Учебный план дисциплины.

Студенты дневного отделения изучают математику на I и II курсах. Общий объем учебных часов на дисциплину 600 часов.

Во втором семестре изучаются следующие разделы: линейная алгебра, векторный анализ, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Цель преподавания дисциплины: дать студентам практическую подготовку и теоретические основы по математике для успешного освоения фундаментальных, общетехнических и специальных предметов учебного курса.

Задачи изучения математики.

1. Знать основные понятия и методы исследования и решения задач читаемой дисциплины.
2. Уметь применять математические методы к решению задач; проводить конкретные расчеты в рамках выполнения аудиторных и домашних заданий.
3. Иметь представление о математической символике для выражения количественных и качественных соотношений объектов; о применении теоретических рассуждений при доказательстве теорем.

Общие рекомендации студенту по работе над курсом математики.

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1. Изучение материала по лекциям.
2. Изучение материала по учебнику.
3. Выполнение еженедельных домашних заданий.
4. Выполнение контрольных домашних заданий (КДЗ).

Студент может обращаться к преподавателю для получения консультации, посещать имеющиеся факультативные занятия.

Указания к выполнению КДЗ.

1. Каждое контрольное домашнее задание должно выполняться в отдельной тонкой тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 6 см. для замечаний преподавателя.

2. На титульном листе тетради должны быть четко написаны фамилия студента, его инициалы, название дисциплины, номер выполняемого варианта. Как правило, номер варианта задается преподавателем.

3. Решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, обязательно записывая условия каждой задачи.

4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

5. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».

6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №1
«Неопределенный и определенный интеграл»

Вариант 0

I. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{(1-x)^2}{x} dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

3. $\int 2cos^2 \frac{x}{2} dx$

4. $\int \frac{dx}{x^2-7}$

5. $\int \frac{3 \cdot 2^x}{5^x} dx$

6. $\int x^2 \sin(1-x^3)\, dx$

7. $\int \frac{dx}{3x-2}$

8. $\int sin2x \cdot cos3x\; dx$

9. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

10. $\int arctg\sqrt{x}\; dx$

II. Вычислить определённые интегралы:

1. $\int_{-2}^{3} \sqrt[3]{2x}\; dx$
2. $\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\; dx$; $x = 4\sin t$
3. $\int_{0}^{\pi/2} xcosx\; dx$

III. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$
2. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

IV. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 4 - x^2$; y=1
2. $\rho = 3cos4\varphi$

<u>I.Решение</u>

1. $\int \frac{(1-x)^2}{x}\; dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x}\; dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{x^2}{x}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int 2dx + \int xdx =$ (получили сумму табличных интегралов)
$= \ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2} + c$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2-x^2} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$

3. $\int 2cos^2 \frac{x}{2} dx = \int (1 + cosx)\, dx = \int dx + \int cosxdx =$ x + sinx + c

4. $\int \frac{dx}{x^2-7} = \int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right| + c$

5. $\int \frac{3 \cdot 2^x}{5^x} dx = 3 \cdot \int (\frac{2}{5})^x dx = 3 \cdot (\frac{2}{5})^x \cdot \frac{1}{ln\frac{2}{5}} + c$

Для вычисления этих интегралов пользовались основной таблицей интегралов, формулами тригонометрии, действиями со степенями и дробями.

6. $\int x^2 \sin(1 - x^3)\, dx =$

известно, что $d\,(x^3) = 3x^2 dx$, тогда

$\frac{1}{3} \int \sin(1 - x^3)\, dx^3 =$

имеем свойство дифференциала $\frac{1}{a} d\,(ax + b) = dx$

т.е. $-d(1 - x^3) = dx^3$

$-\frac{1}{3} \int \sin(1 - x^3)\, d(1 - x^3) = -\frac{1}{3}(-\cos\,(1-x^3)) + c = \frac{1}{3}\cos\,(1-x^3) + c$

7. $\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-2)}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|3x - 2| + c$

8. $\int sin2x \cdot cos3x\, dx =$

имеем формулу $\sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$, тогда

$\frac{1}{2} \int [sin5x + \sin(-x)]\, dx = \frac{1}{2} \int sin5xdx - \frac{1}{2} \int sinxdx =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \int sin5xdx - \frac{1}{2}(-cosx) = -\frac{2}{10} cos5x + \frac{1}{2} cosx + c$

9. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} =$

выделим полный квадрат в знаменателе

$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1^2 + 4 = (x + 1)^2 + 4$

$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + c$

10. $\int arctg\sqrt{x}\, dx =$

воспользуемся формулой интегрирования по частям

$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$

Пусть $U = arctg\sqrt{x} \rightarrow dU = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$dV = dx \rightarrow V = x$

Имеем:

$$x arctg\sqrt{x} - \int \frac{x}{(1+x)2\sqrt{x}} dx$$

посчитаем получившийся интеграл $\int \frac{x}{(1+x)2\sqrt{x}} dx = \int \frac{(\sqrt{x})^2}{\left(1+(\sqrt{x})^2\right)2\sqrt{x}} dx =$

$\int \frac{(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x})$, замена $\sqrt{x} = t$

$\int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = \int \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} =$
$t - arctgt = \sqrt{x} - arctg\sqrt{x}$

Получаем: $\int arctg\sqrt{x}\, dx = x\, arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + c$

II. Вычислить определенные интегралы.

Нам понадобятся формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

и правила пользования заменой и формулой интегрирования по частям в определённом интеграле.

1. $\int_{-2}^{3} \sqrt[3]{2x}\; dx = \sqrt[3]{2} \int_{-2}^{3} x^{1/3}\, dx = \sqrt[3]{2} \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}\Big|_{-2}^{3} = \frac{\sqrt[3]{2}\cdot 3}{4} x^{4/3}\Big|_{-2}^{3} =$

$\frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4}\Big|_{-2}^{3} = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2\cdot 3^4} - \sqrt[3]{2(-2)^4}\right) = \frac{3}{4}(3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{4})$

2. $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\; dx = \begin{cases} x = 4\sin t \\ dx = 4\cos t\, dt \end{cases};\ \sqrt{16 - 16\sin^2 t} = \sqrt{16\cos^2 t} = 4|\cos t|$

т. к. $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $|\cos t| = \cos t$

Необходимо пересчитать пределы интегрирования

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \to 4 = 4\sin t, \quad \text{т.е. } t = \pi/2 \ (\sin t = 1) \\ x = 0 \to 0 = 4\sin t, \quad \text{т.е. } t = 0 \ (\sin t = 0) \end{array}\right\}$$

$\int_0^{\pi/2} 4\cos t \cdot 4\cos t\, dt = 16\int_0^{\pi/2} cos^2 t\, dt = 8\int_0^{\pi/2}(1 + cos2t)dt =$

$= \left(8t + \frac{8}{2} sin2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = 8\cdot\frac{\pi}{2} + 4\sin\pi - 8\cdot 0 - 4\sin 0 = 4\pi$

III. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4} =$

Подинтегральная функция $\frac{1}{x^4}$ имеет разрыв (не определена) в точке $x = 0$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^4}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} + \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{0+\varepsilon}^{1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{(0-\varepsilon)^3} - \frac{1}{(-1)^3} + \frac{1}{(1)^3} - \frac{1}{(0+\varepsilon)^3}\right] =$$

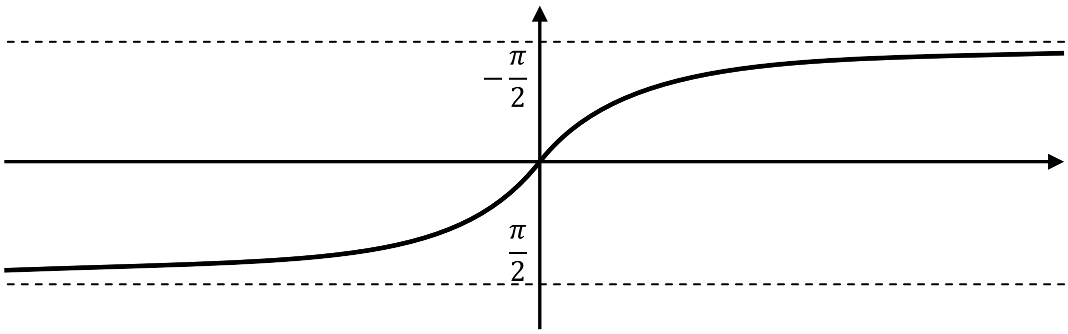
$$= -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{\varepsilon^3} + 1 + 1 - \frac{1}{\varepsilon^3}\right] = \infty$$

Следовательно, интеграл расходится.

2. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^{M} =$$

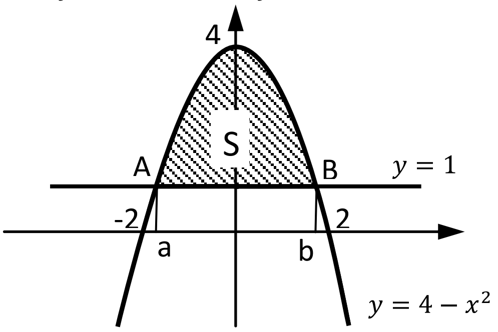
$$= \frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}(\operatorname{arctg} M - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Известно, что $\underset{x\to+\infty}{\operatorname{arctg} x} \quad \frac{\pi}{2}$, $\underset{x\to-\infty}{\operatorname{arctg} x} \quad -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.



III. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями.

1. $y = 4 - x^2$; $y = 1$.



Сделаем рисунок.

Кривые заданы в декартовой системе координат, следовательно,

$$S = \int_a^b (f_1 - f_2)\,dx = \int_a^b (4 - x^2 - 1)\,dx$$

Найдем пределы интегрирования a и b. Для этого решим совместно

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \ 1 = 4 - x^2 \rightarrow \ x^2 = 3; \ x = \pm\sqrt{3}; \ a = -\sqrt{3}; \ b = \sqrt{3}.$$

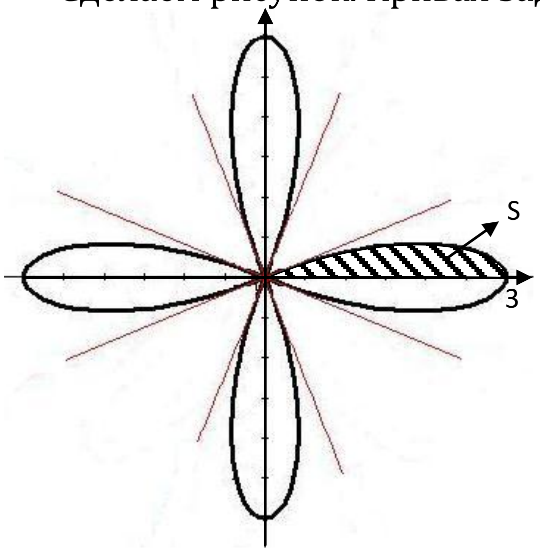
Получаем

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\, dx = \left(3x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} - 3(-\sqrt{3}) + \frac{(-\sqrt{3})^3}{3} =$$

$4\sqrt{3}$ $(кв.ед.)$

2. $\rho = 3 \cdot \cos 4\varphi$

Сделаем рисунок. Кривая задана в полярных координатах.



Это известная кривая – четырехлистник, которую можно построить по точкам.

Но воспользуемся ее свойствами.

$\rho \geq 0 \ \rightarrow \ \cos 4\varphi \geq 0$

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq 4\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

Удобнее записать

$$\frac{4\pi k}{8} - \frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi k}{8}$$

Имеем 4 зоны, т.е. 4 лепестка.

$$-\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} \qquad \frac{7\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{9\pi}{8}$$
$$\frac{3\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{8} \qquad \frac{11\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{13\pi}{8}$$

Воспользуемся симметричностью этих лепестков. Тогда вся площадь $S = 8 \cdot S_1$, где S_1 – заштрихованная площадь.

Здесь φ меняется в интервале $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$. Имеем:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (3\cos 4\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} 9\cos^2 4\varphi \ d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4\varphi \ d\varphi = \frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 + \cos 8\varphi) d\varphi = \frac{9}{4}\left(\varphi + \frac{1}{8}\sin 8\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{8}} =$$

$$= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \cdot 0 - 0 - \frac{1}{8} \cdot 0\right) = \frac{9\pi}{32};$$ Тогда $S = 8 \cdot S_1 = 8 \cdot \frac{9\pi}{32} = \frac{9\pi}{4}\,(кв.ед.)$

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

I. Вычислить определенные интегралы.

Вариант 1

1. $\int \frac{dx}{10-x^2}$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;
3. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2} dx$;
4. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$;
5. $\int \frac{x^2-4}{x+2} dx$;
6. $\int x^4 \cdot e^{(-x)^5} dx$;
7. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$;
8. $\int \cos 3x \cos x \, dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$;
10. $\int \arccos x \, dx$.

Вариант 2

1. $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \cos x\right) dx$;
2. $\int 5^x \cdot 6^x dx$;
3. $\int \left(\frac{1-3x}{x}\right)^2 dx$;
4. $\int \frac{dx}{8-x^2}$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$;
6. $\int \frac{5+2\ln x}{3x} dx$;
7. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;
8. $\int \sin 8x \cdot \sin 10x \, dx$;
9. $\int \frac{dx}{x^2-7x+13}$;
10. $\int x \sin 2x \, dx$.

Вариант 3

1. $\int (3x+1)^2 dx$;
2. $\int \frac{dx}{3+2x^2}$;
3. $\int \left(3e^x - \sqrt{x^5} + 2\right) dx$;
4. $\int (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$;
6. $\int \frac{2^x}{4^x-1} dx$;
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin x (1-x^2)}}$;
8. $\int \cos^3 5x \, dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;
10. $\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{2} dx$.

Вариант 4

1. $\int \frac{dx}{sin^2 x \cdot cos^2 x}$
2. $\int \frac{1-x^3}{x^2+x+1} dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
4. $\int \frac{dx}{10x^2-7}$

Вариант 5

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{2}} dx$
2. $\int \frac{1+x\cos x}{x} dx$
3. $\int \frac{dx}{10x^2-1}$
4. $\int \frac{5^x}{10^x} dx$

Вариант 6

1. $\int \sqrt[7]{x^5} dx$
2. $\int \frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2} dx$
3. $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3} dx$
4. $\int \frac{3sin\, 2x}{\cos x} dx$

5. $\int 2^{x+1} \cdot dx$

6. $\int \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) dx$

7. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[7]{sin^2 x}} dx$

8. $\int \frac{x\,dx}{x^4+4}$

9. $\int cos\frac{x}{3} \cdot sin\frac{2x}{3} dx$

10. $\int x \cos x\, dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{x\, ln^2 x}$

7. $\int x^2\sqrt{1-x^3}dx$

8. $\int e^{arctg\, x} \frac{dx}{1+x^2}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

10. $\int (x+1) \ln x\, dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{13-x^2}}$

6. $\int \frac{ctg^3 x}{sin^2 x} dx$

7. $\int x\, e^{-x^2} dx$

8. $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$

9. $\int sinx \cdot cos8x \cdot dx$

10. $\int x \cdot arctgx \cdot dx$

Вариант 7

1. $\int cos^2 \frac{x}{2} dx$

2. $\int \frac{xe^x - x}{x} dx$

3. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$

4. $\int (2^x + \frac{1}{1-x^2})\, dx$

5. $\int \frac{(2+x)^2}{\sqrt{x}} dx$

6. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$

7. $\int \frac{ln^5(x+1)}{x+1} dx$

Вариант 8

1. $\int (2x-3)^2\, dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$

3. $\int \frac{2tg^2 x+1}{sin^2 x} dx$

4. $\int (2^x - 2 \cdot 3^x) dx$

5. $\int \frac{1-2x}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot sin^2\sqrt{x}}$

Вариант 9

1. $\int (sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2})^2\; dx$

2. $\int 3^{x+1} dx$

3. $\int \frac{dx}{4x^2-1}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$

5. $\int \frac{2x^5-3x}{x^2} dx$

6. $\int \frac{\sqrt{lnx}}{x} dx$

7. $\int \cos(3-x)\, dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$

9. $\int \sin 7x \cdot \sin 3x \cdot dx$

10. $\int (2x-1)\, e^x dx$

8. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$

9. $\int tg^2 x\; dx$

10. $\int (1-x) ln x\; dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

9. $\int cos3x \cdot cos11x\; dx$

10. $\int xe^{3x}dx$

Вариант 10

1. $\int \frac{3\sqrt{x}-x^2+1}{x} dx$

2. $\int \frac{1+sin^2 x}{1-cos2x} dx$

3. $\int \frac{dx}{15+x}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

5. $\int 5^{2x-1} dx$

6. $\int \frac{cosx}{sinx-1} dx$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^3}} dx$

8. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

9. $\int sin4x \cdot sin5x\; dx$

10. $\int (x+2) cosx\; dx$

Вариант 11

1. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2\, dx$

2. $\int \frac{dx}{x^2+10}$

3. $\int \frac{dx}{x^2+10}$

4. $\int e^x \cdot 3^x dx$

5. $\int ctg^2 x\; dx$

6. $\int \sin(9x+2)\, dx$

7. $\int sin^3 x\; dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $\int sin\frac{7x}{2} \cdot cos\frac{x}{2}\; dx$

10. $\int arctgx\; dx$

Вариант 12

1. $\int 6x\sqrt[4]{x^3} dx$

2. $\int \frac{1-tg^2 x}{7sin^2 x} dx$

3. $\int \frac{dx}{7-x^2}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

5. $\int \frac{x\cdot 2^x-1}{x} dx$

6. $\int cosx\sqrt[3]{sinx}\; dx$

7. $\int \frac{arctg^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\; dx$

8. $\int \frac{dx}{2-6x-9x^2}$

9. $\int cos\frac{10x}{11} \cdot sin\frac{x}{11}\; dx$

10. $\int (2x+1) lnx\; dx$

Вариант 13

1. $\int \frac{dx}{8-x^2}$
2. $\int 2^{4x}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+x^2}}$
4. $\int \frac{3+2ctg^2x}{cos^2x}dx$
5. $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$
6. $\int \frac{arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$
7. $\int \frac{dx}{xln^3x}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$
9. $\int sin^3xdx$
10. $\int x3^xdx$

Вариант 14

1. $\int \frac{cos2x}{sin^2xcos^2x}dx$
2. $\int \frac{dx}{x^2-16}$
3. $\int \frac{xsinx-1}{x}dx$
4. $\int 7^{x+2}dx$
5. $\int \frac{2dx}{\sqrt{2-x^2}}$
6. $\int \frac{xdx}{cos^2x^2}$
7. $\int (3x-2)^{\frac{1}{3}}dx$
8. $\int \frac{dx}{x^2+4x-2}$
9. $\int sinx \cdot sin10xdx$
10. $\int xsin3xdx$

Вариант 15

1. $\int \frac{(2x-1)^2}{x^2}dx$
2. $\int \frac{sin2x}{cosx}dx$
3. $\int \frac{x^2+4}{x^2-1}dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{10+x^2}}$
5. $\int 3e^{x-1}dx$
6. $\int \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$
7. $\int \frac{dx}{xln^3x}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$
9. $\int cos4x \cdot cos3xdx$
10. $\int arcsin2x\,dx$

Вариант 16

1. $\int 5^{2x}dx$
2. $\int (sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2})^2dx$
3. $\int \frac{dx}{4-x^2}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Вариант 17

1. $\int e^x\left(e^{-x}+\frac{x^2}{e^x}\right)dx$
2. $\int \frac{7dx}{sin^2x}$
3. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2x}dx$
4. $\int \frac{1+sin^2x}{1-cos2x}dx$

Вариант 18

1. $\int \frac{2^x}{10^x}dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$
3. $\int \left(2\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)dx$
4. $\int tg^2\,x\,dx$

5. $\int \frac{(1-x)^3}{x^3} dx$

6. $\int \frac{5+3lnx}{x} dx$

7. $\int \frac{dx}{arctgx \cdot \sqrt{1+x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{x^2-8x+11}$

9. $\int sin7x \cdot sin10x\, dx$

10. $\int x \cdot sin4x\, dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

6. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

7. $\int \frac{x^2dx}{x^3+5}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-2-x^2}}$

9. $\int cos^3x\, dx$

10. $\int arcsin3x\, dx$

5. $\int \frac{dx}{2x^2-1}$

6. $\int cos^3x\, sinx\, dx$

7. $\int 3e^{3x^2-1} \cdot xdx$

8. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

9. $\int cos\frac{x}{2} \cdot sin\frac{x}{3}\, dx$

10. $\int xcos2x\, dx$

Вариант 19

1. $\int \frac{dx}{6-x^2}$

2. $\int \frac{dx}{6+x^2}$

3. $\int \frac{2cos2x}{sin^2x-cos^2x} dx$

4. $\int \frac{x^2-3x+2}{x-1} dx$

5. $\int e^{3x+1}dx$

6. $\int x(x^2+5)^7dx$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

Вариант 20

1. $\int sin^2\frac{x}{2}dx$

2. $\int(\sqrt{x-1})^3dx$

3. $\int \frac{x^2+3}{x^2+2}dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{3-x^2}$

6. $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{3-5e^{2x}}}$

7. $\int sin^5x \cdot cosx\, dx$

8. $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$

Вариант 21

1. $\int \frac{1-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{17-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{x^2+16}$

4. $\int(2^x-3 \cdot 3^x)dx$

5. $\int \frac{3ctg^2x-1}{2cos^2x}dx$

6. $\int \frac{dx}{arccosx \cdot \sqrt{1-x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{x(lnx+5)}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$

9. $\int \frac{dx}{sin^4 8x}$

10. $\int x \cdot ln(2x-1)dx$

9. $\int sin2x \cdot cos5x\, dx$

10. $\int 3x \cdot arctgx\, dx$

9. $\int cos4x \cdot cos2x\, dx$

10. $\int xe^{1-x}dx$

Вариант 22

1. $\int (sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2})^2 dx$
2. $\int \frac{dx}{3+x^2}$
3. $\int 2x\left(3 + \frac{3^x}{x}\right) dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$
5. $\int ctg^2 x\, dx$
6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-x^6}}$
7. $\int \frac{(3lnx-5)^2}{x} dx$
8. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+3}$
9. $\int sin2x \cdot cos12x\, dx$
10. $\int (2x-1)lnx\, dx$

Вариант 23

1. $\int \frac{dx}{9-x^2}$
2. $\int 7^{x+2}\, dx$
3. $\int \frac{3\sqrt[3]{x}-x^3+2}{x} dx$
4. $\int \frac{dx}{2sin^2x \cdot cos^2x}$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
6. $\int \frac{(\sqrt{x-1}+2)^3}{\sqrt{x-1}} dx$
7. $\int \frac{dx}{x(lnx+7)}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}}$
9. $\int cosx \cdot sin7\, dx$
10. $\int (2x-1)e^{2x-1}dx$

Вариант 24

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}}$
2. $\int e^x \cdot 3^x\, dx$
3. $\int \frac{dx}{11-x^2}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{11-x^2}}$
5. $\int \frac{sin2x}{cosx} dx$
6. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$
7. $\int cos^7 x \cdot sinx\, dx$
8. $\int \frac{dx}{4x^2+x+5}$
9. $\int sin^3 2x\, dx$
10. $\int 3x \cdot sin3x\, d\, x$

Вариант 25

1. $\int \frac{x^2-5x+3}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{cos^2 x} dx$

6. $\int e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$
7. $\int \frac{dx}{(2x-1) \cdot \ln(2x-1)}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{14-x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{4^{-x}}$

5. $\int \frac{dx}{10-x^2}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $\int \frac{sin^3x}{cos^4x}dx$

10. $\int 2x \cdot \arcsin 3x\, dx$

II. Вычислить определенные интегралы.

Вариант 1

а) $\int_0^2 x(3-x)\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$; $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$; в) $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$.

Вариант 2

а) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$; $e^x=t$; в) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

Вариант 3

а) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; $2x+1=t^2$; в) $\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$.

Вариант 4

а) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$; $\sqrt{x}=t$; в) $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$.

Вариант 5

а) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$; $x=2\sin t$; в) $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$.

Вариант 6

а) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{3e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx$; $e^x=t$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3+3)\cos x\,dx$.

Вариант 7

а) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$; $\sqrt{x-2}=t$; в) $\int\limits_{0}^{1} x3^x\,dx$.

Вариант 8

а) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; $\operatorname{ctg} x = t$; в) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$.

Вариант 9

а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_{3}^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$; $x-2=t$; в) $\int\limits_{0}^{\pi} (x-3)\sin x\;dx$.

Вариант 10

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$; б) $\int\limits_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+2}$; $x+1=t^2$; в) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \arcsin x\;dx$.

Вариант 11

а) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; $\sqrt{x}=t$; в) $\int\limits_{0}^{3} x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Вариант 12

а) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$; в) $\int\limits_{1}^{3} \ln x\;dx$.

Вариант 13

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$; $e^x-1=t^2$; в) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$.

Вариант 14

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\ dx;$ б) $\int\limits_{0}^{7} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};\ \sqrt[3]{x+1}=t;$ в) $\int\limits_{1}^{e} x\ln x\ dx.$

Вариант 15

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$ б) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1};\ \sqrt{x}=t;$ в) $\int\limits_{0}^{1} (3x+5)e^{2x}\,dx.$

Вариант 16

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x\ dx;$ б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+1};\ x+1=t^2;$ в) $\int\limits_{1}^{e} (3-2x)\ln x\ dx.$

Вариант 17

а) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{(2x-1)^2};$ б) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{9-x^2}\,dx;\ x=3\sin t;$ в) $\int\limits_{e}^{e^2} \ln(2x)\ dx.$

Вариант 18

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\ dx;$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x};\ \operatorname{tg} x=t;$ в) $\int\limits_{0}^{e-2} x\ln(x+2)\ dx.$

Вариант 19

а) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2+x}\,dx;$ б) $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3};\ e^x-1=t^2;$ в) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} \arccos x\ dx.$

Вариант 20

а) $\int\limits_{1}^{2} \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right) dx;$ б) $\int\limits_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx;\ x=4\sin t$ в) $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x\sin x\ dx.$

Вариант 21

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^5 x \, dx$; б) $\int\limits_0^{26} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3} dx$; $x+1=t^{\frac{3}{2}}$ в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx$.

Вариант 22

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}-1}$; $\sqrt{x+3}=t$; в) $\int\limits_0^e \ln^2 x \, dx$.

Вариант 23

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{7+5x}$; б) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} \, dx$; $e^x-1=t^2$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \arccos x \; dx$.

Вариант 24

а) $\int\limits_2^3 \left(x+\frac{1}{x^3}\right) dx$; б) $\int\limits_0^5 \sqrt{25-x^2} \, dx$; $x=5\sin t$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1)\cos x \, dx$.

Вариант 25

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} \; dx$; б) $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; $\sqrt[4]{x}=t$; в) $\int\limits_1^e (2x-1)\ln x \, dx$

III. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

Вариант 1

а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$;

б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$.

Вариант 2

а) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{5+2x^2}$.

Вариант 3

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{9+2x^2}$.

Вариант 4

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^6}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Вариант 5

а) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^3}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+3x^2}$.

Вариант 6

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Вариант 7

а) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$.

Вариант 8

а) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Вариант 9

а) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Вариант 10

а) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^4}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Вариант 11

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4x^2+1}$.

Вариант 12

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(1-x)^2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

Вариант 13

а) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\, dx$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+4}$.

Вариант 14

а) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^4}$;

б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+17}$.

Вариант15

а) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Вариант 16

а) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x}$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+4}$.

Вариант 17

а) $\int_{0}^{1} \ln(x-1)\,dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{8+9x^2}$.

Вариант 18

а) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

б) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$.

Вариант 19

а) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

б) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{5x^2+3}$.

Вариант 20

а) $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Вариант 21

а) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2}$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+10}$.

Вариант 22

а) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Вариант 23

а) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x+1}$;

б) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{(x-3)^3}$.

Вариант 24

а) $\int_{0}^{+4} \frac{dx}{x\ln(x+1)}$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5\,dx}{3x^2+5}$.

Вариант 25

а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{3\,dx}{5x^2+4}$;

б) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{(x+3)^2}$.

III. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.
IV.

1. а) $y^2 = 2x + 1;$ $x - y - 1 = 0.$ б) $\rho = e^{4\varphi};\quad -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}.$

2. а) $y = x^2;$ $y = \sqrt{x}.$ б) $\rho = 2\varphi;\quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

3. а) $y = x^2;$ $y = \dfrac{x^3}{3}.$ б) $\rho = \dfrac{2}{\varphi};\quad \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}.$

4. а) $y = e^x;$ $y = e^{-x};\quad x = 1.$ б) $\rho = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi.$

5. а) $y = \ln x\,;$ $y = \ln^2 x.$ б) $\rho = \sin 6\varphi.$

6. а) $y = x^2 + 4x;$ $y = x + 4.$ б) $\rho = 3\sin 2\varphi.$

7. а) $y = \dfrac{1}{1 + x^2};$ $y = \dfrac{x^2}{2}.$ б) $\rho = 3sin\varphi.$

8. а) $y = 4x^2;$ $y = \frac{x^2}{9}.\ \ y = 2$ б) $\rho = \sqrt{3}cos\varphi.$

9. а) $y = x^2 + 1;$ $y + x = 3.$ б) $\rho = \dfrac{1}{2} + cos\varphi.$

10. а) $y = 2^x;\quad x = 2;$ $y = 2x - x^2.\ x = 0$ б) $\rho = sin\varphi.$

11. а) $y = (x-4)^2$; $y = 16 - x^2$; $y = 0$. б) $\rho = 1 + \sqrt{2}cos\varphi$.

12. а) $y = 4x - x^2$; $y = 0$. б) $\rho = cos^3\frac{\varphi}{3}$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

13. а) $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$. б) $\rho = \varphi^2$; $0 \le \varphi \le \pi$.

14. а) $y = x^3$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 8$. б) $\rho = 2 + cos\varphi$.

15. а) $y = 2x - x^2$; $y = -x$ б) $\rho = 2(1 + cos\varphi)$.

16. а) $y = x^3$; $y = 8$; $x = 0$. б) $\rho = 4sin^2\varphi$.

17. а) $y = 3 - 2x$; $y = x^2$. б) $\rho = \frac{5}{\varphi}$; $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le 2\pi$.

18. а) $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{2}$; $y = 2$. б) $\rho = 3e^{3\varphi}$; $-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

19. а) $y = \frac{x^3}{3}$; $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$. б) $\rho = 4sin3\varphi$.

20. а) $y = \frac{1}{x^2}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$. б) $\rho = 1 - cos\varphi$.

21. а) $y = x^2 + 1$; $y = 0$ $x = -2$; $x = 3$. б) $\rho = 3cos2\varphi$.

22. а) $y = 3x - x^2;$ б) $\rho = 2 + cos\varphi.$
$y = -x.$

23. а) $y = \frac{16}{x^2};$ б) $\rho = 5sin2\varphi.$
$y = 17 - x^2;$
$x > 0; y > 0.$

24. а) $y = sinx;$ б) $\rho = 2e^{\varphi}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$
$y = cosx;$
$x = 0.$

25. а) $y = 0{,}25x^2;$ б) $\rho = 3\varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$
$y = 3x - 0{,}5x^2.$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №2 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 0

I. Решить уравнение $x^3y' = y(y^2 + x^2)$.

II. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.

III. Найти общее решение уравнения:

а) $y'' = (y')^2$;

б) $y'' = 2yy'$

IV. Найти общее решение уравнения (без нахождения неопределенных коэффициентов).

а) $y''' - 5y' = 2e^{5x}$

б) $y'' + 2y'' + 26y = x\sin 3x + (x^2 - x + 3)\cos 3x$

V. Решить задачу Коши.

$y'' - 2y' = x^2$ *y(0) = 0 ; y' (0) = 0*

VI. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных.

$y'' + y = tgx$

Решение.

I. $x^3y''' = y(y^2 + x^2)$

Разделим обе части уравнения на x^3, получим

$$y' = \frac{y^3 + yx^2}{x^3} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{y^3}{x^3} + \frac{yx^2}{x^3} \quad \rightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{y}{x}$$

Правая часть этого уравнения есть функция отношения $\frac{y}{x}$, следовательно , это однородное уравнение.

Обозначим $\frac{y}{x} = u \quad \rightarrow \quad y = ux$ и $y' = u'x + u$

Имеем: $u'x + u = u^3 + u$

$u'x = u^3$ - это уравнение с разделяющимися переменными

$\frac{du}{dx} \cdot x = u^3 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x}$

Интегрируем:

$-\frac{1}{2u^2} = \ln x + C.$ Подставим $u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2} = \ln x + C$

Если константу C записать в другом виде «$\ln C$», то общее решение будет иметь вид:

$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln x + \ln C \quad \rightarrow \quad -\frac{x^2}{2y^2} = \ln Cx \quad \rightarrow \quad Cx = e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$

В процессе решения мы делили обе части уравнения на $x^3 \neq 0$ и $u^3 \neq 0$ и могли потерять решения x=0 и u=0 (u=0 → $\frac{y}{x}$=0 → y=0)

Непосредственной проверкой убеждаемся , что x = 0 не является решением; а y = 0 – решение, которое не входит в общий интеграл ни при каком C

Имеем ответ: $Cx = e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$; y=0.

II. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{sinx}{x}$

Это линейное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x) = \frac{1}{x}; Q(x) = \frac{sinx}{x}$

Пусть $y = uv \quad \rightarrow \quad y' = u'v + uv'$

Имеем $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{sinx}{x} \quad \rightarrow \quad v\left(u' + \frac{1}{x}u\right) + uv' = \frac{sinx}{x}$

1). $u' + \frac{1}{x}u = 0$ – уравнение с разделяющими переменными.

$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad \ln u = -\ln x \quad \rightarrow \quad u = \frac{1}{x},$

т.к $-\ln x = \ln(x^{-1})$

2). $uv' = \frac{sinx}{x}$, подставим найденное u

$\frac{1}{x}v' = \frac{1}{x}\sin x \quad \rightarrow \quad v' = \sin x$

Интегрируем $v = -cosx + C$

Тогда $y = uv = \frac{1}{x}(-cosx + C)$

Ответ: $y = \frac{1}{x}(-cosx + C)$

III. а) $y' = (y')^2$

Это уравнение второго порядка, не содержащее функцию у.

Положим $y' = z(x) \quad \rightarrow \quad y'' = z'$

Уравнение имеет вид $z' = z^2$ – это уравнение с разделяющимися переменными. $\frac{dz}{dx} = z^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{z^2} = dx \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{z} = x + C.$

Вернемся к y, получаем

$z = \frac{-1}{x+C_1}; \quad y' = -\frac{1}{x+C_1}; \quad y = -\ln|x + C_1| + C_2$

Это и будет ответом.

б) $y'' = 2y \cdot y'$

Это уравнение второго порядка, не содержащее Х.

Положим $y' = p(y) \quad \rightarrow \quad y'' = p' \cdot p$

Имеем $p'p = 2y \cdot p \;\rightarrow\; p\,(p' - 2y) = 0$

1) $p = 0 \;\rightarrow\; y' = 0 \;\rightarrow\; y = C$

2) $p' = 2y \;\rightarrow\; \frac{dp}{dy} = 2y \;\rightarrow\; p = y^2 + C_1 \;\rightarrow\; y' = y^2 + C_1$

$\frac{dy}{y^2+C_1} = dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{C_1} arctg\,\frac{y}{C_1} = X + C_2$

Ответ: y=C; $\frac{1}{C_1} arctg\,\frac{y}{C_1} = X + C_2$

IV. а) $y''' - 5y' = 2e^{5x}$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

1) Рассмотрим однородное уравнение: $y''' - 5y' = 0.$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$k^3 - 5k = 0 \;\rightarrow\; k(k^2-5) = 0 \;\rightarrow\; k_1 = 0 \quad k_{2,3} = \pm\sqrt{5}$

Следовательно ,

$$y_{00} = C_1e^{0x} + C_2e^{\sqrt{5}x} + C_3e^{-\sqrt{5}x}$$

- общее решение однородного уравнения в случае действительных различных корней характеристического уравнения.

2) Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = P_o(x)e^{dx} = 2e^{5x}$; $P_0(x) = 2$ – многочлен нулевой степени, $\alpha = 5$ (α – не является корнем

характеристического уравнения). Тогда $y_{чн} = A \cdot e^{5x}$ – частное решение неоднородного уравнения.

3) Найдем неопределенный коэффициент A

Имеем $y \;\; = A \cdot e^{5x};$

$y' \;\; = 5A \cdot e^{5x};$

$y'' = 25A \cdot e^{5x};$

$y''' = 125A \cdot e^{5x}.$

Подставим найденные производные в исходное уравнение

$125A \cdot e^{5x} - 5 \cdot 5A \cdot e^{5x} = 2e^{5x} \quad \to \quad 100A = 2 \quad \to \quad A = \frac{1}{50}$

$y_{чн} = \frac{1}{50}e^{5x}$. Известно, что $y_{0н} = y_{OO} + y_{чн}$

Ответ: $$y_{0н} = C_1 + C_2e^{\sqrt{5}x} + C_3e^{-\sqrt{5}x} + \frac{1}{50}e^{5x}$$

б) Найти вид общего решения уравнения

$$y'' + 2y' + 26y = xsin3x + (x^2 - x - 3)cos3x$$

1). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 + 2k + 26 = 0 \;\; \to \;\; k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-26} = -1 \pm i\sqrt{25} = -1 \pm 5i$

если корни характеристического уравнения комплексны $\alpha \pm \beta i$, то

$y_{00} = e^{\alpha x}[C_1 cos\beta x + C_2 \sin \beta x] \;\to\; y_{00} = e^{-x}[C_1 cos5x + C_2 \sin 5x]$

2). Правая часть уравнения имеет вид:

$f(x) = P_2(x)cos3x + Q_1(x)sin3x$, где

$P_2(x) = x^2 - x - 3$ - многочлен степени 2

$Q_1(x) = x$ - многочлен степени 1

Для правой части нашего уравнения

$y_{чн} = M_2(x)cos3x + N_2(x)sin3x,$

здесь $M_2(x)$ и $N_2(x)$ многочлен 2-ой степени с неопределенными коэффициентами.

3) Общее решение неоднородного уравнения $y_{0н}$ есть сумма общего решения однородного уравнения y_{00} и частного решения неоднородного уравнения $y_{чн}$ $y_{0н}=y_{00}+y_{чн}$

Имеем

$$y_{0н} = e^{-x}[C_1 cos5x + C_2 sin5x] + (A_1x^2 + B_1x + C_2)cos3x +$$
$$+(A_2x^2 + B_2x + C_2)sin3x$$

V. $y'' - 2y' = x^2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

1) Найдем y_{00} для уравнения $y'' - 2y' = 0$
   Характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ → $k_1 = 0; k_2 = 2$
   Корни действительны и различны, следовательно,
$$y_{00} = C_1e^{0x} + C_2e^{2x} = C_1 + C_2e^{2x}$$

2) Найдем $y_{чн}$, $f(x) = P_2(x)e^{\alpha x}$; $P_2(x) = x^2$ – многочлен, $\alpha = 0$.
   Значит, $y_{чн} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{0 \cdot x} \cdot x = (Ax^2 + Bx + C)x$
   Множитель X появляется из-за того, что $\alpha = 0$ есть однократный корень характеристического уравнения.

3) Найдем коэффициенты A, B, C
   $y_{чн} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$
   $y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C$
   $y'''_{чн} = 6Ax + 2B$
   Подставим в уравнение $6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2$

Отсюда: $$\begin{cases} -6A = 1 \\ 6A - 4B = 0 \\ 2B - 2C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A = -1/6 \\ B = -1/4 \\ C = -1/4 \end{matrix}$$

$$y_{0н} = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

4) Чтобы решить задачу Коши, нужно найти C_1 и C_2, воспользовавшись начальными условиями:

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \\ y' = 2C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = 2C_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_1 = -\frac{1}{8} \\ C_2 = \frac{1}{8} \end{matrix}$$

Ответ: $y = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$ – искомое решение.

VI. $y'' + y = tgx$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + y = 0$ и найдем корни его характеристического уравнения

$$k^2 + 1 = 0 \quad k_{1,2} = \pm i$$

т.е. функции $y_1 = cosx$ и $y_2 = sinx$ будут частными решениями этого однородного уравнения.

2) Запишем решение неоднородного уравнения в виде:

$y = C_1(x)cosx + C_2(x)sinx$ и составим систему уравнений для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' \cdot cosx + C_2' sinx = 0 \\ -C_1' \cdot sinx + C_2' cosx = tgx \end{cases}$$

Применим метод Крамера для решения системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = cos^2x + sin^2x = 1$$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & sinx \\ tgx & cosx \end{vmatrix} = -tgx \cdot sinx = -\frac{sin^2x}{cosx}$$

$$\Delta_{c_2'} = \begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -sinx & tgx \end{vmatrix} = cosx \cdot tgx = sinx$$

Тогда $c_1' = \frac{\Delta_{c_1'}}{\Delta} = -\frac{sin^2x}{cosx} \rightarrow C_1 = -\int \frac{sin^2x}{cosx} dx = -\int \left(\frac{1}{cosx} - cosx\right) dx =$
$= -\ln tg(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + sinx + C_1^*$

$c_2' = \frac{\Delta_{c_2'}}{\Delta} = sinx \rightarrow c_2 = \int sinxdx = -cosx + C_2^*$

Ответ: $y_{0н} = \left[sinx - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C_1^*\right] cosx + [C_2^* - \cos x] \cdot sinx =$
$= C_1^* cosx + C_2^* sinx - cosx \cdot \ln tg(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

I. Найти общее решение уравнения:

1. $\left(y + \sqrt{xy}\right) \cdot dx = xdy$
2. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$
3. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
4. $xy' - y = (x + y) \cdot \ln\frac{x+y}{x}$
5. $y^2 + x^2y' = xy \cdot y'$
6. $(x + 2y)dx = xdy$
7. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
8. $xy' - y = x \cdot tg\,\frac{y}{x}$
9. $(3x^3 + 6xy^2)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$
10. $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$
11. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x} = 0$
12. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \cdot dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$
13. $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0$
14. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$
15. $xdy - ydx = ydy$

16. $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2 dy$

17. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx - (2x^2 + 3xy)dy = 0$

18. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$

19. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

20. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$

21. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

22. $xy' = y \cdot \ln \frac{y}{x}$

23. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

24. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

25. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

I. Найти общее решение уравнения:

1. $xy' + 2y = 3x$
2. $xy' + 3y = x^2$
3. $y' + 2y = e^x$
4. $(1 + x^2) \cdot y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
5. $y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$
6. $y' \cdot sinx - y = 1 - cosx$
7. $y' + y \cdot cosx = sinx \cdot cosx$
8. $(1 - x^2) \cdot y' + xy = 1$
9. $y' + x^2y = x^2$
10. $xy' + y = y^2 \ln x$
11. $y' + 2xy = 2x^3y^3$
12. $(1 - x^2) \cdot y' - xy = a \cdot xy^2$
13. $3y^2y' - a \cdot y^3 = x + 1$
14. $y' - y \cdot tgx = \sec x$
15. $xy' + y = e^x$
16. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$
17. $y' - y \cdot tgx + y^2 \cdot cosx = 0$
18. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$
19. $(1 - 2xy) \cdot y' = y \cdot (y - 1)$
20. $xy' + (x + 1) \cdot y = 3x^2e^{-x}$
21. $(2e^y - x) \cdot y' = 1$
22. $y' = 2x \cdot (x^2 + y)$
23. $(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y$
24. $(3y \cdot e^{3x} + 2x)dx + (e^{3x} + 5) \cdot dy = 0$
25. $y' = \frac{y}{3x} - y^2$

II. Найти общее решение уравнения:

1. а) $y'' - x = 3e^{2-5x}$;

   б) $3y'' = y^{-5/3}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

2. а) $y'' - \frac{y'}{x(2+\ln x)} = 2 + \ln x$;

   б) $-2y \cdot y'' = 1 - (y')^2$

3. а) $xy'' + (y')^2 \cdot x - y' = 0$;

   б) $y\, y'' = -\frac{1}{2}(y')^2$

4. а) $\frac{y'}{x} + y'' = 0$;

   б) $y' \cdot [1 + (y')^2] = ay''$

5. а) $y'' - \frac{3+e^x}{3x+e^x} \cdot y' = 3x + e^x$;

   б) $y'' \cdot y^2 - y' = 0$

6. а) $(x + cosx) \cdot y'' - (1 - sinx) \cdot y' = (x + cosx)^2$;

   б) $y'' = e^y$

7. а) $-(1 + e^x) \cdot y'' + e^x \cdot y' + (1 + e^x)^2 = 0$;

   б) $y'' = y \cdot y'$

8. а) $y'' \cdot tgx = y' + 1$;

   б) $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4, y'(0) = 2$

9. а) $x^2y'' = (y')^2$;

   б) $2y \cdot y'' = (y')^2$

10. а) $y'' \cdot (e^x + 1) + y' = 0$;

    б) $y \cdot y'' = (y')^2$

11. а) $(1 + x) \cdot y'' + y' = 0$;

    б) $2\, y'' = 3y^2$, $y(-2) = y'(-2) = 1$

12. а) $xy'' = y' \cdot \ln\frac{y'}{x}$;
б) $y \cdot y'' + (y')^2 = 1$

13. а) $(1 + sinx) \cdot y'' - y' \cdot cosx = 0$;
б) $y'' \cdot y^3 = 1$

14. а) $2xy'' - y' = 0$;
б) $y \cdot y'' = (y')^3 - (y')$

15. а) $xy'' + y' = 3x + 1$;
б) $y'' = e^y \quad y\,(0) = 0 \;, y'(0) = \sqrt{2}$

16. а) $xy'' + y' + x = 0$;
б) $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$

17. а) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;
б) $(y'') \quad = y^3 \quad y\,(1) = 4 \;, y'(1) = \sqrt{2}$

18. а) $xy'' = y' + x \cdot sin\frac{y\prime}{x}$;
б) $y \cdot y'' + (y')^2 + 1 = 0$

19. а) $(y'')^2 = 4y'$;
б) $y'' = 8y^3 \quad y\,(0) = 1 \;, y'(0) = 2$

20. а) $y'' = 1 + \frac{y\prime}{x}$;
б) $\cdot\, y^3 \quad y'' = -1 \quad y\,(-1) = 1 \;, y'(-1) = 1$

21. а) $(1 + x^2) \cdot y'' + (y')^2 + 1 = 0$;
б) $y'' + \frac{2}{1-y} \cdot (y')^2 = 0$

22. а) $y'' = y'$;
б) $y^3 \cdot y'' = y'$

23. а) $y'' + 2xy' = 0$;
б) $y'' = 18\ y^3$ $\qquad y\,(1) = 1\ ,\ y'(1) = 3$

24. а) $y' = xy''$;
б) $y \cdot y'' = (y')^2 + 1$

25. а) $(y'')^2 = 4(y' - 1)$;
б) $y''y^3 = y^4 - 16\ \ y\,(0) = 2\sqrt{2}\,,\ y'(0) = \sqrt{2}$

IV. Найти вид общего решения уравнений
(без нахождения неопределенных коэффициентов)

1. а) $y''' - 2y' = 5e^{2x}$;
б) $y'' + 2y' + 5y = 2x \cdot sin2x$

2. а) $y''' - 3y'' + 2y' = xe^{x}$;
б) $y'' + 2y' + 10y = x^3 \cdot cos3x$

3. а) $y''' - 9y'' + 2y' = 4e^{-4x}$;
б) $5y'' - 6y' + 5y = x^2 \cdot cos\frac{4}{3}x$

4. а) $y''' + 5y'' - 14y' = 2xe^{-2x}$;
б) $y'' + 4y' + 13y = x(sinx + cosx)$

5. а) $y''' - 3y'' - 4y' = 5x \cdot e^{-x}$;
б) $y'' + 4y' + 5y = (x^2 - x + 3) \cdot cos3x$

6. а) $y''' - 4y'' - 12y' = e^{-2x}$;
б) $y'' + 4y' + 29y = x^2cos5x$

7. а) $y''' + y'' - 12y' = 2x \cdot e^{-4x}$;
б) $y'' - 2y' + 2y = (x + 2) \cdot sin3x$

8. а) $y''' - 9y'' + 8y' = 8e^{8x}$;
б) $y'' + y = 8x \cdot cosx$

9. а) $y''' - 6y'' + 8y' = x \cdot e^{4x}$;
б) $y'' + 9y = (x^2 + 1) \cdot sin3x$

10. а) $y''' + 3y'' - 4y' = 2x \cdot e^{3x}$;
б) $y'' + 4y = x^3 \cdot cos3x$

11. а) $y''' - 2y'' - 8y' = -e^{-2x}$;
б) $y'' + y' + y = 5x \cdot sinx$

12. а) $y''' - 2y'' - 24' = (x + 5) \cdot e^{6x}$;
б) $y'' - 2y' + 3y = x^2(cos2x + sin2x)$

13. а) $y''' + 2y'' - 24y' = (x - 2) \cdot e^{-2x}$;
б) $y''' + 16y = (x^3 + 1) \cdot sin4x$

14. а) $y''' + 4y'' - 4y' = e^{4x}$;
б) $y'' - 4y' + 8y = x \cdot cos2x$

15. а) $y''' + 3y'' - 4y' = x \cdot e^{-4x}$;
б) $y'' - 2y' + 26y = (x^2 + 2x - 1)sin5x$

16. а) $y''' - 9y'' + 8y' = 5e^{-x}$;
б) $y'' + 2y' + 5y = x^2(cos2x + sin2x)$

17. а) $y''' + 4y'' - 5y' = e^{x}$;
б) $y'' + 2y' + 10y = (2x + 1)sin3x$

18. а) $y''' + 3y'' - 28y' = 4e^{7x}$;
б) $5y'' - 6y' + 5y = xsin\frac{4}{3}x$

19. а) $y''' + 8y'' + 15y' = 7x \cdot e^{2x}$;
б) $y'' - 4y' + 13y = (x - 1)cos3x$

20. а) $y''' + y'' - 2y' = e^{-2x;}$
б) $y'' - 4y' + 5y = (x^2 + 1)sinx$

21. а) $y''' + 6y'' + 5y' = x \cdot e^{-5x}$;
 б) $y'' - 4y' + 29y = x(sin5x - cos5x)$

22. а) $y''' + 10y'' + 16y' = 1$;
 б) $y'' + 2y' + 2y = xsinx - (x-2)cosx$
23. а) $y''' + 10y'' + 21y' = 4x \cdot e^{-7x}$;
 б) $y'' + y = x^2 sinx$

24. а) $y''' + 9y'' + 20y' = 1$;
 б) $y'' + 9y = (2x-1)sin2x$

25. а) $y''' + 11y'' + 28y' = -12e^{-4x}$;
 б) $y'' + 4y = 5xcos2x$

V. Решить задачу Коши

1. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y(0) = 1; y'(0) = 1$
2. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y(0) = -1; y'(0) = 1$
3. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y(0) = 0; y'(0) = 1$
4. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = 2; y'(0) = 2$
5. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = \frac{1}{2}; y'(0) = 0$
6. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = 0; y'(0) = -1$
7. $2y'' + 5y' = e^x$ $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$
8. $2y'' + 5y' = e^x$ $y(0) = 0$; $y'(0) = \frac{1}{7}$
9. $2y'' + 5y' = e^x$ $y(0) = -\frac{1}{7}$; $y'(0) = \frac{6}{7}$
10. $y'' + 2y' = e^{-2x}$ $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
11. $y'' + 2y' = e^{-2x}$ $y(0) = 1$; $y'(0) = -\frac{1}{2}$
12. $y'' + 2y' = e^{-2x}$ $y(0) = -\frac{1}{2}$; $y'(0) = \frac{1}{2}$
13. $y'' - 3y' = 3x^2$ $y(0) = 2$; $y'(0) = \frac{2}{25}$
14. $y'' - 3y' = 3x^2$ $y(0) = 1$; $y'(0) = -\frac{2}{9}$
15. $y'' - 3y' = 3x^2$ $y(0) = \frac{1}{3}$; $y'(0) = \frac{7}{9}$
16. $y'' - 6y' = x^2 + 1$ $y(0) = 0$; $y'(0) = \frac{1}{27}$

17. $y'' - 6y' = x^2 + 1 \quad y(0) = \frac{1}{8}; \quad y'(0) = -\frac{2}{27}$
18. $y'' - 6y' = x^2 + 1 \quad y(0) = \frac{1}{26}; \quad y'(0) = \frac{19}{108}$
19. $y'' - 2y' = 3x \quad y(-1) = 1; \; y'(-1) = 2$
20. $y'' - 2y' = 3x \quad y(-1) = -1; \; y'(-1) = 0$
21. $y'' - 2y' = 3x \quad y(-1) = 0; \; y'(-1) = \frac{1}{e^2}$
22. $y'' - 4y' = xe^{4x} \quad y(0) = \frac{1}{4}; \quad y'(0) = 0$
23. $y'' - 4y' = xe^{4x} \quad y(0) = \frac{1}{2}; \quad y'(0) = -\frac{1}{16}$
24. $y'' - 4y' = xe^{4x} \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = \frac{3}{16}$
25. $2y'' - y' = e^{\frac{x}{2}} \qquad y(1) = 0; \quad y'(1) = \sqrt{e}$

VI. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных

1,2) $y'' + y = \frac{1}{cosx}$

3,4) $y'' + y = \frac{1}{sinx}$

5,6) $y'' + y = -ctg^2x$

7,8) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$

9,10) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

11,12) $y'' + 4y = \frac{1}{sin2x}$

13,14) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

15,16) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$

17,18) $y'' + 4y = tg2x$

19,20) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}(x^2 + 2x + 2)$

21,22) $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$

23,24) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$

25,26) $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах ч. I и II –М . Айрис-пресс 2008.

2. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. –М.-Айрис-пресс 2007.

3. Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике ч. IV. Интегралы. Дифференциальные уравнения. – М. РИО МГТУ ГА 2005. №1448