**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

О.Г. Илларионова, В.В. Солодов

МАТЕМАТИКА
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

ПОСОБИЕ
по изучению дисциплины и
выполнению контрольных домашних заданий

для студентов I курса
специальности 230100
дневного обучения

Москва - 2013

Содержание

Введение

В курсе «Алгебра и геометрии» студенты специальности 230100 дневного отделения изучают темы «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Комплексные числа» и «Алгебраические структуры» и должны выполнить самостоятельно два контрольных домашних задания (КДЗ).

В данном пособии содержатся краткие теоретические сведения и разобраны примеры, необходимые для выполнения КДЗ; также для каждого КДЗ приведены условия 24 вариантов, где первая цифра - это номер задачи, цифры после точки - это номер варианта.

Общие рекомендации студенту по работе над курсом математики

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1) изучение материала по лекциям;

2) изучение материала по учебнику и учебным пособиям (см. список литературы);

3) выполнение еженедельных домашних заданий;

4) выполнение контрольных домашних заданий (КДЗ).

Студент может обращаться к преподавателю для получения консультации, посещать имеющиеся факультативные занятия.

Указания к выполнению КДЗ

1. Каждое контрольное домашнее задание должно выполняться в отдельной тонкой тетради в клетку, чернилами чёрного или синего цвета. Необходимо оставлять поля для замечаний преподавателя.

2. На титульном листе тетради должны быть чётко написаны фамилия студента, его инициалы, название дисциплины, номер выполняемого варианта. Как правило, номер варианта задаётся преподавателем.

3. Решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, **обязательно записывая условие каждой задачи.**

4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

5. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».

6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради сделать работу над ошибками (если они есть) и сдать тетрадь снова на проверку преподавателю.

1. Основные сведения из теории и примеры решения задач по темам КДЗ № 1

1.1. Матрицы и определители.

Матрица размера $m \times n$-- это прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов.

Основные операции над матрицами - это умножение матрицы на число, сложение (вычитание) матриц и умножение матриц.

Произведением числа k на матрицу A называется матрица, элементы которой получены из элементов матрицы A умножением их на число k.

Суммой (разностью) матриц A и B одинаковой размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times ð$ называется матрица размера $m \times ð$, элемент которой, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Важное свойство: $A \cdot \hat{A} \neq \hat{A} \cdot À$.

Пример 1.Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы $4 \cdot A,\ A + B,\ A - B,\ A \cdot B,\ A \cdot C$.

Решение.

$$4 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3 \\ 4\cdot 0 & 4\cdot 1 & 4\cdot(-2) \\ 4\cdot(-3) & 4\cdot 0 & 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+(-2) \\ 0+1 & 1+4 & -2+0 \\ -3+1 & 0+5 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-(-2) \\ 0-1 & 1-4 & -2-0 \\ -3-1 & 0-5 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5 & 1\cdot(-2)+2\cdot0+3\cdot1\\ 0\cdot2+1\cdot1+(-2)\cdot1 & 0\cdot3+1\cdot4+(-2)\cdot5 & 0\cdot(-2)+1\cdot0+(-2)\cdot1\\ -3\cdot2+0\cdot1+4\cdot1 & (-3)\cdot3+0\cdot4+4\cdot5 & (-3)\cdot(-2)+0\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+2+3 & 3+8+15 & -2+0+3\\ 0+1-2 & 0+4-10 & 0+0-2\\ -6+0+4 & -9+0+20 & 6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&26&1\\-1&-6&-2\\-2&11&10\end{pmatrix},$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot(-1)+3\cdot7\\0\cdot3+1\cdot(-1)+(-2)\cdot7\\-3\cdot3+0\cdot(-1)+4\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2+21\\0-1-14\\-9+0+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\-15\\19\end{pmatrix}.$$

1.2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Пусть система линейных уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}\qquad(1)$$

имеет отличный от нуля определитель матрицы коэффициентов, т.е.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0.$$

Тогда система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

Определитель Δ можно вычислить, например, по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определители Δ_x, Δ_y, Δ_z вычисляются аналогичным образом.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-y=7 \end{cases}$ методом Крамера и проверить ответ графически.

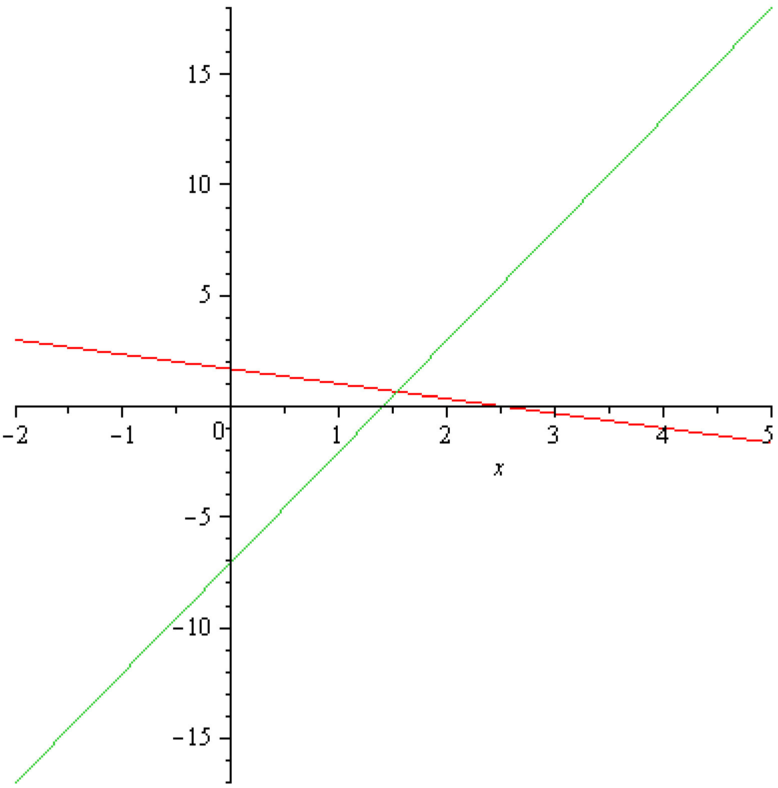
Решение. Определитель матрицы коэффициентов равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 5\cdot 3 = -17,$$

Определители Δ_x и Δ_y равны $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -26,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -11.$

Следовательно, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{26}{17}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{11}{17}$.

Проверим графически. Координаты точки пересечения прямых должны быть $x = 1\dfrac{9}{17} \approx 1{,}529;\ y = \dfrac{11}{17} \approx 0{,}647$.



Ответ согласуется с графиком.

Пример 3. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+5y+2z=1, \\ x+3y+4z=6, \\ 3x+2y-z=-1. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot3\cdot(-1)+5\cdot4\cdot3+2\cdot1\cdot2-2\cdot3\cdot3-2\cdot4\cdot2-5\cdot1\cdot(-1)=$$

$$=-6+60+4-18-16+5=29.$$

Определитель $\Delta=29\neq0$, следовательно, система имеет единственное решение. Аналогичным образом вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=29,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-29,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=58.$$

Находим решение системы по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{29}{29}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-29}{29}=-1,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{58}{29}=2.$$

Ответ: $x=1,\quad y=-1,\quad z=2.$

1.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Для решения системы уравнений (1) методом Гаусса, составляют расширенную матрицу коэффициентов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу коэффициентов системы уравнений приводят к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

Вместо знака $*$ будут какие-либо числа, получившиеся в результате элементарных преобразований матрицы.

Допустимые элементарные преобразования:

1) можно поменять любые две строки местами;

2) любую строку можно умножить (или разделить) на любое неравное нулю число;
3) к любой строке можно прибавить (или вычесть) любую строку, умноженную (или разделённую) на любое неравное нулю число.
По последней матрице составляют соответствующую ей систему уравнений
$$\begin{cases} x + & * \cdot y + & * \cdot z = & *, \\ & y + & * \cdot z = & *, \\ & & z = & * \end{cases}$$
и последовательно находят неизвестные z, y, x.

Пример 4. Решить систему уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$
Решение. Составляем расширенную матрицу коэффициентов
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$
Меняем местами первую и вторую строки.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$
Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на -2.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$
К третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на -3.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$
Умножаем вторую строку на -1.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$
К третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на 7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right).$$

Делим третью строку на 29.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

По последней матрице составляем соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x + \ 3y + \ 4z = \ 6, \\ \qquad y + \ 6z = 11, \\ \qquad\qquad z = \ 2. \end{cases}$$

Решая систему снизу вверх, находим, что $y = -1$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

1.4. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Это метод решения с помощью обратной матрицы. Перепишем систему уравнений в матричном виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1}- матрица, обратная к A. Обратная матрица существует для любой невырожденной квадратной матрицы, то есть для матрицы, определитель которой $|A| \neq 0$. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Пример 4. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Найдем матрицу A^{-1}.

Определитель матрицы A уже вычислен (см. пример 3) : $|A| = 29$.

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Получаем $A^{-1} = \dfrac{1}{29}\begin{pmatrix} -11 & 9 & 14 \\ 13 & -8 & -6 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 14 & 14 \\ 13 & -8 & -6 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+54-14 \\ 13-48+6 \\ -7+66-1 \end{pmatrix} \frac{1}{29} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 29 \\ -29 \\ 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Пример 5. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. Проще всего разложить определитель по первой строке по формуле:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \grave{a}_{13} \cdot \grave{A}_{13} + \grave{a}_{14} \cdot \grave{A}_{14}$$

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) + 0 + 0 - 3 \cdot 20 = -76 .$$

Ответ: $\Delta = -76$

Задачи КДЗ №1
для самостоятельного решения

Задача 1. Даны матрицы A, B, C. Вычислить:
$3A + B,\quad A\cdot B,\quad B\cdot A,\quad C\cdot B.$

1.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -14 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, $C==\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.8 $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&1&4\\1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&2&1\end{pmatrix}$.

1.9 $A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\3&2&-4\\-1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&1&-7\\2&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&4&6\\1&2&0\end{pmatrix}$.

1.10 $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\5&2&4\\-4&3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-7&1\\5&3&-1\\3&2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&10&11\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1.11 $A=\begin{pmatrix}1&-4&2\\2&3&1\\-4&7&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&-14\\1&2&3\\1&-4&7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&3&4\\2&1&2\end{pmatrix}$.

1.12 $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&4\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&3&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&-5\\1&1&2\end{pmatrix}$.

1.13 $A=\begin{pmatrix}2&1&5\\-4&3&-4\\1&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\-4&-2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&4&9\\1&0&1\end{pmatrix}$.

1.14 $A=\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&3&1\\-7&-4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&1&3\\4&-7&-4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1.15 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&2\\-4&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\1&3&-4\\0&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&6&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

1.16 $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1.17 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 4 & 3 & 7\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

1.18 $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.19 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 3 & 2 & -4\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -7\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

1.20 $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 5 & 2 & 4\\ -4 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 10 & 11\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1.21 $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ -5 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

1.22 $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 2\\ -1 & 3 & 5\\ 1 & =3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 10\\ 8 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1.23 $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1.24 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -3 & 1 & 6\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

Задача 2. Вычислить определители 4-го порядка

2.1 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.9 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2.17 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

2.10 $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2.18 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2.3 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.11 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.19 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.4 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.12 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.20 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.5 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2.13 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.21 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.6 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.14 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.22 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2.7 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **2.15** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.23** $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.8 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **2.16** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.24** $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Задача 3. Решить систему при помощи правила Крамера и проверить ответ графически.

3.1 $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-4y=-2 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 4x-2y=7 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 3x-5y=2 \\ x+4y=10 \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ -x+2y=4 \end{cases}$

3.5 $\begin{cases} -3x+2y=9 \\ y+4x=-2 \end{cases}$

3.6 $\begin{cases} -2x+3y=6 \\ 4x-9y=-2 \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} -3x+2y=9 \\ y+4x=-2 \end{cases}$

3.8 $\begin{cases} 4x-5y=3 \\ x+3y=8 \end{cases}$

3.9 $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 4x+y=6 \end{cases}$

3.13 $\begin{cases} 5x-2y=12 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

3.14 $\begin{cases} 5x-y=-3 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$

3.15 $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 4x+y=6 \end{cases}$

3.16 $\begin{cases} -3x+2y=9 \\ y+4x=-2 \end{cases}$

3.17 $\begin{cases} -3x+2y=9 \\ y+4x=-2 \end{cases}$

3.18 $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-4y=-2 \end{cases}$

3.19 $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ -x+2y=4 \end{cases}$

3.20 $\begin{cases} 6x+2y=-5 \\ 4x-2y=7 \end{cases}$

3.21 $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 3x+3y=5 \end{cases}$

3.10 $\begin{cases} -2x+5y=4 \\ 4x+3y=5 \end{cases}$

3.11 $\begin{cases} -x-2y=3 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$

3.12 $\begin{cases} 2x+5y=10 \\ 3x+4y=15 \end{cases}$

3.22 $\begin{cases} 5x-2y=5 \\ 3x+3y=4 \end{cases}$

3.23 $\begin{cases} 5x-3y=14 \\ 4x+2y=9 \end{cases}$

3.24 $\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

Задача 4. Решить систему линейных уравнений тремя способами : 1) методом Крамера, 2) методом Гаусса, 3) при помощи обратной матрицы (матричным методом).

4.1 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \\ 5x+8y-z=7 \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$

4.4 $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+3y-z=1 \\ 4x-3z=1 \end{cases}$

4.6 $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$

4.13 $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-y-3z=-4 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$

4.14 $\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}$

4.15 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \\ 4x+y-3z=3 \end{cases}$

4.16 $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-y-3z=-4 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$

4.17 $\begin{cases} 2x+y+3z=11 \\ 3x+2y+z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

4.18 $\begin{cases} x+2y-4z=-1 \\ 2x+y+2z=5 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

4.7 $\begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x+3y+2z=-2 \\ 2x+3z=2 \end{cases}$

4.8 $\begin{cases} -2x+4y-z=-4 \\ x-3y+2z=6 \\ 4x+3y=1 \end{cases}$

4.9 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+3z=9 \\ 5x+8y-z=7 \end{cases}$

4.10 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+2y+z=5 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$

4.11 $\begin{cases} x+2y-4z=-1 \\ 2x+y+2z=5 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

4.12 $\begin{cases} 5x+-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$

4.19 $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-y-3z=-4 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$

4.20 $\begin{cases} 7x-5y=31 \\ 4x+11z=-43 \\ 2x+3y+4z=-20 \end{cases}$

4.21 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \\ 4x+y-3z=3 \end{cases}$

4.22 $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=20 \\ 3x-y+z=9 \end{cases}$

4.23 $\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \\ 3x-5y-6z=-9 \end{cases}$

4.24 $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$

2. Основные сведения из теории и примеры решения задач по темам КДЗ №1

2.1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Для точек A и B с координатами $A(A_x;A_y;A_z)$, $B(B_x;B_y;B_z)$ координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле

$$\overrightarrow{AB}=\{B_x-A_x;B_y-A_y;B_z-A_z\}.$$

Рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ è $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}.$

Длина вектора $\vec{a}$ обозначается через $|\vec{a}|$ и вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле

$$(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $[\vec{a},\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$ и вычисляется по формуле

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ —единичные векторы, направленные по осям Ox, Oy, Oz соответственно.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{n}$ обозначается через $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{n}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{n}$ и вычисляется по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{n}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ \tilde{n}_x & \tilde{n}_y & \tilde{n}_z\end{vmatrix}.$

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ и вычисляется по формуле

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, численно равна модулю векторного произведения этих векторов, а площадь треугольника равна половине площади параллелограмма.

Объем параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{n}$, численно равен модулю смешанного произведения этих векторов, а объем треугольной пирамиды (тетраэдра) равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда.

Канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B с координатами $A(A_x;A_y;A_z)$, $B(B_x;B_y;B_z)$, записываются в виде

$$\frac{x-A_x}{a_x}=\frac{y-A_y}{a_y}=\frac{z-A_z}{a_z},$$

где вектор $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}=\overrightarrow{AB}$ - направляющий вектор прямой AB.

Уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C, записывается в виде

$$\tilde{A}x+\tilde{B}y+\tilde{C}z+\tilde{D}=0,$$

где числа $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ —координаты вектора $\vec{c}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$, а число $\tilde{D}$ находится подстановкой координат точки A в уравнение плоскости. Вектор $\vec{c}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ называется нормальным вектором плоскости.

Пример 1. Даны координаты точек $A(3;-5;4)$, $B(2;-1;1)$, $C(-4;3;6)$. Найти:

1) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

2) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

4) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

5) канонические уравнения прямой AB;

6) уравнение плоскости ABC.

Решение. 1) Сначала находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=\{2-3;-1-(-5);1-4\}=\{-1;4;-3\}.$$

Теперь находим длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{1+16+9}=\sqrt{26}.$$

2) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC}=\{-4-3;3-(-5);6-4\}=\{-7;8;2\}.$$

Вычисляем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}=\{-1;4;-3\},\{-7;8;2\}=-1\cdot(-7)+4\cdot 8+(-3)\cdot 2=33.$$

3) Вычисляем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 4 & -3\\ -7 & 8 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot 4\cdot 2+\vec{j}\cdot(-3)\cdot(-7)+\vec{k}\cdot(-1)\cdot 8-\vec{k}\cdot 4\cdot(-7)-\vec{j}\cdot(-1)\cdot 2-\vec{i}\cdot(-3)\cdot 8=$$

$$=8\vec{i}+21\vec{j}-8\vec{k}+28\vec{k}+2\vec{j}+24\vec{i}=32\vec{i}+23\vec{j}+20\vec{k}=\{32;23;20\}.$$

4) Для нахождения косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ вычислим длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+8^2+2^2}=\sqrt{49+64+4}=\sqrt{117}.$$

Теперь находим требуемый косинус.

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{33}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{117}}=$$

$$=\frac{33}{\sqrt{2\cdot13}\cdot\sqrt{9\cdot13}}=\frac{3\cdot11}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot3\cdot\sqrt{13}}=\frac{11}{13\sqrt{2}}.$$

5) В первом пункте был найден направляющий вектор прямой AB. Записываем канонические уравнения прямой.

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-4}{-3}.$$

6) В третьем пункте был найден нормальный вектор плоскости ABC. Уравнение плоскости запишется в виде $32x+23y+20z+\tilde{D}=0$. Плоскость проходит через точку A. Для нахождения числа $\tilde{D}$ подставим координаты точки A в найденное уранение плоскости.

$$32\cdot3+23\cdot(-5)+20\cdot4+\tilde{D}=0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{D}=-61.$$

Окончательно получаем искомое уравнение: $32x+23y+20z-61=0$.

Пример 2. Найти длину вектора $\overline{p}+2\overline{q}$, если $\overline{p}=\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{q}=\overline{a}+2\overline{b}$, $|\overline{a}|=1$; $|\overline{b}|=3$; $\overline{a}\wedge\overline{b}=\frac{2}{3}\pi$.

Решение. Как известно, модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора $|\overline{p}+2\overline{q}|=\sqrt{(\overline{p}+2\overline{q})^2}$. Находим скалярный квадрат $(\overline{p}+2\overline{q})^2=\left(\overline{a}-\overline{b}+2\overline{a}+4\overline{b}\right)^2=\left(3\overline{a}+3\overline{b}\right)^2=9(\overline{a}^2+2\overline{a}\overline{b}+\overline{b}^2$ $)=9\left(1+2*3*cos\frac{2}{3}\pi+9\right)=63.$ Отсюда $|\overline{p}+2\overline{q}|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$

Ответ: $3\sqrt{7}$

Пример 3. Найти вектор $\overline{\mathrm{x}}$, коллинеарный вектору $\overline{a}=\{2,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию $(\overline{x}\cdot\overline{a})=27$.

Решение. В силу коллинеарности вектор $\overline{\mathrm{x}}$ можно представить в виде $\overline{\mathrm{x}}=\lambda\overline{\mathrm{a}}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия $(\overline{x}\cdot\overline{a})=\lambda\overline{a}^2=\lambda(4+1+4)=9\lambda=27.$ Отсюда $\lambda=3$ и $\overline{x}=3\overline{a}=\{6,3,-6\}$.

Ответ: $\overline{x}=\{6,3,-6\}$.

Пример 4. Вычислить угол (косинус угла) между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=2\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ и $\overline{q}=\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$, где $\overline{a};\overline{b};\overline{c}-$ единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Решение. Известно, что диагонали параллелограмма можно найти

$$\overline{d}1 = \overline{p} + \overline{q} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 0\overline{c}$$

$$\overline{d}2 = \overline{p} - \overline{q} = \overline{a} + 4\overline{b} - 2\overline{c}$$

т.к. векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ представляют собой единичные взаимно перпендикулярные вектора, то их можно считать координатным базисом, тогда для нахождения требуемого угла воспользуемся формулой

$$cos(\overline{d}_1 \wedge \overline{d}_2) = \frac{\overline{d}1 * \overline{d}2}{|\overline{d}1| * |\overline{d}2|} = \frac{3*1+(-2)*4+0*(-2)}{\sqrt{3^2+1^2}*\sqrt{1^2+4^2+2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{13}*\sqrt{21}} = \frac{-5}{\sqrt{273}}$$

Ответ: $\frac{-5}{\sqrt{273}}$

Пример 5. Определить, лежат ли точки A(1, 2, 3); B(0, 5, 5); C(3, -1, -1); D(-2, 14, 9) в одной плоскости.

Решение. Рассмотрим три вектора $\overline{AB} = \{-1, 3, 2\}$, $\overline{AC} = \{2, -3, -4\}$ и $\overline{AD} = \{-3, 12, 6\}$. Если точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны. Для проверки составляем смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 43 - 18 - 36 - 48 = 0,$$

следовательно, векторы компланарны и точки лежат в одной плоскости.

Ответ: точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости.

Пример 6. Найти длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если D(1, 6, 3), A(4, 5, 2), B(-1, 11, 6) и C(2, -1, 3).

Решение. Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение этой плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 5 & z - 2 \\ -1 - 4 & 11 - 5 & -6 - 2 \\ 2 - 4 & -1 - 5 & 3 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 4 & y - 5 & z - 2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y-5) \cdot \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-42(x-4) + 21(y-5) + 42(z-2) = 0 \Rightarrow 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

Находим теперь расстояние от точки *D* до плоскости *ABC*:

$$h = \frac{|2*1-1*6-2*3+1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: h = 3

2.2. Комплексные числа и действия над ними

Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y — действительные числа, i — так называемая мнимая единица, определяемая равенством

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1,$$

x называется действительной частью, y мнимой частью числа z. Их обозначают так:

$$x = Re\, z, \quad y = Im\, z.$$

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то получается действительное число $x + i0 = x.$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части соответственно, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ è } y_1 = y_2.$$

Над комплексными числами можно производить различные арифметические и алгебраические действия, а также действие сопряжения, которое изменяет знак мнимой части.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу

$$z = x + iy.$$

Отметим, что $\bar{\bar{z}} = z.$

Сложение, вычитание, умножение и деление удобно производить над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2.$

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Формулы в определениях 6 и 7 запоминать нет необходимости, так как умножение комплексных чисел производится по правилу умножения двучленов с учетом равенства $i^2 = -1$; а деление — путем домножения числителя и знаменателя на $\overline{z_2}$ и дальнейших преобразований.

Пример 7. Дано $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 4 + 5i$. Вычислить

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2},$$

указать действительные и мнимые части $z_1 - z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. Выполним действия:

$$z_1 + z_2 = (-2+4) + i(3+5) = 2 + 8i,$$
$$z_1 - z_2 = (-2-4) + i(3-5) = -6 - 2i,$$
$$z_1 z_2 = (-2+3i)(4+5i) = -8 + 12i - 10i - 15 = -23 + 2i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{4+5i} = \frac{(-2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{7+22i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{22}{41}.$$

Укажем действительные и мнимые части:

$$Re(z_1 - z_2) = -6, \qquad Re\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{41}, \qquad Im(z_1 - z_2) = -2, \qquad Im\frac{z_1}{z_2} = \frac{22}{41}.$$

Пример 8. Доказать равенство $z + \overline{z} = 2Rez$.

Доказательство. Пусть $z = x + iy$, тогда $Rez = x, \quad \overline{z} = x - iy.$

Поэтому

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2Rez.$$

Равенство доказано.

Комплексная плоскость.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $Î\,(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, будем называть *комплексной плоскостью*.

Геометрически сложение и вычитание чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения и вычитания векторов. Отсюда следует, что модуль $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2, а уравнение $|z - z_0| = R$ задает окружность радиуса R с центром в точке z_0.

Пример 9. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:

1) $|Imz|<1, 0<Rez<1;$

2) $|z-1-2i|\le 2;$

3) $1<|z+2+i|<3;$

4) $|z-i|>1.$

Ответ: 1) прямоугольник с вершинами в точках i, $1+i$, $1-i$, $-i$ (стороны не включаются);
2) круг радиусом 2 с центром в точке $z=1+2i$ (окружность включается);
3) кольцо между окружностями радиусов 1 и 3 с общим центром в точке $z=-2-i$ (окружности не включаются);
4) вся плоскость, из которой удален круг радиуса 1 с центром в точке $z=i$ вместе с его окружностью.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Модулем комплексного числа $z=x+iy$ называется длина вектора z и обозначается $|z|$. Модуль комплексного числа вычисляется по формуле и является действительным неотрицательным числом, т.е. $|z|\ge 0$. Равенство $|z|=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$ одновременно.

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором z называется *аргументом* z и обозначается $\grave{A}\mathrm{rg}\, z$. Он определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\le\pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается $\arg z$:

$$\grave{A}\mathrm{rg}\, z=\arg z+2\pi k, k\in Z.$$

Для $z=0$ понятие аргумента не определено.
Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\varphi=\arg z=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{åñëè} \quad x>0,\\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{åñëè} \quad x<0, y\ge 0,\\ arctg\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{åñëè} \quad x<0, y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{åñëè} \quad x=0, y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{åñëè} \quad x=0, y<0. \end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Пример 5. Записать число $z=-8-i8\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. Вычисляем модуль и аргумент числа z.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16.$

Так как $x=-8<$, $0y=-\sqrt{\ }<$, то

$\varphi=arctg\dfrac{y}{x}-\pi=arctg\sqrt{3}-\pi=-\dfrac{2}{3}\pi.$

Поэтому $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi)+i\sin(-\dfrac{2}{3}\pi)).$

Комплексные числа, представленные в тригонометрической форме, удобно умножать, делить, возводить в степень и извлекать из них корни. Хотя умножение и деление несложно сделать и для чисел в алгебраической форме , а также несложно вычислить

$$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$$

или

$$(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=1-3i+3(-1)-i^2\cdot i=1-3i-3+i=-2-2i,$$

но вычислить в алгебраической форме, например, $(2+2\sqrt{3}i)^{30}$ крайне затруднительно.

Пусть теперь даны два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\quad,\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z=z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

т.е. при умножении двух чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Аналогично получаем

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

то есть при делении двух чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Замечание. Если $\varphi_1+\varphi_2$ или $\varphi_1-\varphi_2$ получаются по модулю больше π, то мы считаем их равными $Arg\,z$.

В тригонометрической форме операции умножения и деления приобретают наглядный геометрический смысл — это растяжение (сжатие) векторов и их поворот вокруг начала координат на плоскости XOY.

Из правила умножения следует формула возведения в степень

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Эта формула называется *формулой Муавра*.

Операция извлечения корня степени n из комплексного числа определяется как обратная к операции возведения в степень, а именно, комплексное число z называется *корнем степени* n из числа w и обозначается $\sqrt[n]{w} = z$, если $z^n = w$. Корень n-й степени из числа $w (w \neq 0)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

где через $\sqrt[n]{|w|}$ обозначено арифметическое значение корня из положительного числа.

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$.

Решение.

Воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа $-8 - i8\sqrt{3}$, найденной в примере 5, и вычислим

$$\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)\right)} =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right)\right) (k = 0, 1, 2, 3).$$

Положим последовательно $k = 0, 1, 2, 3$. Будем иметь:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Показательная форма комплексного числа

Определим $e^{i\varphi}$, где $i=\sqrt{-1}, \varphi \in R$ следующей формулой

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* Тогда любое комплексное число z можно представить в так называемой *показательной форме*

$$z=r\cdot e^{i\varphi},$$

где r - модуль комплексного числа z, а φ - аргумент комплексного числа z.

При умножении и делении показательных функций действуют известные еще со школы правила:

$$e^a\cdot e^b=e^{a+b}, \qquad \frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}.$$

Поэтому для комплексных чисел $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ умножение и деление выполняются следующим образом:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad \text{(в последнем случае } r_2\neq 0\text{)} .$$

Пример 7. Представить число $z=(1-i)^3$ в показательной форме.

Решение. Вычислим модуль и аргумент числа $z=1-i$:

$$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}; \quad \arg z=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

В показательной форме $z=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, ñëåäîâàòåëüíî, $z^3=2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

Ответ: $z^3=2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

2.3. Алгебраические структуры: группы, кольца и поля

Начнем с формальных определений. Пусть дано произвольное множество X. *Бинарной операцией* на X называется отображение $*: X\times X\to X$ такое, что любой упорядоченной паре $(a,b)\in X\times X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $a*b\in X$.

Примерами бинарных операций являются операции сложения и умножения в числовых множествах, операции $\cap$ и $\cup$ в множестве подмножеств данного множества, и т.д.

Замечание. Иногда говорят, что множество X *замкнуто относительно операции* $*$, если ее применение не выводит за его пределы. В нашем определении это получается само собой, но термин полезный, и при решении задач пригодится.

Бинарная операция $*$ называется *ассоциативной*, если $(a*b)*c=a*(b*c)$ и *коммутативной*, если $b*a=a*b$ при всех a,b и c, принадлежащих X.

Элемент $e\in X$ называется *единичным* (нейтральным) относительно бинарной операции $*$, если $e*x=x*e=x$ при всех $x\in X$.

В ассоциативной алгебраической структуре существует не более одного единичного элемента.

Группой называется множество G с заданной на нем бинарной операцией $*$, которая:

1) ассоциативна,
2) имеет единичный элемент e,
3) для каждого $g \in G$ имеет обратный элемент g^{-1} такой, что

$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), если операция $*$ коммутативна, то есть $a * b = b * a$.

Пример 8.

1) Множества Z, Q, R относительно операции сложения "+" являются коммутативными группами. Нейтральным элементом по сложению будет 0. Операция вычитания " — " это просто прибавление обратного элемента.
2) Множество $GL(n, R)$ всех невырожденных квадратных матриц порядка n будет группой относительно умножения. Нейтральным элементом будет единичная матрица E.

Множество с двумя операциями "+" и "$\cdot$" называется *кольцом*, если по сложению оно является коммутативной группой, то есть выполняются свойства 1-4 (нейтральный элемент по сложению обозначается 0); выполнены свойства 5 — 7:

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность по умножению,
6. существует единица по умножению (ее обозначают 1),
7. $(a + b) \cdot c = ac + bc = ab + ac$ — умножение и сложение связывает свойство дистрибутивности.

Если операция умножения имеет еще и обратный элемент для всех, кроме 0 (на ноль делить нельзя) и умножение коммутативно, то это кольцо будет *полем*. Повторим другими словами.

Полем называется алгебраическая структура, являющаяся коммутативной группой по сложению, ненулевые элементы которой образуют коммутативную группу по умножению. Причем умножение и сложение связаны законом дистрибутивности. То есть, поле — это коммутативное кольцо, в котором возможно деление на ненулевые элементы.

Из линейной алгебры мы знаем другую алгебраическую структуру — *векторное пространство*. Над произвольным полем K определение векторного пространства такое же, как над действительными числами: две операции — это сложение элементов и умножение на скаляр, то есть на элемент из поля K. Повторим это: *Векторное пространство* над полем K — это множество V с двумя операциями — сложением элементов и

умножением на элемент из поля K. Операции эти должны подчиняться обычным аксиомам ассоциативности, коммутативности и т.д.
Размерность векторного пространства может быть любым натуральным числом или ∞.

Кольцо Z_m вычетов по модулю m .

Два целых числа n и n_1 называются *сравнимыми по модулю* m, $(m \in N)$, если при делении на m они дают одинаковые остатки. Число m называется модулем сравнения. Пишут $n = n_1$ (mod m).

При фиксированном m множество Z можно представить в виде объединения классов чисел, сравнимых между собой по модулю m, которые называются *классами вычетов* по модулю m. Например, числа 2 и 7 сравнимы по модулю 5 и являются представителями одного класса вычетов по модулю 5. Обозначив остатки от деление на число m через $\overline{k}$, получим множество $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2} ... \overline{m-1}\}$, на которое можно определить операции $"+"$ и $"\cdot"$, и тогда Z_m превращается в *кольцо вычетов* по модулю m.

Теорема. Кольцо вычетов Z_m является полем тогда и только тогда, когда m — простое число.
Из теоремы следует, что в случае простого m для любого элемента множества Z_m , $\{0\}$ существует обратный элемент и любое линейное уравнение в поле Z_m имеет единственное решение.

Пример 9.
Решить уравнение $\overline{3}x + \overline{7} = \overline{2}$ в Z_{11}.

Решение.
$\overline{3}x = -\overline{5} \quad (\text{mod} 11)$. Число -5 принадлежит классу вычетов, состоящего из чисел вида $\{-5 + 11k, \text{где} k \in Z\} = -\overline{5}.$ Положив $k = 1$, получим $-5 = 6(\text{ mod } 11)$ и наше уравнение примет вид

$$\overline{3}x = \overline{6}(\text{ mod } 11)$$

откуда $x = \overline{2}.$
Ответ: $x = \overline{2}.$

Замечание. В примере 9 число 11 является простым, следовательно, данное линейное уравнение имеет единственное решение. В случае, если m не является простым числом, то линейное уравнение может иметь несколько решений или не иметь решений вообще.

Задачи КДЗ №2 для самостоятельного решения

Задача №1. Даны координаты точек A,B,C и D. Найти:

1) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

2) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

4) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

5) канонические уравнения прямой AB;

6) уравнение плоскости ABC;

7) площадь треугольника ABC;

8) объем пирамиды ABCD.

1.1. A(2,1,4), B(1,-2,7), C(-3,1,2), D(3,0,5)

1.2. A(3,2,-7), B(2,-1,0), C(4,1,-2), D(6,-4,-2)

1.3. A(4,0,-1), B(3,1,9), C(1,2,-3), D(2,-1,-3)

1.4. A(2,-5,4), B(1,-5,4), C(-3,1,1), D(-4,0,5)

1.5. A(5,1,-4), B(3,-1,0), C(2,1,-6), D(0,-4,3)

1.6. A(0,2,-1), B(3,1,9), C(1,2,-3), D(2,-1,-3)

1.7. A(6,-1,3), B(1,-2,0), C(-1,4,1), D(3,0,5)

1.8. A(3,1,-4), B(2,1,0), C(3,5,-2), D(2,4,-1)

1.9. A(1,1,-1), B(3,1,5), C(1,-2,0), D(3,-1,-2)

1.10. A(-2,-3,4), B(1,-1,4), C(3,2,1), D(-4,5,0)

1.11. A(2,2,-5), B(2,-4,1), C(4,2,-2), D(0,-4,1)

1.12. A(4,0,-1), B(3,4,5), C(1,2,-3), D(2,-1,-3)

1.13. A(2,-5,4), B(1,-5,2), C(-5,1,0), D(-3,2,4)

1.14. A(-1,2,-3), B(3,-4,0), C(4,1,-2), D(5,-2,1)

1.15. A(4,0,-1), B(3,2,9), C(1,1,-3), D(7,1,-3)

1.16. A(2,0,4), B(1,-5,4), C(-2,1,1), D(-2,2,5)

1.17. A(5,1,-6), B(2,0,-9), C(4,1,-2), D(6,-4,1)

1.18. A(1,0,-1), B(3,-1,2), C(1,8,-3), D(2,-1,-3)

1.19. A(2,-5,4), B(1,-3,7), C(-3,0,1), D(-1,1,5)

1.20. A(0,2,-5), B(2,-1,0), C(4,1,-2), D(3,-4,1)

1.21. A(7,0,-1), B(3,1,-5), C(1,1,-3), D(2,-1,-3)

1.22. A(0,-1,4), B(1,-1,5), C(-5,1,1), D(-2,0,9)

1.23. A(-1,2,-7), B(2,-1,6), C(2,1,-2), D(0,-4,1)

1.24. A(8,0,-3), B(-7,1,9), C(4,2,-3), D(1,-1,-3)

Задача №2.

2.1. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$. Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{b} + 3\overline{c})$.

2.2 . Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.

2.3. Найти действительное число λ, при котором векторы $\overline{a} = (3\lambda, 1, 4)$, $\overline{b} = (3, 2\lambda, -6)$ и $\overline{c} = (3, 1, -2)$ будут компланарны.

2.4. Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$. Найти $(2\overline{a} - 3\overline{b})(\overline{b} + 4\overline{c})$.

2.5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.

2.6. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$ и векторы $\overline{a} + 3\overline{b}$ и $7\overline{a} - 5\overline{b}$ перпендикулярны.

2.7. Определить при каком α векторы $\overline{a} = (\alpha, -3\alpha, 1)$ и $\overline{b} = (1, 2, -10)$ будут взаимно перпендикулярны.

2.8. Найти действительное число α, при котором векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 5\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

2.9. Найти действительное число λ, при котором векторы $\overline{a} = (1, 3, \lambda)$, $\overline{b} = (4, 5, -1)$ и $\overline{c} = (2, -1, 5)$ будут компланарны?

2.10. Вычислить длину вектора $\overline{p} + 2\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 120^0$.

2.11. При каких α и β вектор $\overline{c} = \alpha\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$, будет коллинеарен вектору $[\overline{a}, \overline{b}]$, если $\overline{a} = (3, -1, 1)$ и $\overline{b} = (1, 2, 0)$?

2.12. Вычислить $(2\overline{a} - 5\overline{b})^2$, если $|\overline{a}| = 11$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 135^0$.

2.13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a} = (3, -2, -2)$ и $\overline{b} = (1, -2, -1)$.

2.14. Определить, при каком α векторы $\overline{a} = (1, 3\alpha, 2)$ и $\overline{b} = (2, 3\alpha, -3)$ будут взаимно перпендикулярны.

2.15. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (1, \alpha, 1)$ и $\overline{b} = (2, 1, 0)$, равна $\sqrt{6}$.

2.16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $2\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.

2.17. При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

2.18. Найти длину вектора $\overline{p}=\overline{b}-\overline{a}+\overline{c}$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $|\overline{c}|=5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})=90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})=60^0$.

2.19. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$ и $3\overline{a}+3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=45^0$.

2.20. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=(3,0,1)$ и $\overline{b}=(\alpha,2,2)$, равна $\sqrt{76}$.

2.21. Вычислить $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|=12$, $|\overline{b}|=10$, $|[\overline{a},\overline{b}]|=72$ и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – острый.

2.22. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна 10. Вычислить $\overline{AB}\,\overline{BC}+\overline{BC}\,\overline{BA}+\overline{CA}\,\overline{CB}$.

2.23. Найти $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=6$, $|[\overline{a},\overline{b}]|=15$ и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – тупой.

2.24. При каком значении $\acute{o}$ точки $M(1, y, 0)$, $A(3,-2,1)$, $B(5,1,-4)$ и $C(2,0,-1)$ будут лежать в одной плоскости?

Задача № 3. Даны числа z_1 и z_2. Вычислить : а) z_1+z_2, б) z_1-z_2, в) $z_1\cdot z_2$, г) $\frac{z_1}{z_2}$. Изобразить на комплексной плоскости z_1, z_2, z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$.

3.1 $z_1=2+3i,\quad z_2=3-5i$
3.2 $z_1=1{,}5-2i,\quad z_2=0{,}5+4i$
3.3 $z_1=-4-5i,\quad z_2=5+6i$
3.4 $z_1=2{,}4-3i,\quad z_2=3{,}1-i$
3.5 $z_1=-1{,}8+3i,\quad z_2=2{,}8+7i$
3.6 $z_1=4-7i,\quad z_2=1+2i$
3.7 $z_1=0{,}5-2i,\quad z_2=2{,}5+i$
3.8 $z_1=1{,}7+2i,\quad z_2=0{,}3+3i$
3.9 $z_1=3+4i,\quad z_2=7-5i$
3.10 $z_1=1-2i,\quad z_2=0{,}6+i$
3.11 $z_1=5-8i,\quad z_2=2+7i$
3.12 $z_1=5-2i,\quad z_2=8+3i$
3.13 $z_1=3{,}2+6i,\quad z_2=-0{,}2+2i$
3.14 $z_1=6-7i,\quad z_2=8+3i$
3.15 $z_1=2{,}8+3{,}4i,\quad z_2=0{,}2-0{,}4i$
3.16 $z_1=2i-3,\quad z_2=4+i$
3.17 $z_1=3i-5,\quad z_2=2-0{,}5i$
3.18 $z_1=-0{,}8-9i,\quad z_2=-0{,}2+7i$
3.19 $z_1=1{,}8-2i,\quad z_2=0{,}2+5i$
3.20 $z_1=-1{,}6+3i,\quad z_2=0{,}6+2i$
3.21 $z_1=5-i,\quad z_2=2+7i$
3.22 $z_1=6+3i,\quad z_2=4-i$
3.23 $z_1=6-9i,\quad z_2=7+4i$
3.24 $z_1=-2-7i,\quad z_2=3-4i$

Задача № 4. Данное число z представить в тригонометрической и показательной формах и вычислить а) z^6, б) $\sqrt[3]{z}$. В пункте б) изобразить полученные корни на плоскости.

2.1. $z_1=\frac{-3+3i}{i}$
2.2. $z=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}$
2.9. $z=1+i\sqrt{3}$
2.10. $z=-2+2\sqrt{3}i$
2.17. $z=-5+5i$
2.18. $z=\sqrt{\frac{2}{2}}-\sqrt{\frac{2}{2}}i$

2.3.	$z=1+i$	2.11.	$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{i}$	2.19.	$z=-8i$
2.4.	$z=-1+i\sqrt{3}$	2.12.	$z=2\sqrt{3}+2i$	2.20.	$z=7i^2+7i$
2.5.	$z=-1-i$	2.13.	$z=2-2i$	2.21.	$z=\sqrt{3}+i$
2.6.	$z=-2-2\sqrt{3}i$	2.14.	$z=\sqrt{3}-i$	2.22.	$z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
2.7.	$z=-10+10i$	2.15.	$z=-\sqrt{3}+i$	2.23.	$z=-1-i\sqrt{3}$
2.8.	$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	2.16.	$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$	2.24.	$z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$

Задача № 5. Решить уравнение относительно x в Z_m (возможен ответ: %).

5.1	$\overline{2}x+\overline{4}=\overline{5}$ в Z_7	**5.9**	$\overline{3}\tilde{o}+\overline{6}=\overline{8}$ в Z_9	**5.17**	$\overline{3}\tilde{o}+\overline{4}=\overline{3}$ в Z_8
5.2	$\overline{3}-\overline{4}x=\overline{2}$ в Z_5	**5.10**	$\overline{4}\tilde{o}+\overline{5}=\overline{1}$ в Z_6	**5.18**	$\overline{5}\tilde{o}+\overline{3}=\overline{2}$ в Z_7
5.3	$\overline{7}\tilde{o}-\overline{6}=\overline{9}$ в Z_{11}	**5.11**	$\overline{8}\tilde{o}-\overline{2}=\overline{3}$ в Z_9	**5.19**	$\overline{8}\tilde{o}+\overline{3}=\overline{6}$ в Z_{10}
5.4	$\overline{12}\tilde{o}+\overline{9}=\overline{1}$ в Z_{13}	**5.12**	$\overline{3}\tilde{o}+\overline{4}=\overline{1}$ в Z_5	**5.20**	$\overline{5}\tilde{o}-\overline{3}=\overline{4}$ в Z_6
5.5	$\overline{6}\tilde{o}-\overline{3}=\overline{7}$. в Z_8	**5.13**	$\overline{4}\tilde{o}-\overline{2}=\overline{5}$ в Z_9	**5.21**	$\overline{11}\tilde{o}+\overline{3}=\overline{1}$ в Z_{12}
5.6	$\overline{10}\tilde{o}+\overline{7}=\overline{3}$ в Z_{11}	**5.14**	$\overline{2}\tilde{o}+\overline{3}=\overline{2}$ в Z_5	**5.22**	$\overline{2}\tilde{o}+\overline{7}=\overline{5}$ в Z_8
5.7	$\overline{7}\tilde{o}+\overline{8}=\overline{3}$ в Z_{10}	**5.15**	$\overline{8}\tilde{o}+\overline{7}=\overline{4}$ в Z_{13}	**5.23**	$\overline{6}\tilde{o}-\overline{5}=\overline{10}$ в Z_{13}
5.8	$3-\overline{2}\tilde{o}=\overline{5}$ в Z_6	**5.16**	$\overline{3}\tilde{o}+\overline{5}=\overline{4}$ в Z_7	**5.24**	$\overline{9}\tilde{o}+\overline{4}=\overline{2}$ в Z_{11}

Рекомендуемая литература

Основная

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс- М.: Айрис-пресс, 2012.
2. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. –М.: Высшая школа 2011.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. С.-Пб, Лань, 2010.
4. Электронные учебные пособия на сайте кафедры высшей математики vm.mstuca.ru

Дополнительная

1. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. М.2010.
2. Мальцев И.А. Линейная алгебра Лань: С.-Пб. 2010.
3. Бутусов В.Ф. Линейная алгебра в вопросах и задачах. С-Пб., Лань, 2008.
4. Щербенко Л.Н., Никонова Г.А. Матрицы в примерах и задачах. М: Цифра, 2011