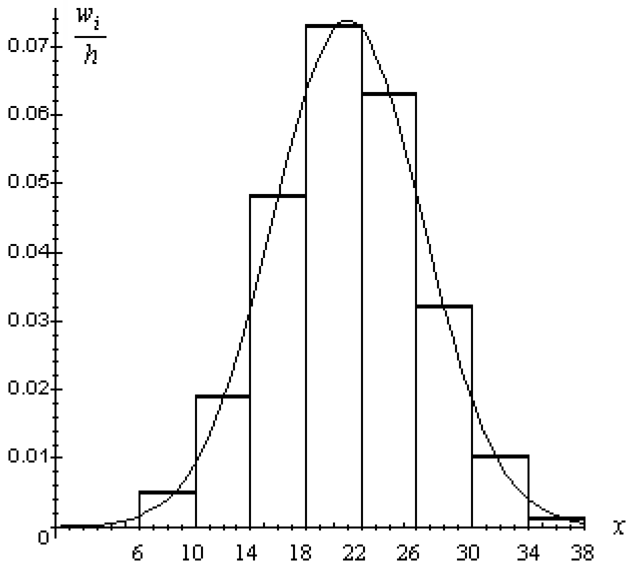
1. Объём выборки, по которой построен статистический ряд, получают суммированием частот из второй строки таблицы:

$$n = 4 + 15 + 38 + 58 + 50 + 26 + 8 + 1 = 200.$$

Относительные частоты вычисляем по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$, $i = 1,2,\ldots,8$. Внесем полученные данные в таблицу (третья строка таблицы).

Интервалы	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 34)	[34; 38]
Частоты n_i	4	15	38	58	50	26	8	1
Относ.част. w_i	0,02	0,075	0,19	0,29	0,25	0,13	0,04	0,005
Середины x_i*	8	12	16	20	24	28	32	36

Сумма относительных частот должна равняться единице. Для построения гистограммы надо над каждым интервалом статистического ряда построить прямоугольник, площадь которого равна соответствующей относительной частоте. Высоты этих прямоугольников определяем по формуле $\dfrac{w_i}{h}$, где $h=4$ – длина интервала в статистической таблице. С точностью до третьего знака после запятой получаем: $\dfrac{w_1}{h} = 0{,}005$, $\dfrac{w_2}{h} = 0{,}019$, $\dfrac{w_3}{h} = 0{,}048$, $\dfrac{w_4}{h} = 0{,}073$, $\dfrac{w_5}{h} = 0{,}063$, $\dfrac{w_6}{h} = 0{,}032$, $\dfrac{w_7}{h} = 0{,}01$, $\dfrac{w_8}{h} = 0{,}001$.



Гистограмма относительных частот

и выравнивающая кривая

2. Стандартными точечными оценками *математического ожидания* M (X) и *дисперсии* D (X) изучаемой с. в. X, являются *выборочное среднее* и *выборочная дисперсия*. При вычислении этих оценок по выборке, заданной

интервальным статистическим рядом, предполагают, что все наблюдаемые значения выборки, попавшие в *i-й* интервал, совпадают с его серединой x_i^* (четвертая строка таблицы).

В итоге получаем *выборочное среднее*

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^* n_i}{200} = \frac{8 \cdot 4 + 12 \cdot 15 + 16 \cdot 38 + 20 \cdot 58 + 24 \cdot 50 + 28 \cdot 26 + 32 \cdot 8 + 36 \cdot 1}{200} = 21.$$

Выборочная дисперсия

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i^*)^2 n_i}{200} - (\overline{x_в})^2 =$$

$$= \frac{8^2 \cdot 4 + 12^2 \cdot 15 + 16^2 \cdot 38 + 20^2 \cdot 58 + 24^2 \cdot 50 + 28^2 \cdot 26 + 32^2 \cdot 8 + 36^2 \cdot 1}{200} - 21^2 \approx 29.$$

Исправленная выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{200}{199} \cdot 29 \approx 29{,}1.$$

Параметрами нормальной случайной величины являются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Оценки для них – это *выборочное среднее* $\overline{x_в} = 21$ и *выборочное среднее квадратическое отклонение* $\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{29} \approx 5{,}4.$

3. Таким образом, если исследуемая с.в. X распределена по нормальному закону, то это закон с параметрами $a = 21$ и $\sigma = 5{,}4$.

В этом случае плотность вероятности X имеет вид $f(x) = \frac{1}{5{,}4 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-21)^2}{2 \cdot 5{,}4^2}}$. Для построения графика плотности найдем значения $f(x)$ в точках x_i^*, $i = 1, 2, ..., 8$ и $x = 21$ (точка максимума $f(x)$). При вычислении воспользуемся таблицей значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (приложение 1). Известно, что

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(u), \text{ где } u = \frac{x-a}{\sigma}.$$

В итоге получаем $\dfrac{x_1^* - a}{\sigma} = -\dfrac{13}{5{,}4} \approx -2{,}67$; $f(x_1^*) = \dfrac{\varphi(2{,}41)}{5{,}4} = \dfrac{0{,}0220}{5{,}4} = 0{,}004$ (воспользовались чётностью функции $\varphi(x)$ $(\varphi(x) = \varphi(-x))$. Аналогично находим остальные значения:

$$\frac{x_2^* - a}{\sigma} = -1{,}67; \quad f(x_2^*) = \frac{0{,}0989}{5{,}4} = 0{,}018;$$

$$\frac{x_3^* - a}{\sigma} = -0{,}93; \quad f(x_3^*) = \frac{0{,}2589}{5{,}4} = 0{,}048;$$

$$\frac{x_4^* - a}{\sigma} = -0{,}19; \quad f(x_4^*) = \frac{0{,}3918}{5{,}4} = 0{,}073;$$

$$\frac{x_5^* - a}{\sigma} = 0{,}56; \quad f(x_5^*) = \frac{0{,}3411}{5{,}4} = 0{,}063;$$

$$\frac{x_6^* - a}{\sigma} = 1{,}30; \quad f(x_6^*) = \frac{0{,}1714}{5{,}4} = 0{,}032;$$

$$\frac{x_7^* - a}{\sigma} = 2{,}04; \quad f(x_7^*) = \frac{0{,}0498}{5{,}4} = 0{,}009;$$

$$\frac{x_8^* - a}{\sigma} = 2{,}78; \quad f(x_8^*) = \frac{0{,}0084}{5{,}4} = 0{,}002;$$

$$f(21) = \frac{0{,}3989}{5{,}4} = 0{,}074.$$

Все вычисления проведены с точностью до третьего знака после запятой. Нанесём полученные точки на чертёж с гистограммой и соединим их гладкой кривой. Получили график плотности вероятности случайной величины X (*график выравнивающей кривой*). Видно, что график выравнивающей кривой хорошо согласуется с гистограммой, что подтверждает предположение о нормальном законе распределения X (см. рисунок выше).

4. Проверим гипотезу о нормальном распределении X по критерию Пирсона. Вернемся к таблице из пункта 1 решения. Частоты (эмпирические) в крайних интервалах таблицы меньше 5, поэтому крайние интервалы надо объединить с соседними. Получим ряд распределения:

$[x_i, x_{i+1})$	[6; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 38]
n_i	19	38	58	50	26	9

Всего осталось m=6 интервалов. Для каждого интервала найдем *теоретические частоты* n_i' (сколько наблюдений должно было бы попасть в i-*й* интервал, если верно, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a = 21 и σ = 5,4).

Сначала вычисляем вероятности p_i попадания случайной величины X на интервалы $[x_i; x_{i+1})$:

$$p_i = p(x_i \le X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - 21}{5,4}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - 21}{5,4}\right),\ i = 2, ..., 5,$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (её значения представлены в приложении 2):

$$p_2 = \Phi\left(\frac{18-21}{5,4}\right) - \Phi\left(\frac{14-21}{5,4}\right) = \Phi(-0,56) - \Phi(-1,30) = -0,2123 + 0,4032 = 0,1909,$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{22-21}{5,4}\right) - \Phi\left(\frac{18-21}{5,4}\right) = \Phi(0,19) - \Phi(-0,56) = 0,0754 + 0,2123 = 0,2877,$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{26-21}{5,4}\right) - \Phi\left(\frac{22-21}{5,4}\right) = \Phi(0,93) - \Phi(0,19) = 0,3238 - 0,0754 = 0,2484,$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{30-21}{5,4}\right) - \Phi\left(\frac{26-21}{5,4}\right) = \Phi(1,67) - \Phi(0,93) = 0,4525 - 0,3238 = 0,1287.$$

Для первого и последнего интервалов вероятности вычисляют иначе:

$$p_1 = p(-\infty < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-21}{5,4}\right) - \Phi(-\infty) = 0,5 - \Phi(1,30) = 0,5 - 0,4032 = 0,0968,$$

$$p_6 = p(30 \le X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{30-21}{5,4}\right) = 0,5 - \Phi(1,67) = 0,5 - 0,4525 = 0,0475.$$

Далее находим теоретические частоты по формуле $n_i' = 200 \cdot p_i$. Полученные результаты сводим в таблицу:

$[x_i, x_{i+1})$	$(-\infty; 14)$	$[14; 18)$	$[18; 22)$	$[22; 26)$	$[26; 30)$	$[30; +\infty)$
n_i	19	38	58	50	26	9
n_i'	19,36	38,18	57,54	49,68	25,74	9,5

Применение критерия χ^2 включает следующие шаги.

Вычисляем *наблюдаемое значение величины* χ^2:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \left(\frac{0{,}36^2}{19{,}36} + \frac{0{,}18^2}{38{,}18} + \frac{0{,}46^2}{57{,}54} + \frac{0{,}32^2}{49{,}68} + \frac{0{,}26^2}{25{,}74} + \frac{0{,}5^2}{9{,}5} \right) \approx 0{,}042.$$

Находим *число степеней свободы* по формуле $k = m–3$, где m=6 – число интервалов в уточнённой таблице распределения.

Получаем k=6–3=3.

По заданному уровню значимости α=0,05 и k=3 находим в таблице (приложение 4) *критическое значение* $\chi^2_{крит} = 7{,}8$.

Сравниваем наблюдаемое и критическое значение величины χ^2. У нас $\chi^2_{набл}$ = = 0,042 < $\chi^2_{крит}$ = 7,8. Это означает, что гипотеза не противоречит опытным данным. Следовательно, нет основания отвергнуть проверяемую гипотезу, и *мы принимаем гипотезу о нормальном распределении случайной величины X*.

5. После пункта 4 мы принимаем гипотезу о том, что *случайная величина X распределена по нормальному закону*, параметры которого (a и σ) неизвестны.

В этом случае *доверительный интервал для математического ожидания* a имеет вид $\left(\bar{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$, где $\bar{x}_в$ – выборочное среднее, $s = \sqrt{s^2}$ – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, t_γ – критическая точка (приложение 3), найденная по *доверительной вероятности* γ=0,95 и *объёму выборки* n=200.

В нашем случае:

$$\bar{x}_в = 21; \quad s = \sqrt{29{,}1} \approx 5{,}4; \quad t_\gamma = 1{,}98; \qquad t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}98 \frac{5{,}4}{\sqrt{200}} \approx 0{,}76.$$

Следовательно, доверительный интервал для математического ожидания M(X) имеет вид (21–0,76; 21+0,76) = (20,24; 21,76). Это означает, что с *надёжностью* (*доверительной вероятностью*) γ=0,95 можно утверждать, что M(X) принадлежит интервалу (20,24; 21,76).

Замечание. Критическую точку t_γ=1,98 из приложения 3 мы взяли для n=120. Видно, что для больших n критические значения практически не изменяются (изменяются от 1,98 до 1,96).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2369	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	10060	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Продолжение приложения 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Для отрицательных значений x используется формула $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,21	0,0832	0,42	0,1628	0,63	0,2357
0,01	0,0040	0,22	0,0871	0,43	0,1664	0,64	0,2389
0,02	0,0080	0,23	0,0910	0,44	0,1700	0,65	0,2422
0,03	0,0120	0,24	0,0948	0,45	0,1736	0,66	0,2454
0,04	0,0160	0,25	0,0987	0,46	0,1772	0,67	0,2486
0,05	0,0199	0,26	0,1026	0,47	0,1808	0,68	0,2517
0,06	0,0239	0,27	0,1064	0,48	0,1844	0,69	0,2549
0,07	0,0279	0,28	0,1103	0,49	0,1879	0,70	0,2580
0,08	0,0319	0,29	0,1141	0,50	0,1915	0,71	0,2611
0,09	0,0359	0,30	0,1179	0,51	0,1950	0,72	0,2642
0,10	0,0398	0,31	0,1217	0,52	0,1985	0,73	0,2673
0,11	0,0438	0,32	0,1255	0,53	0,2019	0,74	0,2703
0,12	0,0478	0,33	0,1293	0,54	0,2054	0,75	0,2734
0,13	0,0517	0,34	0,1331	0,55	0,2088	0,76	0,2764
0,14	0,0557	0,35	0,1368	0,56	0,2123	0,77	0,2794
0,15	0,0596	0,36	0,1406	0,57	0,2157	0,78	0,2823
0,16	0,0636	0,37	0,1443	0,58	0,2190	0,79	0,2852
0,17	0,0675	0,38	0,1480	0,59	0,2224	0,80	0,2881
0,18	0,0714	0,39	0,1517	0,60	0,2257	0,81	0,2910
0,19	0,0753	0,40	0,1554	0,61	0,2291	0,82	0,2939
0,20	0,0793	0,41	0,1591	0,62	0,2324	0,83	0,2967

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,84	0,2995	1,28	0,3997	1,72	0,4573	2,32	0,4898
0,85	0,3023	1,29	0,4015	1,73	0,4582	2,34	0,4904
0,86	0,3051	1,30	0,4032	1,74	0,4591	2,36	0,4909
0,87	0,3078	1,31	0,4049	1,75	0,4599	2,38	0,4913
0,88	0,3106	1,32	0,4066	1,76	0,4608	2,40	0,4918
0,89	0,3133	1,33	0,4082	1,77	0,4616	2,42	0,4922
0,90	0,3159	1,34	0,4099	1,78	0,4625	2,44	0,4927
0,91	0,3186	1,35	0,4115	1,79	0,4633	2,46	0,4931
0,92	0,3212	1,36	0,4131	1,80	0,4641	2,48	0,4934
0,93	0,3238	1,37	0,4147	1,81	0,4649	2,50	0,4938
0,94	0,3264	1,38	0,4162	1,82	0,4656	2,52	0,4941
0,95	0,3289	1,39	0,4177	1,83	0,4664	2,54	0,4945
0,96	0,3315	1,40	0,4192	1,84	0,4671	2,56	0,4948
0,97	0,3340	1,41	0,4207	1,85	0,4678	2,58	0,4951
0,98	0,3365	1,42	0,4222	1,86	0,4686	2,60	0,4953
0,99	0,3389	1,43	0,4236	1,87	0,4693	2,62	0,4956
1,00	0,3413	1,44	0,4251	1,88	0,4699	2,64	0,4959
1,01	0,3438	1,45	0,4265	1,89	0,4706	2,66	0,4961
1,02	0,3461	1,46	0,4279	1,90	0,4713	2,68	0,4963
1,03	0,3485	1,47	0,4292	1,91	0,4719	2,70	0,4965
1,04	0,3508	1,48	0,4306	1,92	0,4726	2,72	0,4967
1,05	0,3531	1,49	0,4319	1,93	0,4732	2,74	0,4969
1,06	0,3554	1,50	0,4332	1,94	0,4738	2,76	0,4971
1,07	0,3577	1,51	0,4345	1,95	0,4744	2,78	0,4973
1,08	0,3599	1,52	0,4357	1,96	0,4750	2,80	0,4974
1,09	0,3621	1,53	0,4370	1,97	0,4756	2,82	0,4976
1,10	0,3643	1,54	0,4382	1,98	0,4761	2,84	0,4977
1,11	0,3665	1,55	0,4394	1,99	0,4767	2,86	0,4979
1,12	0,3686	1,56	0,4406	2,00	0,4772	2,88	0,4980
1,13	0,3708	1,57	0,4418	2,02	0,4783	2,90	0,4981
1,14	0,3729	1,58	0,4429	2,04	0,4793	2,92	0,4982
1,15	0,3749	1,59	0,4441	2,06	0,4803	2,94	0,4984
1,16	0,3770	1,60	0,4452	2,08	0,4812	2,96	0,4985
1,17	0,3790	1,61	0,4463	2,10	0,4821	2,98	0,4986
1,18	0,3810	1,62	0,4474	2,12	0,4830	3,00	0,49865
1,19	0,3830	1,63	0,4484	2,14	0,4838	3,20	0,49931
1,20	0,3849	1,64	0,4495	2,16	0,4846	3,40	0,49966
1,21	0,3869	1,65	0,4505	2,18	0,4854	3,60	0,499841
1,22	0,3883	1,66	0,4515	2,20	0,4861	3,80	0,499928
1,23	0,3907	1,67	0,4525	2,22	0,4868	4,00	0,499968
1,24	0,3925	1,68	0,4535	2,24	0,4875	4,50	0,499997
1,25	0,3944	1,69	0,4545	2,26	0,4881	5,00	0,499997
1,26	0,3962	1,70	0,4554	2,28	0,4887		
1,27	0,3980	1,71	0,4564	2,30	0,4893		

Для отрицательных значений x используется формула $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma,\ n)$

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α		
	0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8
2	9,2	7,4	6,0
3	11,3	9,4	7,8
4	13,3	11,1	9,5
5	15,1	12,8	11,1
6	16,8	14,4	12,6
7	18,5	16,0	14,1
8	20,1	17,5	15,5
9	21,7	19,0	16,9
10	23,2	20,5	18,3

СОДЕРЖАНИЕ