Учебный план дисциплины.

Студенты дневного отделения изучают математику на I и II курсах. Общий объем учебных часов на дисциплину 600 часов.

В первом семестре изучаются следующие разделы: линейная алгебра, векторный анализ, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Цель преподавания дисциплины: дать студентам практическую подготовку и теоретические основы по математике для успешного освоения фундаментальных, общетехнических и специальных предметов учебного курса.

Задачи изучения математики.

1. Знать основные понятия и методы исследования и решения задач читаемой дисциплины.
2. Уметь применять математические методы к решению задач; проводить конкретные расчеты в рамках выполнения аудиторных и домашних заданий.
3. Иметь представление о математической символике для выражения количественных и качественных соотношений объектов; о применении теоретических рассуждений при доказательстве теорем.

Общие рекомендации студенту по работе над курсом математики.

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1. Изучение материала по лекциям.
2. Изучение материала по учебнику.
3. Выполнение еженедельных домашних заданий.
4. Выполнение контрольных домашних заданий (КДЗ).

Студент может обращаться к преподавателю для получения консультации, посещать имеющиеся факультативные занятия.

Указания к выполнению КДЗ.

1. Каждое контрольное домашнее задание должно выполняться в отдельной тонкой тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 6 см. для замечаний преподавателя.
2. На титульном листе тетради должны быть четко написаны фамилия студента, его инициалы, название дисциплины, номер выполняемого варианта. Как правило, номер варианта задается преподавателем.
3. Решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, обязательно записывая условия каждой задачи.
4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
5. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №1

«Аналитическая геометрия»

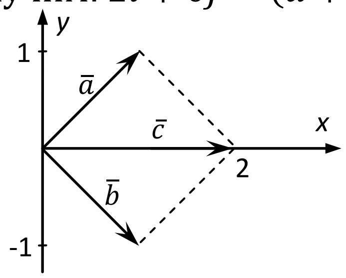
Вариант 0

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = \{2, 0\}$ по векторам $\overline{\mathrm{a}} = \{1{,}1\}$ и $\overline{\mathrm{b}} = \{1{,}-1\}$
2. Найти длину вектора $\overline{p} + 2\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $\left|\overline{a}\right| = 1$; $\left|\overline{b}\right| = 3$; $\overline{a}\hat{\ }\overline{b} = \frac{2}{3}\pi$.
3. Найти вектор $\overline{\mathrm{x}}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2, 1, -2\}$ и удовлетворяющий условию $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = 27$.
4. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ и $\overline{q} = \overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$, где $\overline{a}; \overline{b}; \overline{c} -$ единичные взаимноперпендикулярные векторы (косинус угла).
5. Найти направляющие косинусы вектора силы $\overline{\mathrm{F}} = \{1, -1, 1\}$, приложенной в точке B(5, 1, 0), и момент этой силы относительно точки A(3, 2, -1).

6. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\overline{b} = \{2, 0, 1\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $\left|\overline{x}\right| = \sqrt{6}$.
7. Определить, лежат ли точки A(1, 2, 3); B(0, 5, 5); C(3, -1, -1); D(-2, 14, 9) в одной плоскости.
8. В треугольнике ABC известны координаты вершины A(4, 0) и уравнения высоты BE: $2x - 3y + 15 = 0$ и медианы BD: $2x + 3y - 3 = 0$. Составить уравнения сторон треугольника.
9. Найти длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если D(1, 6, 3), A(4, 5, 2), B(-1, 11, 6) и C(2, -1, 3).
10. Найти радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением. $y^2+x^2+8y - 10x + 37 = 0$.

I. Решение

Разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это значит представить $\overline{c}$ в виде $c = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$, где α и β пока неизвестные числа. Переходя к координатам, получим: $2\overline{i} + 0\overline{j} = (\alpha + \beta)\overline{i} + (\alpha - \beta)\overline{j}$.



В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases},$$

решением которой являются $\alpha = 1$ и $\beta = 1$.

Отсюда $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Ответ: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

2. Решение

Как известно, модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора $|\overline{p} + 2\overline{q}| = \sqrt{(\overline{p} + 2\overline{q})^2}$. Находим скалярный квадрат $(\overline{p} + 2\overline{q})^2 = \left(\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{a} + 4\overline{b}\right)^2 = \left(3\overline{a} + 3\overline{b}\right)^2 = 9(\overline{a}^2+2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2) =$
$= 9\left(1 + 2 * 3 * cos\frac{2}{3}\pi + 9\right) = 63$. Отсюда $\left|\overline{p} + 2\overline{q}\right| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

Ответ: $3\sqrt{7}$

3. Решение

В силу коллинеарности вектор $\overline{x}$ можно представить в виде $\overline{x} = \lambda\overline{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = \lambda\overline{a}^2 = \lambda(4 + 1 + 4) = 9\lambda = 27$. Отсюда $\lambda = 3$ и $\overline{x} = 3\overline{a} = \{6,3,-6\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{6,3,-6\}$

4. Решение

Известно, что диагонали параллелограмма можно найти

$$\overline{d}1 = \overline{p} + \overline{q} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 0\overline{c}$$

$$\overline{d}2 = \overline{p} - \overline{q} = \overline{a} + 4\overline{b} - 2\overline{c}$$

т.к. векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ представляют собой единичные взаимно перпендикулярные вектора, то их можно считать координатным базисом, тогда для нахождения требуемого угла воспользуемся формулой

$$cos(\overline{d}_1 \wedge \overline{d}_2) = \frac{\overline{d}1 * \overline{d}2}{|\overline{d}1| * |\overline{d}2|} = \frac{3*1+(-2)*4+0*(-2)}{\sqrt{3^2+1^2} * \sqrt{1^2+4^2+2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{13} * \sqrt{21}} = \frac{-5}{\sqrt{273}}$$

Ответ: $\frac{-5}{\sqrt{273}}$

5. Решение

Находим направляющие косинусы вектора силы $|\overline{F}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$\cos\alpha = \frac{Fx}{|\overline{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \frac{Fy}{|\overline{F}|} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma = \frac{Fz}{|\overline{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

момент силы как векторное произведение вектора $\overline{AB} =$
$= \{5-3; 1-2; 0-(-1)\} = \{2, -1, 1\}$ на вектор $\overline{F}$:

$$\overline{m} = [[\overline{AB}, \overline{F}]] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{j} - \overline{k}.$$ Следовательно, $\overline{m} = \{0, -1, -1\}$.

Ответ: $\overline{m} = \{0, -1, -1\}$.

6. Решение

Найдем вектор $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$, следовательно,

$$\overline{c} = [[\overline{a}, \overline{b}]] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$$

Поскольку вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то он коллинеарен вектору $\overline{c}$. Следовательно, $\overline{x} = \lambda * \overline{c} = \{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$.

Так как $|\overline{x}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6}|\lambda| = \sqrt{6}$, то $\lambda = \pm 1$. Вектор $\overline{x}$ образует тупой угол с осью OX, поэтому его проекция (координата) на эту ось должна быть отрицательной, отсюда $\lambda = -1$ и $\overline{x} = -\overline{c} = \{-1, -1, 2\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{-1, -1, 2\}$.

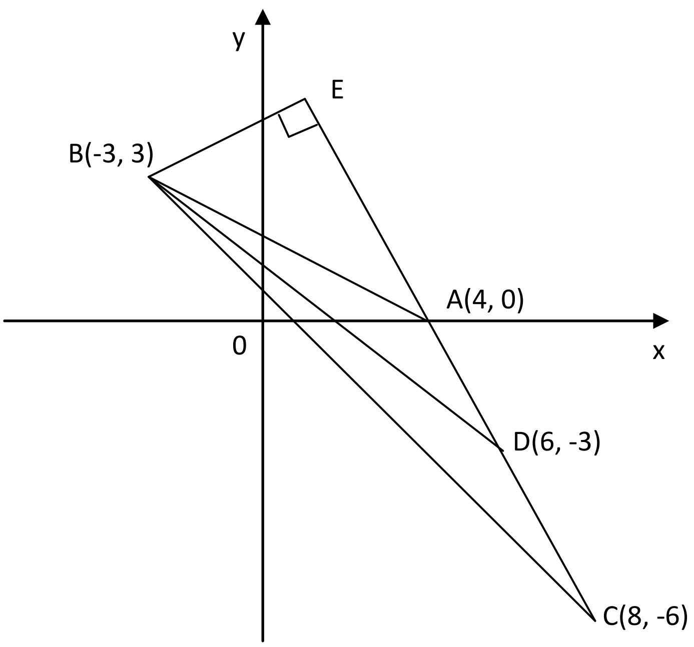
7. Решение

Рассмотрим три вектора $\overline{AB} = \{-1, 3, 2\}$, $\overline{AC} = \{2, -3, -4\}$ и $\overline{AD} = \{-3, 12, 6\}$. если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны. Для проверки составляем смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 43 - 18 - 36 - 48 = 0,$$

следовательно, векторы компланарны и точки лежат в одной плоскости.

8. Решение



Сделаем для облегчения рассуждений чертеж. Находим координаты вершины B как точки пересечения BD и высоты BE:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 \\ 2x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Составим уравнение AC, для чего определим её угловой коэффициент из условия перпендикулярности AC и BE:

$$K_{BE} = \frac{2}{3}; K_{AC} = \frac{-1}{K_{BE}} = -\frac{3}{2}$$

Зная угловой коэффициент и одну точку, находим уравнение АС:

$$y = -\frac{3}{2}(x - 4) \text{ или } 2y + 3x - 12 = 0.$$

Находим координаты D как точки пересечения медианы BD и стороны AC:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

Находим координаты вершины C, используя то, что D делит отрезок AC пополам, *C(8, -6)*. Зная координаты всех вершин треугольника, составляем уравнения сторон AB и BC как прямых, проходящих через заданные точки.

$$AC\text{:}\ \frac{y-3}{0-3} = \frac{x+3}{4+3} \quad \text{или} \quad 3x + 7y - 12 = 0$$

$BC: \frac{y-3}{-6-3} = \frac{x+3}{8+3}$ $\qquad 11y + 9x - 6 = 0.$

Ответ: $AC: 3x + 7y - 12 = 0$

$BC: 11y + 9x - 6 = 0$

9. Решение

Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение этой плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -1-4 & 11-5 & -6-2 \\ 2-4 & -1-5 & 3-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y-5) \cdot \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-42(x-4) + 21(y-5) + 42(z-2) = 0 \Rightarrow 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

Находим теперь расстояние от D до плоскости ABC:

$$h = \frac{|2*1 - 1*6 - 2*3 + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: h = 3

10. Решение

Приводим уравнение к каноническому виду, выделяя полные квадраты $(x^2 - 10x + 25) - 25 + (y^2 + 8y + 16) - 16 + 37 = 0$ или $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 4.$

Полученное уравнение определяет окружность радиуса 2 с центром в точке (5, -4).

Ответ: Окружность R = 2, центр (5, -4)

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

Вариант 1.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (4, 5)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) =$
$= (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$, Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})\ (\overline{b} + 3\overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (5, 2, 5)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(-1, 1, 0)$ и $B(1, 0, 2)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 6$. Найти, при каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F} = (3, 3, 3)$, приложенной в точке $B(3, -1, 5)$ относительно точки $A(4, -2, 3)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Вычислить $|[\overline{a}\overline{b}]|$, если $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 15$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$.

7. При каком λ векторы $\overline{a} = (3\lambda, 1, 4)$, $\overline{b} = (3, 2\lambda, -6)$ и $\overline{c} = (3, 1, -2)$ будут компланарны?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(1, 2)$ и $C(-1, -5)$.

9. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2, 1, -1)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n} = (1, -2, 3)$.

Вариант 2.

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = (3, 6)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{b} + 3\overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (3, 2, 2)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A\ (1, -2, 7)$ и $B(4, 2, 7)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$. Найти, при каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F} = (4, 4, 4)$, приложенной в точке $B(4, -2, 5)$ относительно точки $A(5, -3, 3)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 60^0$.

7. При каком λ векторы $\overline{a} = (\lambda, 3, 2)$, $\overline{b} = (2, -3, -4)$ и $\overline{c} = (-3, 12, 6)$ будут компланарны?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(-1, 0)$ и $C(2, 3)$.

9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:
   а) $A(0, -2, 3)$ и $B(3, -2, 1)$;
   б) $A(1, 2, -4)$ и $B(0, 1, -1)$.

Вариант 3.

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = (2, 7)$ по векторам $\overline{\mathrm{a}} = (5, 4)$ и $\overline{\mathrm{b}} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$. Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (3, 2, 1)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(2, -2, 0)$ и $B(-2, 2, 2)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 10$. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (5, 5, 5), приложенной в точке B(5, -3, 5) относительно точки A(6, -4, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. При каком α векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 5\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

7. При каком λ векторы $\overline{a}$ = (1, 3, λ), $\overline{b}$ = (4, 5, -1) и $\overline{c}$ = (2, -1, 5) будут компланарны?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2, -2) параллельно прямой, соединяющей точки B(-5, 4) и C(0, 2).

9. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:
   а) A(4, 5, 13) и B(-6, 0, 1);
   б)A(-11, 0, 10) и B(1, 2, 3).

Вариант 4.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (1, 8) по векторам $\overline{a}$ = (5, 3) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Дано: $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 1, $|\overline{c}|$ = 8, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 90⁰, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})$ = $(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})$ = 60⁰.
   Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (1, 2, 3) на ось вектора $\overline{AB}$, если A(-3, 1, 4) и B(3, 3, 1).

4. Дано: $|\overline{a}|$ = 4, $|\overline{b}|$ = 1. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (6, 6, 6), приложенной в точке B (6, -4, 5) относительно точки A(7, -5, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1, 2, 3)$, $B(5, 1, 4)$ и $C(3, 2, 2)$.

7. При каком λ векторы $\overline{a} = (0, 1, \lambda)$, $\overline{b} = (1, 0, \lambda)$ и $\overline{c} = (1, 1, 2)$ будут компланарны?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3, 2)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(2, 1)$ и $C(-5, -1)$.

9. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\overline{n} = (-1, 0, 2)$.

Вариант 5.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (0, 9)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $|\overline{c}| = 2$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$. Найти $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(3\overline{a} + \overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (-1, 2, -3)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(5, -5, 5)$ и $B(5, 3, 1)$.

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a} = (2, -4, 4)$ и $\overline{b} = (-3, 2, 6)$.

5. Найти момент силы $\overline{F} = (-1, -1, -1)$, приложенной в точке $B(8, -6, 5)$ относительно точки $A(9, -7, 3)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a} = (3, -2, -2)$ и $\overline{b} = (1, -2, -1)$.

7. При каком λ векторы $\overline{a} = (0, 1, \lambda)$, $\overline{b} = (1, 3, 4\lambda)$ и $\overline{c} = (1, 1, 2\lambda)$ будут компланарны?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -2) параллельно прямой, соединяющей точки B(0, 7) и C(7, 0).

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A(2, 0, 2) параллельно прямой:
$x = 2 + 2t, \quad y = 3 + 3t, \quad z = 7 - 4t.$

Вариант 6.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (-1, 10) по векторам $\overline{a}$ = (5, 4) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Найти $(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2$, если $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 4, $|\overline{c}|$ = 2, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 60^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (2, 4, -6) на ось вектора $\overline{AB}$, если A(2, -2, 1) и B(3, -1, 0).

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (-4, 2, 4) и $\overline{b}$ = (6, 2, -3).

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-1, -1, -1), приложенной в точке B(8, -6, -5) относительно точки A(9, -7, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 3, 4), B(1, 0, 6) и C(4, 5, -2).

7. При каком λ векторы $\overline{a}$ = (λ, 2, -3), $\overline{b}$ = (1, -1, 4) и $\overline{c}$ = (1, -2, 3) будут компланарны ???

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 6) и перпендикулярной к прямой, соединяющей точки B(-1, 4) и C(-2, 3).

9. Точка P(0, -1, -2) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Вариант 7.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (-2, 11) по векторам $\overline{a}$ = (3, 4) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Вычислить $(\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{b} - 2\overline{c})$, если $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 3, $|\overline{c}|$ = 4, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 60^0$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (1, -3, 1) на ось вектора $\overline{AB}$, если A(-5, 7, -6) и B(7, -9, 9).

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (1, 1, 1) и $\overline{b}$ = (2, 2, 2).

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-2, -2, -2), приложенной в точке B(9, -7, 5) относительно точки A(10, -8, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $2\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 30^0$.

7. Лежат ли точки A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1) и D(2, 1, 3) в одной плоскости?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 3) и перпендикулярной к прямой, соединяющей точки B(2, -1) и C(-8, 2).

9. Точка P(-2, 1, -2) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Вариант 8.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (-3, 12) по векторам $\overline{a}$ = (5, 4) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Найти $(\overline{a} + \overline{b} - \overline{c})^2$, если $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 3, $|\overline{c}|$ = 4, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$. $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 60^0$

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (2, 3, 4) на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(1, 1, 1)$ и $B(3, 3, 2)$.

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (8, 6, 0) и $\overline{b}$ = (1, 0, 0).

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-3, -3, -3), приложенной в точке $B(10, -8, 5)$ относительно точки $A(11, -9, 3)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}$ и $3\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 5, $|\overline{b}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 45^0.

7. Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-7, 1)$ перпендикулярно прямой, соединяющей точки $B(0, -2)$ и $C(7, 1)$.

9. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:
   а) $A(2, 3, -1)$ и $B(-1, 2, 3)$;
   б) $A(0, 1, 2)$ и $B(2, 0, 1)$.

Вариант 9.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (-4, 13) по векторам $\overline{a}$ = (5, 4) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Дано $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})$ = $(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})$ = 60^0.
   Найти $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})\ (2\overline{a} - \overline{b})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (1, 2, 3) на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(0, 0, 0)$ и $B(4, 4, 2)$.

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (2, 1, 3), $\overline{b}$ = (-3, 3, 1).

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-4, -4, -4), приложенной в точке B(11, -9, 5) относительно точки A(12, -10, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Вычислить $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|$ = 12, $|\overline{b}|$ = 10, $|[\overline{a},\overline{b}]|$ = 72 и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – острый.

7.Лежат ли точки A(0, -1, 2), B(-2, 4, 1), C(5, 3, 7) и D(4, 0, 3) в одной плоскости?

8. Найти точку A, симметричную точке B(-2, 1) относительно прямой $3x + 2y - 1 = 0$.

9.Через точки A(0, -1, -2) и B(2, 1, 0) проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

Вариант 10.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (-5, 14) по векторам $\overline{a}$ = (5, 4,) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Вычислить $(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2$, если $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5 и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (2, 4, 3) на ось вектора $\overline{AB}$, если A(1, 1, 1) и B(3, 5, 5).

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (4, 2, 4) и $\overline{b}$ = (3, 4, 0).

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-5, -5, -5), приложенной в точке B(12, -10, 5) относительно точки A(13, -11, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 6$, $|[\overline{a},\overline{b}]| = 15$ и угол $(\overline{a}\hat{}\,\overline{b})$ – острый.

7. Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(1, -2, -2), C(0, -2, -1) и D(2, -3, -2) в одной плоскости?

8. Найти точку A, симметричную точке $B(1, 2)$ относительно прямой $3x + 5y - 4 = 0$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 2, 0)$ параллельно векторам $\overline{a}$ = (1, -1, 0) и $\overline{b}$ = (0, 4, -2).

Вариант 11.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (3, -1) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Найти угол между векторами $\overline{p} = \overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 2\overline{a} - \overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$, если A(-2, 3, -4), B(3, 2, 5), C(1, -1, 2) и D(3, 2, -4).

4. Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (2 α, α, 2) и $\overline{b}$ = (2, -3, -1) будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (3, -3, 3), приложенной в точке B(5, -3, 1) относительно точки A(4, -2, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Является ли четырехугольник с вершинами в точках A(2, -1, 3), B(1, 2, -1), C(-4, 7, 5) и D(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

7. Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(-2, 1, -2), C(-1, 0, -2) и D(3, 2, 1) в одной плоскости?

8. Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины А, если координаты вершин известны: A(-2, 3), B(5, 7) и C(-3, -2).

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1, 2, -1) и B(0, 3, 2) параллельно вектору $\overline{a}$ = (3, 4, 7).

Вариант 12.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (4, 1) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{\mathrm{b}}$ = (1, 2).

2. Вычислить $(2\overline{a} - 5\overline{b})^2$, если $|\overline{a}|$ = 11, $|\overline{b}|$ = 2 и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 90^0.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$, если A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(0, 1, 2) и D(2, 3, 1).

4. Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (α, -3α, 1) и $\overline{b}$ = (1, 2, -10) будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (4, -4, 4), приложенной в точке B(6, -4, 1) относительно точки A(5, -3, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Вычислить синус угла между векторами $\overline{a}$ = (2, 3, -1) и $\overline{b}$(1, 2, 3).

7. Лежат ли точки A(1, 1, 1), B(2, 0, 1), C(3, 1, -1) и D(4, -2, -2) в одной плоскости?

8. Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если координаты вершин известны: A(-1, 1), B(6, 5) и *C(-2, -4).*
9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-4, 3, 2) и B(2, 1, -1) параллельно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{2+1}{-1}$

Вариант 13.

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (5, 3) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Вычислить $(3\overline{a}$ - $2\overline{b})$ * $(\overline{b}$ + $3\overline{c})$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 5, $|\overline{c}|$ = 8, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 90⁰, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})$ = $(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})$ = 60⁰.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$, на ось вектора $\overline{CD}$, если $A(1, 2, 3)$, $B(3, 5, 0)$, $C(2, 3, 4)$ и $D(3, 4, 5)$.

4. Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = (2α, 3, 2) и $\overline{b}$ = (1, 2, -3α) будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (5, -5, 5), приложенной в точке $B(7, -5, 1)$ относительно точки $A(6, -4, 3)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 5, $|\overline{b}|$ = 2 и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ = 60⁰.

7. При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

8.Определить острый угол между медианой и высотой треугольника ABC, проведенными из вершины A, если координаты вершин известны: $A(-3, 5)$, B(4, 9) и $C(-4, 0)$.

9. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x - z - 4 = 0$ и $x + y - 2z + 1 = 0$.

Вариант 14.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (6, 5) по векторам $\overline{a}$ = (-2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 2, $(\overline{a} - \overline{b})^2$ + $(\overline{a} + 2\overline{b})^2$ = 20.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$, если $A(2, 3, 4)$, $B(0, 0, 0)$, $C(2, 1, 1)$ и $D(2, 3, 1)$.

4. Определить, при каком α векторы $\overline{a} = (1, 3\alpha, 2)$ и $\overline{b} = (2, 3\alpha, -3)$ будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F} = (5, -6, 6)$, приложенной в точке $B(8, -6, 1)$ относительно точки $A(7, -5, 3)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a} = (0, 1, 2)$ и $\overline{b}(2, 0, 1)$, образует тупой угол с осью OX и $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.

7. При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$ и $C(1, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

8. В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин: $A(5, 6)$, $B(-2, 2)$ и $C(-3, -3)$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 2, 5)$ параллельно оси OZ.

Вариант 15.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (7, 7)$ по векторам $\overline{a} = (2, -3)$ и $\overline{b} = (1, 2)$.

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 45^0$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$, если $A(2, 3, 5)$, $B(1, 1, 1)$, $C(2, 3, 0)$ и $D(1, 2, 3)$.

4. Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = (α -4, α, 4) и $\overline{b}$ = (α, -1, 1) будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (7, -7, 7), приложенной в точке B(9, -7, 1) относительно точки A(8, -6, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (1, α, 1) и $\overline{b}$ = (2, 1, 0), равна $\sqrt{6}$.

7. При каком значении х точки $M(x$, 0, 0), A(1, 1, 1), B(2, 1, 0) и C(1, 0, 2) лежать в одной плоскости?

8. В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин треугольника: A(6, 4), B(-1, 0) и C(-2, -5).

9. Составить параметрические и канонические уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x + 4y - 7z + 8 = 0$ и $5x + 2y - 5z - 2 = 0$

Вариант 16.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (8, 9) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 2\overline{a} - \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} + \overline{b}$ как на сторонах, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные векторы и ($\overline{a}$^$\overline{b}$) = 60^0.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$, если A(2, 3, 3), B(2, 1, 1), C(7, 3, 4) и D(1, 1, 1).

4. Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = (2α, 4α, 1) и $\overline{b}$(2, 4, 2) будут взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (8, -8, 8), приложенной в точке B(10, -8, 1) относительно точки A(9, -7, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (1, -2, 3) и $\overline{b}$(2, 1, 1), образует острый угол с осью OZ и $|\overline{c}|$ = 2.

7. При каком значении х точки $M(x$, 0, 0), A(2, 1, 1), B(2, 2, 0) и C(2, 0, 2) будут лежать в одной плоскости?

8. В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если известны координаты вершин треугольника: A(4, 8), B(-3, 4) и C(-4, 1).

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(5, 3, 1) и B(1, 1, 2) параллельно оси OZ.

Вариант 17.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (9, 11) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Найти угол между единичными векторами $\bar{\mathrm{a}}$ и $\bar{\mathrm{b}}$, если векторы $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} - 3\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$, если A(1, 1, 2), B(2, 3, 1), C(0, -1, 2) и D(2, 0, 3).

4. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (0, 3, 4), образует тупой угол с осью OZ и $|\overline{c}|$ = 50.

5. Найти моменты силы $\overline{F}$ = (-2, 2, -2), приложенной в точке B(11, -9, 1) относительно точки A(10, -8, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (3, 0, 1) и $\overline{b}$ = (α, 2, 2), равна $\sqrt{76}$.

7. При каком значении х точки $M(x$, 0, 0), A(2, 2, 2), B(3, 0, 3) и C(0, 4, 2) будут лежать в одной плоскости?

8.В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-5, -2), B(-4, 3) и C(3, 7). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось $OУ$ и точку A(2, -1, 6).

Вариант 18.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (10, 13) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Найти углы между векторами $\overline{a}$ и $\overline{p}$ и $\overline{p}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ - единичные векторы, $\overline{p} = 2\overline{a} - \overline{b}$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 120^0$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$, если A(4, 8, -5), B(8, 8, 10), C(1, 3, 1), D(2, 0, 2).

4. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (-2, -2, 1), образует острый угол с осью $OУ$ и $|\overline{c}|$ = 27.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-3, 3, -3), приложенной в точке B(12, -10, 1) относительно точки A(11, -9, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он образует острый угол с осью OX, перпендикулярен векторам $\overline{a}$ = (0, 0, 1), $\overline{b}$ = (8, -15, 3) и $|\overline{c}|$ = 51.

7. При каком значении х точки $M(x$, 0, 0), A(1, 2, 2), B(3, 2, 0) и C(2, 0, 3) лежат в одной плоскости ?

8. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-4, -4), B(-3,1), и C(4, 5). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку A(-1, 3, -3).

Вариант 19.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (11, 15) по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{c}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$ и $(\overline{c}\,\hat{}\,\overline{a}) = 60^0$.

3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы $\alpha = 60^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma > 90^0$, если A(3, -4, -2), B(2, 5, -2).

4. Доказать, что векторы $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 7\overline{k}$ и $\overline{b} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$ взаимно перпендикулярны.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-4, 4, -4), приложенной в точке B(13, -11, 1) относительно точки A(12, -10, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. В треугольнике с вершинами A(2, -1, 6), B(3, 0, 5) и C(5, 2, 6) найти длину высоты AM.

7. Можно ли векторы $\overline{a}$ = (1, 0, 2), $\overline{b}$ = (-1, 1, 0) и $\overline{c}$ = (1, -1, 2) взять за базисные в трехмерном пространстве?

8. В треугольник ABC известны координаты вершин: A(-6, 0), B(-5, 5) и C(2, 9). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку A(1, 4, 3).

Вариант 20.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (12, 17) и по векторам $\overline{a}$ = (2, -3) и $\overline{b}$ = (1, 2).

2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, ($\overline{a}$^$\overline{b}$) = ($\overline{b}$^$\overline{c}$) = 90^0 и ($\overline{c}$^$\overline{a}$) = 60^0.

3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы α = 60^0, β = 120^0, $\gamma \leq 90^0$, если A(1, 2, 3) и B(3, 4, 1).

4. Найти вектор $\overline{C}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (2, 1, -1) и ($\overline{ca}$) = 3.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (-5, 5, -5), приложенной в точке B(14, -12, 1) относительно точки A(13, -11, 3), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (2, -1, 2) и $\overline{b}$ = (1, α, -1), равна $3\sqrt{2}$.

7. Можно ли векторы $\overline{a}$(-1, 1, 0), $\overline{b}$(1, -1, 1) и $\overline{c}$(0, 2, 1) взять за базисные в трехмерном пространстве?

8. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-3, 5), B(4, 9) и C(-4, 0). Составить уравнение высоты BK и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось $OУ$ и точку A(-1, 0, -3).

Вариант 21.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (5, -3) по векторам $\overline{A}$ = (2, -1) и $\overline{B}$ = (3, -2).

2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, ($\overline{a}$^$\overline{b}$) = ($\overline{b}$^$\overline{c}$) = 90^0 и ($\overline{a}$^$\overline{c}$) = 60^0.

3.Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы α = 45^0, β = 45^0, $\gamma \le$ 90^0, если A(2, 3, 1) и B(1, 0, 3).

4. Найти проекцию вектора $\overline{a}$ = (1, 3, 5) на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (3, 3, -3), приложенной в точке B(0, 1, 2) относительно точки A(2, -1, -2), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти координаты вектора $\overline{C}$, если он составляет тупой угол с осью OY, перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (4, -2, -3), $\overline{b}$ = (0, 1, 3), $|\overline{c}|$ = 26.

7. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A(2, -1, 1),B(5, 5, 4), C(3, 2, -1) и D(4, 1, 3).

8. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(2, -5), B(1, -3), C(4, 1). Найти угол BAC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1, 4, 1), B(2, 3, -1) и C(0, -1, 0).

Вариант 22.

1. Разложить вектор $\overline{c}$ = (7, -4) по векторам $\overline{a}$ = (-2, 1) и $\overline{b}$ = (3, -2).

2. Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{b} - \overline{a} + \overline{c}$, если $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 2, $|\overline{c}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c})$ = 90^0, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})$ = 60^0.

3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы α = 45^0, β = 45^0, $\gamma \le$ 90^0, если A(3, 0, 1), и B(2, 5, 4).

4. Вычислить $\text{Пр}_{\overline{c}}(3\overline{a} - 2\overline{b})$, если $\overline{a}$ = (-2, 1, 1), $\overline{b} = \overline{i} + 5\overline{j}$, $\overline{c} = (4, 4, -2)$.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (4, 4, -4), приложенной в точке B(1, 0, 2) относительно точки A(3, -2, -2), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{\mathrm{F}}$.

6. При каких α и β вектор $\overline{c} = \alpha\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$, будет коллинеарен вектору $[\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}}]$, если $\overline{\mathrm{a}}$ = (3, -1, 1) и $\overline{\mathrm{b}}$ = (1, 2, 0)?

7. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A(1, 2, 3), B(6, 0, 0), C(1, 4, 9) и D(1, 8, 3).

8. В треугольнике ABC известны координаты вершин: A(-4, -4), B(-3, 1) и C(4, 5). Найти угол ABC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1, 0, 1) и B(2, 3, 4) параллельно оси OZ.

Вариант 23.

1. Разложить вектор $\overline{c} = (9, -5)$ по векторам $\overline{a} = (-2, 1)$ и $\overline{b} = (3, -2)$.

2. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ = 1 и векторы $\overline{a} + 3\overline{b}$ и $7\overline{a} - 5\overline{b}$ перпендикулярны.

3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы α = 90^0, β = 45^0, γ > 90^0, если A(2, 0, 0) и B(1, 5, 4).

4. Найти модуль вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})$ = $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})$ = 60^0, $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})$ = 90^0.

5. Найти момент силы $\overline{F} = (5, 5, -5)$, приложенной в точке B(2, -1, 2) относительно точки A(4, -3, -2), а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти проекцию вектора $\overline{p} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ на вектор $[[\overline{a}, \overline{b}]]$, где $\overline{a} = \overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = -\overline{j} + 5\overline{k}.$

7.Вычислить оббьем пирамиды с вершинами в точках $A(2, 1, 3)$, $B(4, -2, 0)$, $C(1, 3, -8)$ и $D(7, 5, 2)$.

8. В треугольнике ABC с вершинами $A(1, -3)$, $B(0, -1)$ и $C(3, 3)$ найти угол BAC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$ и $C(0, 3, 2)$.

Вариант 24.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (11, -6) по векторам $\overline{a}$ = (-2, 1) и $\overline{b}$ = (3, -2).

2. Вычислить длину вектора $\overline{p} + 2\,\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\,\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 120^0$.

3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с осями координат углы α, β и γ, если $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, 5)$. $\alpha = \beta$, $\beta > 90^0$, $\gamma = 90^0$.

4. Найти наименьший внутренний угол треугольника с вершинами в точках $A(-1, 3, 1)$, $B(0, 2, -3)$ и $C(3, -1, 0)$.

5. Найти момент силы $\overline{F}$ = (6, 6, -6), приложенной в точке $B(3, -2, 2)$ относительно точки $A(5, -4, -2)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Найти проекцию вектора $\overline{p} = \overline{b} - 2\overline{a}$ на вектор $\overline{q} = [[\overline{c}, \overline{b}]]$, если $\overline{a}$ = (2, 1, -1), $\overline{b}$ = (2, -1, 3) и $\overline{c}$ = (3, -1, 2).

7. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, -2)$, $C(2, 0, 2)$ и $D(0, 2, 2)$.

8. В треугольнике ABC известны координаты двух вершин $A(2, -2)$ $B(3, -1)$ и точка пересечения медиан $E(1, 0)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины С.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0, -1, 0)$, $B(2, 1, -2)$, и $C(1, 4, 1)$.

Вариант 25.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (13, -7)$ по векторам $\overline{a} = (-2, 1)$ и $\overline{b} = (3, -2)$.

2. Вычислить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 45^0$.

3. Показать, что точки $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(4, -1, 5)$ и $D(3, 2, 1)$ являются вершинами параллелограмма и найти проекцию одной из диагоналей на большую сторону параллелограмма.

4. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна C. Вычислить $\overline{AB}\,\overline{BC} + \overline{BC}\,\overline{BA} + \overline{CA}\,\overline{CB}$.

5. Найти момент силы $\overline{F} = (7, 7, -7)$, приложенной в точке $B(4, -3, 2)$ относительно точки $A(6, -5, -2)$, а также модуль и направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$.

6. Треугольник ABC построен на векторах $\overline{AB} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$ и $\overline{BC} = \overline{a} + 5\overline{b}$. Найти длину высоты CK, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны и по модулю равны 1.

7. Найти координаты вершины D тетраэдра, если известно, что она лежит на оси OX, объем тетраэдра равен 3, $A(5, 0, 3)$, $B(3, 3, -2)$ и $C(4, 2, 2)$.

8. В треугольнике ABC известны координаты двух вершин $A(3, -4)$, $B(4, -3)$ и точки пересечения медиан $E(2, -2)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0, 3, 2)$, $B(1, 0, -1)$ и $C(1, 5, -1)$.

Задание для всех вариантов

10. Найти радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением

1. $x^2 + y^2 + x - 5y - 3 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
3. $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
6. $x^2 + y^2 - 6x = 0$
7. $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 31 = 0$
8. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 17 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 2y - 2x - 2 = 0$
10. $3x^2 + 3y^2 - 2x + 7y + 1 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$
12. $x^2 + y^2 - 2y - 6x + 6 = 0$
13. $3x^2 + 3y^2 + 24y + 12x + 50 = 0$
14. $x^2 + y^2 - 2y - 6x + 3 = 0$
15. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$
16. $45x^2 + 45y^2 + 30x - 13 = 0$
17. $20x^2 + 20y^2 + 30y + 41 = 0$
18. $4x^2 + 4y^2 - 16x + 4y + 1 = 0$
19. $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$
20. $x^2 + y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$
21. $4x^2 + 4y^2 + 64x - 4y + 253 = 0$
22. $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 70 = 0$
23. $18x^2 + 18y^2 - 12x - 12y - 5 = 0$
24. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 8y + 39 = 0$
25. $75x^2 + 75y^2 - 30y - 49 = 0$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №2
«Предел и непрерывность функции»

Вариант 0

I. Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+1}{3x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x^2-6x}{1-2x-\left(\sqrt{x}\right)^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x+1}{3+14x^2-2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{2x^2-x-1}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{\arcsin x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{7+x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$ 9. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3x}{x-2}}$

II. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{2x}{2-x}$. Определить вид разрыва и и изобразить график функции в окрестности этих точек.

I. Решение

Нам потребуются следующие сведения из теории пределов:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}}\big(1+\varphi(x)\big)^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^\alpha+a_1x^{\alpha-1}+\ldots}{b_0x^\beta+b_1x^{\beta-1}+\ldots}=\begin{cases}\infty, & \alpha>\beta,\\ 0, & \alpha<\beta,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \alpha=\beta,\end{cases}$$

Эквивалентности: $x\to a,\ \varphi(x)\to 0.$

$$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x),\qquad e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x),$$

$$\operatorname{tg}\varphi(x)\sim\varphi(x),\qquad a^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)\cdot\ln a,$$

$$1-\cos\varphi(x)\sim\frac{1}{2}\varphi(x)^2,\qquad \ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x),$$

$$\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x),\qquad \log_a\big(1+\varphi(x)\big)\sim\frac{1}{\ln a}\varphi(x),$$

$$\operatorname{arctg}\varphi(x)\sim\varphi(x),\qquad \big(1+\varphi(x)\big)^m-1\sim m\,\varphi(x).$$

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+1}{3x-1} = \left\{\dfrac{(2\cdot 1^2-1+1)}{3\cdot 1-1} = \dfrac{2}{2}=1\right\} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x^2-6x}{1-2x-\left(\sqrt{x}\right)^2} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty};\ \begin{matrix} a=1, & \alpha=2 \\ b=-1, & \beta=1\end{matrix}\quad \beta<\alpha\right\} = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x+1}{3+14x^2-2x} = \left\{\begin{matrix} a=7, & \alpha=2 \\ b=14, & \beta=2\end{matrix},\qquad \alpha=\beta\right\} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = \left\{\dfrac{3^2-5\cdot 3+6}{3-3} = \dfrac{0}{0}\right\}$

Разложим числитель на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1,\ x_2$ – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

$x^2-5x+6=0,\qquad x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\pm 1}{2},\qquad x_1=3,\qquad x_2=2$

Имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{2x^2-x-1} = \left\{\dfrac{\sqrt{2-1}-1}{2\cdot 1^2-1-1} = \dfrac{0}{0}\right\}$

Домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2x-1}+1$, тогда согласно формуле $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{(2x^2-x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x-1-1}{(2x^2-x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

Разложим квадратный трехчлен в знаменателе и воспользуемся тем, что $\sqrt{2x-1}+1\to 2$ при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{3}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln 4}{x}=\ln 4$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{7+x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}=\left\{1^{\frac{2}{0}}=1^{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{3+x}{7+x}-1\right)\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}$

Вычислим $\dfrac{3+x}{7+x}-1=\dfrac{3+x-7-x}{7+x}=-\dfrac{4}{7+x}\to 0$ при $x\to\infty$;

$\sin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}$ при $x\to\infty$;

Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{3+x}{7+x}-1\right)\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{7+x}\right)^{\frac{7+x}{-4}\cdot\frac{-4}{7+x}\cdot\frac{1}{2/x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{4x}{2(7+x)}}=e^{-2},$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{7+x}\right)^{\frac{7+x}{-4}}=e$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{x(x-\pi)}=\dfrac{7}{-\pi}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3x}{x-2}}=\{1^{\infty}\}=\lim\limits_{x\to 2}\big(1+(4-2x)\big)^{\frac{1}{4-2x}\cdot\frac{(4-2x)\cdot 3x}{x-2}}=$

$$=\lim_{x\to 2}e^{\frac{-2\cdot(x-2)\cdot 3x}{x-2}}=e^{-6}$$

II. $y=\dfrac{2x}{2-x}$

Функция непрерывна всюду, кроме точки в которой знаменатель обращается в нуль, т.е. $2-x=0\Rightarrow x=2$. Это и есть возможная точка разрыва. По определению функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x, если

а) Она определена в этой точке.

б) Существует предел функции в x_0

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

в) И этот предел равен значению функции в точке x_0 $f(x_0)=A$

Характер точки разрыва зависит от того, какое из этих трех условий нарушается

В нашем примере функция не существует в точке $x = 2$.

Для существования предела функции в точке должны существовать и быть равны односторонние пределы в этой точке:

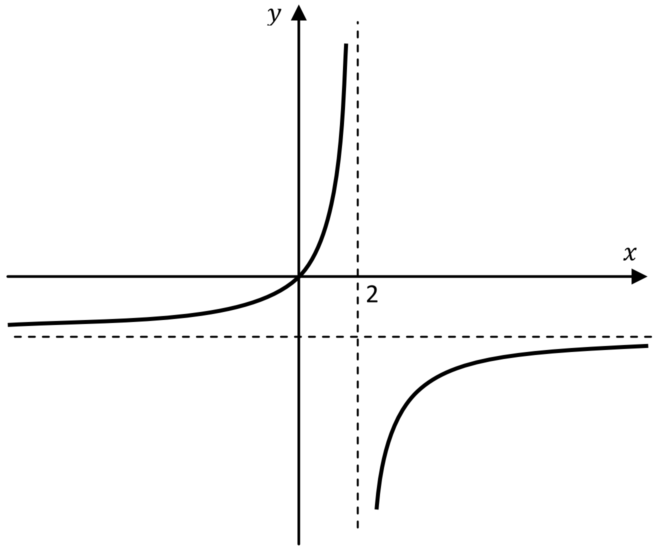
$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Это также поможет нам построить правильно график $y = f(x)$ в окрестности точки разрыва

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{2x}{2-x} = \left\{ \frac{2 \cdot (2+0)}{2-(2+0)} = \frac{4}{-0} = -\infty \right\} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{2x}{2-x} = \left\{ \frac{2 \cdot (2-0)}{2-(2-0)} = \frac{4}{+0} = +\infty \right\} = +\infty$$

Следовательно, имеем разрыв II рода, т.е. бесконечный разрыв.



КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

I. Найти пределы функции.

Вариант 1

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x^2+x-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-3x^3-x^2}{x^2-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x^2-1)x^4}{x+1-6x^6}$;
4. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}}\dfrac{15x^2-2x-1}{5x^2-4x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln 2-x}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 6x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\arcsin 3x}$;
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right)^x$.

Вариант 2

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-3x^2-4}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+3x^2}{4-2x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)(x+1)(2x^3-1)}{x^{10}+5}$;
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{26+x}-5}{x^2-25}$;
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{15x+2}{15x-3}\right)^{x-3}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\ln(1+x^2)}$;
9. $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

Вариант 3

1. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{\sin \pi x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^3-3x^2-10x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-2x-15}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+5}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3(x-1)(5-2x)}{1-x+5x^3}$;

Вариант 4

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$;
3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-2}{4x^2+2x+7}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-1+2x}{x+2x^3-10x^5}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+9}\right)^{x+2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 5x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\cdot\sin 10x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-9}$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-4x}$.

Вариант 5

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$;

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3+2x-x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-6x+7x^3}{3-x^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{100x^2+17x-1}{x^3+x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x^2+2x-3}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}}{1-\cos(x-1)}$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+1}$.

Вариант 6

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\log_5 5+1}{x-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x^2-3x}$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-1}{x^3+2}$;

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+5}{x^2+x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\cos 4x\cdot\sin 2x}$;

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+1)\cdot[\ln(x+1)-\ln(x-3)]$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\ln(1-\sin x)}{\operatorname{tg} \mathrm{x}}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Вариант 7

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3x^2}{4-2x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2-x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^4+2x^2-3}{1-2x^4}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^{10}-11x+2}{(1+x)^{10}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x^2+5x-6}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{\operatorname{tg} 5x\cdot\sin x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x^2+2x}$;
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{4x+1}$.

Вариант 8

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-1}{2x^2-x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+6x-7x^4}{3-2x^3}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x-4x^2+1}{5x^5+x-3x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{5x}-5}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin\frac{x}{3}}{\cos x-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{ctg}^2 3x$;
9. $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x^2-2x}}$.

Вариант 9

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3}{2x^2-3}$;
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x62-x-2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2+x-6}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+3x^2+4x}{1+15x-x^3}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^3+2x^2-3}{1-3x^4}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$;

Вариант 10

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)(x-3)}$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-7x+1}{4-2x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2+x+3x^4}{3-x^4}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2\cdot\sin 3x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x[\ln(x+4)-\ln x]$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{1-\cos 3x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 2} (3-x)^{\frac{x}{2-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1}$;

9. $\lim\limits_{x\to -1} (2+x)^{\frac{x}{3+3x}}$.

Вариант 11

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$;

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-10x^7+2}{x^3-x-3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x+1)(1-x)}{x-4x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x \ \operatorname{tg} 2x}{x \sin x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 3} (7-2x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$.

Вариант 12

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x-2}{\sqrt{3+x}+2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$;

3. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x}{(x^2-x+2)^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+1}{5x^4-2x^3+100x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\cdot\ln(1+x)}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Вариант 13

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-1}{(x+1)^5}$;

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{5x}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-6x^3-1}{2x^3-x+1}$;

Вариант 14

1. $\lim\limits_{x\to 2} (3+2x)^{x-2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+4x+1}{3+x+2x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+4x+1}{5x^3-x+3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x^4}{7x^5+3x+x^4}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2x\cdot\sin 5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\operatorname{tg} 2x}{5x\cdot\sin 6x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{8x+1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 4x\,(1-\cos x)}{(1-e^x)x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2+3x}}$.

Вариант 15

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3+(1+3x)}{x+x^5+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2-2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+4}$;

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\ln(1+\sin 3x)}$;

8. $\lim_{x\to\infty}(x+1)\cdot[\ln(2x+5)-\ln 2x]$;

9. $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x+3}{x-2}}$.

Вариант 16

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{1-\cos\pi x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{3x}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4}{6x^3-x^2+x}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-100x^{10}}{3x^{10}+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{tg} 5\mathrm{x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x^2-4}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{4(x-1)}-1}{\arcsin(x-1)}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x}$.

Вариант 17

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+2}{3-x^2}$;

Вариант 18

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+1}{\sin(x+1)}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-16}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}\cdot x}{2x^3-12x+5}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{x^4+x-3x^2+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 3x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1+x}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x-x^2)}{\operatorname{arctg} x}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{6x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-6}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{4x}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+3}{x-x^2+5x^3}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^4}{8x^5-3x+2}$;
6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}^2(2x-1)}{(2x-1)^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin\pi x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos 3x}{e^{2x}-1}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot[\ln(3x^2-1)-\ln 3x^2]$.

Вариант 19

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}+1}{x+3}$;
2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+2x-3}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x+3}{2x^3+3x+4}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x^2+7}{11-2x-4x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{\operatorname{ctg}\dfrac{x}{12}\cdot\sin\dfrac{x}{5}}$;
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$;

Вариант 20

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+10}$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{2x^2-3x-2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x}{x^4-3x^2+1}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x}{1-x-x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin x)^2}{1-\cos x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{x-3}{x}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3^x-1}$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{3x}{x-1}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^x$.

Вариант 21

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{1+\sqrt{1+x+x^2}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{15x^2-2x-1}{3x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x+7x^3}{x-3x^2-x^3}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{11}-x^5+x}{100x^3+1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x\cdot\sin 5x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{\sin\pi x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} 2\sqrt{x}}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^2}{x^2}\right)^{3x^2}$.

Вариант 22

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x^3}{x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4-x^2-6}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-1}{2x^4-x^2+5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+3x^2}{(1-x)(2+x)}$;
5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{7x\cdot\sin 3x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 4x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}^2(x-1)}{x^2-2x+1}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^{x^2-1}$.

Вариант 23

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+10}{(3-x)(x+2)}$;
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^2-25}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;

Вариант 24

1. $\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x^2+16}-x)$;
2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3-3x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x^2-2x-1}{5x^3+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{(x^2-3x+2)\cos\pi x}$;

7. $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\,(x-2)}}$;

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 6x}$;

9. $\lim_{x\to+\infty}(x-5)\cdot[\ln(x-3)-\ln x]$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6-2x+3x^4}{5x^4-x^2+7}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+2}{3x-6x^2-2}$;

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\pi-5x)}{e^{2x}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to2}\left(2-\frac{x}{2}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}}$;

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}^2\frac{x}{4}}{x^2-2x^4}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x+10}\right)^{x-3}$.

Вариант 25

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-3}{7x^2+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{3}{8-x^3}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2-x)}{\sqrt{x}-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-11x+5}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{6x^2-6x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^2\sin x}$;

7. $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{4x}{1-x^2}}$;

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3x+1)}{\left(e^{5\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{5x-1}$.

II. Найти точки разрыва функции $y = f(x)$. Определить вид разрывов и изобразить график функции в окрестности этих точек.

1. $y = \dfrac{x+2}{2-x}$;
2. $y = \dfrac{5x}{(x-3)x}$;
3. $y = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}$;
4. $y = \dfrac{x}{x^2-2x+5}$;
5. $y = \dfrac{1}{x^3+x}$;
6. $y = \dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$;
7. $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$;
8. $y = \dfrac{1+x}{x^2-1}$;
9. $y = \dfrac{x^2-1}{(x+1)x}$;
10. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$;
11. $y = \dfrac{x+1}{x+5}$;
12. $y = \dfrac{x}{x+2}$;
13. $y = \dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}$;
14. $y = \dfrac{2x}{x(x+3)}$;
15. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$;
16. $y = \dfrac{x^3+x}{x}$;
17. $y = \dfrac{x^2-1}{(1-x)\cdot x}$;
18. $y = \dfrac{2x}{x+3}$;
19. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$;
20. $y = \dfrac{\sqrt{2x}-3}{x^2-4}$;
21. $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$;
22. $y = \dfrac{1+x^3}{1+x}$;
23. $y = \dfrac{x^2+x}{(x-3)x}$;
24. $y = \dfrac{1}{x^2-6x+5}$;
25. $y = \dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №3

«Производная и ее приложение к исследованию функции»

Вариант 0

I. Найти y' следующих функций:

1. $y = 3x - \frac{1}{\sqrt{x^2}} + 2$; 2. $y = \frac{x^3-3x}{\sqrt{x}}$; 3. $y = e^{2x}\cos x$;

4. $y = \ln \operatorname{tg} x$; 5. $y = 5\arcsin\frac{x}{2}$; 6. $y = 2^{\sin x}$;

7. $y = (2x-5)^{12}$.

II. Найти dy, если $y = \operatorname{arctg}(-x)$.

III. Найти y'', если $y = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

IV. Найти y'_x, если $\begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$

V. Исследовать и построить график функции

$$1).\ y = 11 + 9x - 3x^2 - x^3;$$

$$2).\ y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$$

VI. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ на отрезке [1,4].

VII. Составить уравнения касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках её пересечения с осью абсцисс.

I. Решение.

1. $y = 3x - \frac{1}{x^2} + 2 = 3x - x^{-2} + 2.$

$y' = (3x - x^{-2} + 2)' = (3x)' - (x^{-2})' + (2)' = 3 — 2x^{-2-1} + 0 =$
$= 3 + x^{-3}.$

2. $y = \frac{x^3-3x}{\sqrt{x}}$

$U = x^3 - 3x$ $\quad\rightarrow\quad$ $U' = 3x^2 - 3$ $\qquad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$V = \sqrt{x}$ $\qquad\qquad$ $V' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{(3x^2-3)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-3x)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

3. $y = e^{2x}\cos x$

$U = e^{2x}$ $\quad\rightarrow\quad$ $U' = 2e^{2x}$ $\qquad (UV)' = (U'V + UV')$

$V = \cos x \qquad V' = -\sin x$

$y' = 2e^{2x}\cos x + e^{2x}(-\sin x)$.

4. $y = \ln \operatorname{tg} x$

$f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ – производная сложной функции

$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $y = 5\arcsin\frac{x}{2}$

$y' = 5 \cdot \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)' = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}$

6. $y = 2^{\sin x}$ (обратить внимание $\rightarrow$ это показательная функция)

$y = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot (\sin x)' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$

7. $y = (2x-5)^{12}$

$y' = 12(2x-5)^{12-1}(2x-5)' = 12 \cdot (2x-5)^{11} \cdot 2$

II. Найти dy, если $y = \operatorname{arctg}(-x)$

$dy = y' \cdot dx = [\operatorname{arctg}(-x)]'\, dx = \frac{1}{1+(-x)^2} \cdot (-1)\, dx$

III. Найти y'', если $y = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

$y = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 1 - x^{-\frac{2}{5}}$

$y' = -\left(-\frac{2}{5}\right) x^{-\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} x^{-\frac{7}{5}}$

$y'' = \frac{2}{5}\left(-\frac{7}{5}\right) x^{-\frac{7}{5}-1} = -\frac{14}{5} x^{-\frac{12}{5}}$

IV. Найти y'_x, если $x = t - t^4$; $y = t^2 - t^3$

Известно, $\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(t^2-t^3\right)'_t}{(t-t^4)'_t} = \frac{2t-3t^2}{1-4t^3}$

V. Исследовать и построить график функции

1). $y = 11 + 9x - 3x^2 - x^3$

1. Функция определена всюду, т.е. область определения (-∞;+∞)
2. Функция общего вида

3. Вертикальные асимптоты. Т.к. нет особенностей в области определения, то функция вертикальных асимптот не имеет.
4. Асимптоты $y = kx + b$. Т.к. функция представляет собой многочлен, то ни наклонных, ни горизонтальных асимптот нет
5. Интервалы монотонности и точки экстремумов.

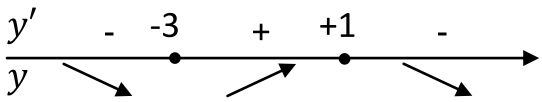
а). Найдем производную:

$$y' = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)' = 9 - 6x - 3x^2 = -3(x^2 + 2x - 3)$$

б). Найдем критические точки:

$$y' = 0; \qquad x^2 + 2x - 3 = 0;$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2;$$
$$x_1 = -3; \quad x_2 = +1.$$

в).



y убывает на $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$;

y возрастает на $(-3; 1)$.

$y(1) = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)|_1 = (11 + 9 - 3 - 1) = 16$ максимум;

$y(-3) = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)|_{-3} = -16$ мининум.

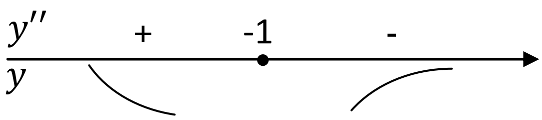
6. Интервалы выпуклости вогнутости, точки перегиба.

а). Найдем $y'' = (9 - 6x - 3x^2)' = -6 - 6x = -6(x + 1)$.

б). Найдем критические точки 2-го рода:

$y'' = 0; \quad x + 1 = 0; \quad x = -1.$

в).



y вогнута на $(-\infty; -1)$;

y выпукла на $(-1; +\infty)$.

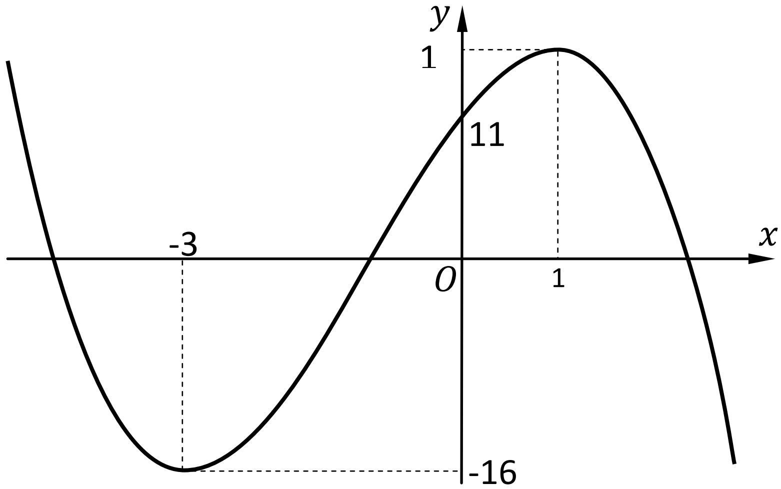
В точке $x = -1$ имеется перегиб

7. Точки пересечения с осью $0x$ найти не можем (сложно)

$$11 + 9x - 3x^2 - x^3 = 0.$$

Точка пересечения с осью $0y$:

$$y(0) = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)|_{x=0} = 11.$$



Из графика видно, что функция 3 раза пересекает ось X.

2). $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$

1. Функция определена всюду, кроме точки $x = 2$, так как знаменатель дроби не должен обращаться в нуль. Имеем область определения функции $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Функция общего вида.
3. Функция непрерывна на своей области определения. Исследуем функцию в точке $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2+0-2} = \frac{-4}{+0}\right\} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2-0-2} = \frac{-4}{-0}\right\} = +\infty$$

Эти пределы различны и бесконечны, т.е. в точке $x = 2$ функция имеет разрыв второго рода.

4. Так как функция имеет в точке $x = 2$ бесконечный разрыв, то прямая $x = 2$ будет для графика этой функции вертикальной асимптотой. Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$, коэффициенты которого определяются по формулам

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-6}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x-6}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2} =$$

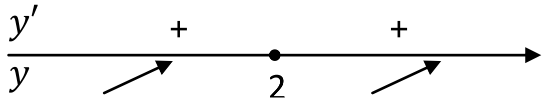
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1$$

График имеет асимптоту $y = x + 1$.

5. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x-6)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$$

Найдем критические точки. Производная не существует при $x = 2$. Выясним, при каких значениях x производная равна нулю. Решим уравнение $x^2 - 4x + 8 = 0$. Вычисляя дискриминант, получаем $D = 4^2 - 4 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$, поэтому корней у этого уравнения нет

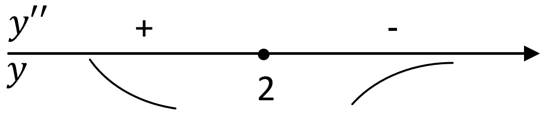


Производная всюду положительна, экстремумов у графика функции нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

1. Найдем вторую производную функции:

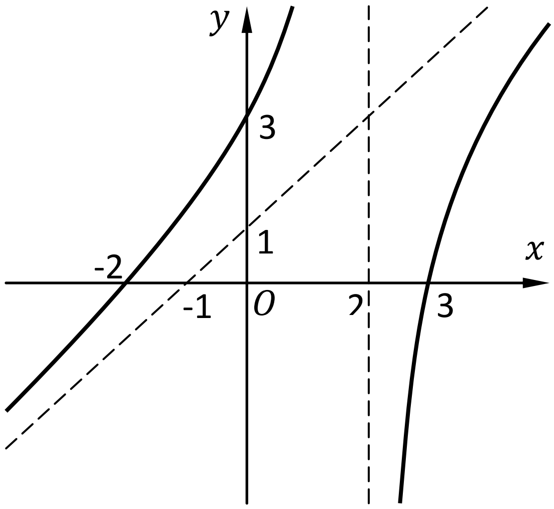
$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x+8)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^4}$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому функция не имеет точек перегиба.



При $x \in (-\infty; 2)$ выполнено неравенство $y'' > 0$, поэтому на интервале $(-\infty; 2)$ график функции является вогнутым. При $x \in (2; +\infty)$ выполняется неравенство $y'' < 0$, поэтому на интервале $(2; +\infty)$ график функции является выпуклым.

7. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Имеем $y(0) = \frac{0^2-0-6}{0-2} = 3$, поэтому с осью y функция пересекается в точке $(0;3)$. Далее, $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0,\ x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm5}{2}$, $x_1 = 2,\ x_2 = 3$, поэтому с осью x функция пересекается в точках $(-2;0)$и $(3;0)$



VI. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ на $[1;4]$.

1. Найдем y'

$$y' = \left(x^2 + \frac{16}{x} - 16\right)' = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3-16}{x^2} = \frac{2\left(x^3-8\right)}{x^2}$$

2. Найдем критические точки

$y' = 0 \to x^3 - 8 = 0 \to x = 2$

y' не существует $\to x^2 = 0$, но в этой точке не существует сама функция, поэтому ее рассматривать не нужно.

3. Посмотрим, все ли критические точки лежат в рассматриваемом интервале:

$x = 2 \in [1;4]$, значит, она нам нужна.

4. Найдем значение в оставшейся критической точке $x = 2$ и на концах интервала $x = 1,\ x = 4$

$y(2) = \left(x^2 + \frac{16}{x} - 16\right)|_2 = 4 + 8 - 16 = -4$

$y(1) = \left(x^2 + \frac{16}{x} - 16\right)|_1 = 1 + 16 - 16 = 1$

$y(4) = \left(x^2 + \frac{16}{x} - 16\right)|_4 = 16 + \frac{16}{4} - 16 = 4$

5. Из получившихся значений выбираем самое большое и самое маленькое
   $y(4) = 4$ – наибольшее значение y на $[1; 4]$;
   $y(2) = -4$ – наименьшее значение y на $[1; 4]$.

VII. $y = x - \frac{1}{x}$

1. Найдем точки пересечения y с осью $0x$
   $$x - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 0;\ x^2 - 1 = 0;\ x_{1,2} = \pm 1$$
2. Т.к. уравнение касательной в точке x_0 имеет вид:
   $$y - y(x_0) = f'_{(x_0)}(x - x_0),$$
   то вычислим $y(x_0) = y(x_1) = \left(x - \frac{1}{x}\right)|_1 = \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0;$
   $$y(x_2) = \left(x - \frac{1}{x}\right)|_{-1} = (-1 + 1) = 0;$$
   $$y'(x_0) = \left(x - \frac{1}{x}\right)'|_{x=\pm 1} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)|_{x=\pm 1} = 1 + 1 = 2.$$
   Имеем две касательные с уравнениям
   $$y - 0 = 2(x - 1) = 2x - 2 \rightarrow y = 2x - 2;$$
   $$y - 0 = 2(x + 1) = 2x + 2 \rightarrow y = 2x + 2.$$

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3

I. Найти производную.

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
$y = 2\sqrt{x} + \ln x;$	$y = \frac{2x^2-1}{3x^3};$	$y = x - \ln\sqrt{x};$
$y = \mathrm{tg}\cos x;$	$y = 2 - 6\sin 2x + \cos 5x;$	$y = 7\arcsin 2x;$
$y = \frac{3x^3+15x-1}{x^2-1};$	$y = \ln(x + \sqrt{x});$	$y = \mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x;$
$y = e^x \cdot \arcsin x;$	$y = \cos^2 28x;$	$y = 2^{\sin x};$
$y = 3^{-x^4};$	$y = e^{2x}\sqrt{1 - x};$	$y = \frac{\mathrm{arctg}\, 3x}{x^3+12x};$

$y = \operatorname{arctg}^5(27x)$; $y = \arccos\frac{1}{x}$; $y = \left(3 - 2x^2 + \frac{1}{x}\right)^{17}$;

$y = \sqrt[5]{2 + x - x^2}$. $y = \operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}$. $y = \cos 3x \cdot \sqrt[7]{x}$.

Вариант 4

$y = 3x^2 \cdot \operatorname{tg} x$;

$y = \ln(7x - 5)$;

$y = \cos^7 \sqrt{x}$;

$y = e^{-x} \cdot \arcsin 3x$;

$y = 3^{\operatorname{ctg} x}$;

$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2+x^4}$;

$y = \frac{4}{x^3} + \sqrt[5]{x^4}$.

Вариант 5

$y = \operatorname{ctg} 3^x$;

$y = \frac{x^2-6}{\sqrt{x}}$;

$y = e^{\sin x}$;

$y = 3\operatorname{tg} x - \frac{1}{x}$;

$y = \ln(1 + 2x - 3x^2)$;

$y = \cos^5 13x$;

$y = \arcsin x \cdot \sqrt[7]{x}$.

Вариант 6

$y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x}}$;

$y = \operatorname{arctg} e^x$;

$y = 5x \cdot \ln(2x - 1)$;

$y = \cos^2 24x$;

$y = 15\arccos\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

$y = 2^{\sin 2x}$;

$y = x^3 - 3x^4 - \sqrt[5]{x^7}$.

Вариант 7

$y = \frac{1+x^8}{12x^{11}}$;

$y = 2\sqrt{e^x}$;

$y = \sin^2(x + 5)$;

$y = (x + x^3) \cdot \operatorname{tg} x$;

$y = \frac{1}{4}\ln\cos x$;

$y = \arcsin\frac{1}{x}$;

$y = 3\operatorname{arctg} 2x$.

Вариант 8

$y = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x}$;

$y = \ln(3x - 5)$;

$y = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{tg} 3x$;

$y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

$y = \arccos(-x^2)$;

$y = 7x - \frac{1}{4}2^x + 5$;

$y = \sin^4(1 - 3x)$.

Вариант 9

$y = \frac{x^2+9}{6x^3}$;

$y = 3\sqrt{x} \cdot \ln(1 - x)$;

$y = \cos\sqrt[5]{x}$;

$y = 4\sin x -$
$2\arcsin x$;

$y = e^{\operatorname{arctg} x}$;

$y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^3}$;

$y = 2^x - 17\operatorname{tg} x + x^8$.

Вариант 10

$y = \frac{4+3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}$;

$y = \sin^{17} 3x$;

Вариант 11

$y = \frac{\cos 7x}{\operatorname{tg} x}$;

$y = \arccos\sqrt{x}$;

Вариант 12

$y = \sin^2 3x$;

$y = e^{\sqrt{x}}$;

$y = \operatorname{tg} x \cdot \ln(18 - x);$ $y = 2^{\operatorname{arctg} x};$ $y = \operatorname{arctg}(3x - 2x^2);$

$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x};$ $y = \ln(x + 7x^6);$ $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2};$

$y = 2^{-x^7};$ $y = \sqrt[5]{x^6} \cdot (x - 2);$ $y = \cos(1 - 2x);$

$y = 3 - \frac{1}{x^4} + x^4;$ $y = \sin^5(1 - 3x);$ $y = \ln \arccos x;$

$y = \arccos \frac{1}{x^3}.$ $y = \frac{1}{x^2} + 2x^3 - 3x.$ $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot 2^x.$

Вариант 13

$y = \frac{x^2-2}{24x^3};$

$y = \cos^2 18x;$

$y = \frac{3+x}{2} \cdot \operatorname{tg} x;$

$y = \sqrt[7]{x^3 + 2x};$

$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2};$

$y = \arcsin \sqrt{x};$

$y = 5^{\sin x}.$

Вариант 14

$y = \frac{x^6+8x^3+1}{x^2+3};$

$y = \frac{1}{e^x};$

$y = \cos \ln x;$

$y = \sin^2 28x;$

$y = \operatorname{ctg} \sqrt{x}$

$y = \arcsin \frac{1}{x^3};$

$y = 5x + \operatorname{tg} 3x.$

Вариант 15

$y = \ln(1 + e^x);$

$y = \arccos \sqrt{x};$

$y = \frac{3x+2}{\operatorname{tg} x};$

$y = 5x^4 \cdot \sin x^3;$

$y = 7x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 4;$

$y = \cos^3 2x;$

$y = 5^{1-x}.$

Вариант 16

$y = \frac{x^6+8x^3+12}{\sqrt{8-x}};$

$y = 3e^{x/4};$

$y = \cos \operatorname{ctg} 3x;$

$y = \ln^2(x - 6x^2);$

$y = \sqrt[4]{x^3} \cdot \arcsin x;$

$y = 2^{-x};$

$y = \operatorname{arcctg} 4x.$

Вариант 17

$y = \frac{\sqrt{2x-1}}{7x+5};$

$y = \arccos \frac{1}{x^3};$

$y = \operatorname{arctg}(3x + x^2);$

$y = \cos^3 3x;$

$y = \sqrt[5]{x^7} \cdot \sin 6x;$

$y = (x^8 - 1)^4;$

$y = \ln(1 - 4x).$

Вариант 18

$y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1};$

$y = e^{-x^3};$

$y = \sin^2 \frac{x}{3};$

$y = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{tg} x;$

$y = \frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x};$

$y = \arcsin \frac{1}{x};$

$y = 5^{\operatorname{arctg} x}.$

Вариант 19

$y = \frac{3x-7}{2x^4-1}$;
$y = e^{\sin x}$;
$y = \arcsin\frac{1}{x^3}$;
$y = \arccos(\sqrt{x}+1)$;
$y = 5x^3 \cdot \mathrm{tg}\, x$;
$y = (1-x+5x^2)^{20}$;
$y = \sin 8x$.

Вариант 20

$y = \frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^4}}$;
$y = e^{-3x}$;
$y = \sin 4x \cdot \mathrm{tg}\, 8x$;
$y = (2x^3-1)\cdot x^4$;
$y = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$;
$y = 2^{\cos x}$;
$y = \ln \mathrm{ctg}\, x$.

Вариант 21

$y = \frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{x^3-1}}$;
$y = \mathrm{tg} \cos x$;
$y = (1+3x^2)\cdot \ln x$;
$y = \mathrm{tg}^3\, 8x$;
$y = e^{\sin x}$;
$y = \arccos\sqrt{x}$;
$y = 2^{-x}+\frac{1}{x}$.

Вариант 22

$y = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x^3-1}$;
$y = \mathrm{arctg}\, e^x$;
$y = \sqrt[4]{1-x}\cdot \cos x$;
$y = \arcsin\frac{1}{x^3}$;
$y = 5^{\sin x}$;
$y = \ln(1-x+x^4)$;
$y = \mathrm{ctg}\sqrt{x}$.

Вариант 23

$y = 3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+16x$;
$y = \sin^2(1-x)$;
$y = \arcsin\frac{1}{x^4}$;
$y = x^5 \ln x$;
$y = \frac{\sqrt{2x-5}}{x^2+x-1}$;
$y = \cos 7x$;
$y = e^{\mathrm{arctg}\, x}$.

Вариант 24

$y = \frac{1+\sqrt{x}}{2x^2+5}$;
$y = 7x \arcsin x$;
$y = \cos^3 4x$;
$y = e^{\mathrm{ctg}\, x}$;
$y = \ln \arccos x$;
$y = 2x-\frac{1}{x}+\sqrt[5]{x}$;
$y = 5^{12x^2}$.

Вариант 25

$y = \frac{2x-1}{x^2+5}$;
$y = e^{x^3}$;
$y = \ln 2\,\mathrm{tg}\, x$;
$y = \arcsin\frac{1}{x^2}$.
$y = \sqrt{5x-4-x^2}$;
$y = 3^{x^2}\cdot \cos x$;
$y = \mathrm{ctg}^3\, x$;

II. Найти dy , если $y = f(x)$

1. $y = \sin^2 x;$
2. $y = \ln^2 x^3;$
3. $y = \arccos 2x;$
4. $y = \cos^2 \frac{1}{x^2};$
5. $y = e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)};$
6. $y = \frac{1}{\sqrt{3x+1}};$
7. $y = \log_2(2x - 1);$
8. $y = \sqrt[3]{1 - x^3};$
9. $y = \sqrt{tg\, x};$
10. $y = \sin \sqrt{x};$
11. $y = 3e^{\operatorname{arctg} x};$
12. $y = x^3 e^x;$
13. $y = (2x + 1)^{15};$
14. $y = \arccos \sqrt{1 - x};$
15. $y = 2^{\cos x};$
16. $y = x^2 \sqrt[3]{x};$
17. $y = \frac{1}{3^x};$
18. $y = \operatorname{arcctg} x^2$
19. $y = \log_{\frac{1}{3}}(1 - x);$
20. $y = \sqrt[5]{1 - x^3};$
21. $y = \frac{x^2}{1-x};$
22. $y = \cos\left(-\frac{1}{x}\right);$
23. $y = \sin^3 2x;$
24. $y = \ln(x^2 - 1);$
25. $y = 5^{\operatorname{tg} x}.$

III. Найти y'' , если $y = f(x)$

1. $y = x(x^2 - 1);$
2. $y = x^2 e^x;$
3. $y = \operatorname{tg} x;$
4. $y = \ln(12 + x);$
5. $y = 5\sqrt{x};$
6. $y = 2^x;$
7. $y = \frac{1}{x^3};$
8. $y = \operatorname{ctg} x;$
9. $y = (5 - 2x)^6;$
10. $y = x^2 e^x;$
11. $y = x \ln x;$
12. $y = \operatorname{arctg} x;$
13. $y = e^{-x};$
14. $y = x^2(15 + x);$
15. $y = \frac{1}{x^8};$
16. $y = \sin^2 2x;$
17. $y = \cos^2 3x;$
18. $y = xe^x;$
19. $y = \arcsin x$
20. $y = 2^{x^2};$
21. $y = \operatorname{arcctg}(-x);$
22. $y = \log_2(3x);$
23. $y = (7x - 3x^2)^5;$
24. $y = \operatorname{tg} 5x;$
25. $y = \sqrt{x}(x - 1).$

IV. Найти y'_x , если $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. $\begin{cases} x = e^{-t}; \\ y = e^{2t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}; \\ y = \frac{t}{(t+1)^2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \sqrt{t}\sin t; \\ y = \cos t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = e^{-t}; \\ y = \cos t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = t^2 + 1; \\ y = \ln t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \frac{1}{2+t^2}; \\ y = t - 3t^3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = t^3; \\ y = \ln(1-t) \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = -5^t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = e^{5t}; \\ y = \arcsin t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \operatorname{ctg} t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \sqrt{2t}; \\ y = \cos 8t \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 3\sin 4t \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = (2t-1)^2; \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \ln 2t; \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \operatorname{arcctg} t \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \frac{1}{2t+3}; \\ y = t^4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \sin 3t; \\ y = -\cos 3t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = e^{-5t}; \\ y = \ln(2x+1) \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \frac{1}{5t^2}; \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 5t; \\ y = \operatorname{ctg} 5t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln 8t; \\ y = \log_2 3t \end{cases}$

V. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$; $y = \frac{17-x^2}{4x-5}$.

14. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$; $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$.

2. $y = 3x - x^3$;
$y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.

15. $y = 7(1 - 6x^2 - x^3)$;
$y = \frac{-8x}{x^2+4}$.

3. $y = (x-2)(x-6)^2$;
$y = \frac{2}{x^2+2x}$.

16. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$;
$y = \frac{21-x^2}{7x+9}$.

4. $y = \frac{1}{4(x^3-9x^2)} + 6x + 9$;
$y = \frac{4x^2+9}{4x+8}$.

17. $y = 12x^2 - 18x^3 - 2$;
$y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.

5. $y = 2 - 3x^2 - x^3$;
$y = \frac{12x}{9+x^2}$.

18. $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$;
$y = \frac{3x-2}{x^3}$.

6. $y = \frac{1}{9}(x^2-3)^2$;
$y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$.

19. $y = \frac{27}{4}(x^3 - x^2) - 4$;
$y = \frac{x^2-11}{4x-3}$.

7. $y = 2x^3 - 3x - 4$;
$y = \frac{2x^2-6}{x-2}$.

20. $y = \frac{x}{8}(12 - x^2)$;
$y = (1 - 2x^3)/x^2$.

8. $y = 3x^2 - 2 - x^3$;
$y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$.

21. $y = \frac{1}{16}x(x^2-4)$;
$y = \frac{4}{x^2+2x-3}$.

9. $y = 4(4x^3 - 3x^2 - 1)$;
$y = \frac{2x^3+1}{x^2}$.

22. $y = \frac{27}{4}(x^3 + x^2) - 5$;
$y = \frac{x^2+2x-1}{2x+1}$.

10. $y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2) - 5$;
$y = \frac{x^2-6x+4}{3x-2}$.

23. $y = \frac{1}{8}(16 - 6x^2 - x^3)$;
$y = \frac{x^2-2x+2}{x+3}$.

11. $y = 6x - 8x^3$;
$y = \frac{2-x^2}{9x^2-4}$.

12. $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$;
$y = \frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$.

13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$;
$y = \frac{3x^2-7}{2x+1}$.

24. $y = -\frac{1}{16}(x^2 - 4)^2$;
$y = \frac{x^2+6x+3}{x+4}$.

25. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$;
$y = \frac{3x^2-10}{4x^2-1}$.

VI. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

1. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$; $[1,4]$
2. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$; $[1,4]$
3. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$; $[0,6]$
4. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$; $[-3,3]$
5. $y = 2\sqrt{x} - x$; $[0,4]$
6. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$; $[-1,5]$
7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$; $[1,9]$
8. $y = \frac{10x}{1+x^2}$; $[0,3]$
9. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$; $[-3,3]$
10. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$; $[2,4]$
11. $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$; $[-1,2]$
12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$; $[-1;6]$
13. $y = \frac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}$; $[1,4]$
14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$; $[-1,7]$
15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$; $[1,5]$
16. $y = \frac{4x}{4+x^2}$; [-4,2]
17. $y = 8 + \frac{8}{x} - \frac{x^2}{2}$; $[-4,-1]$
18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$; $[-2,4]$
19. $y = \frac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$; $[-2,1]$
20. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$; $[-5,1]$
21. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$; $[0,4]$
22. $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13$; $[2,5]$
23. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$; $[1,5]$
24. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$; $[-3,4]$
25. $y = \frac{8}{x-2} - \frac{x^2}{2} + 2x + 5$; $[-2,1]$

VII. Задания для всех вариантов.

1. Составить уравнение касательной к графику функции $y = (x^3 + 1)/3$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

2. На графике функции $y = x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс

3. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y = (x-4)/(x-2)$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

4. Показать, что на графике функции $y = x^3 + x^2 + x + 1$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

5. В каких точках касательные к кривой $y = (1/3)x^3 + x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$.

6. В каких точках касательная к графику функции $f(x) = (1/3)x^3 - (5/2)x^2 + 7x - 4$ образует с осью $0x$ угол $45°$?

7. Под каким углом к оси $0x$ наклонена касательная, проведенная к кривой $y = 2x^3 - x$ в точке ее пересечения с осью $0y$?

8. Под каким углом к оси $0x$ наклонена касательная , проведенная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M_0(2; -4)$?

9. Известно, что прямая $y = -(3/4)x - 3/32$ является касательной к линии, заданной уравнением $y = 0{,}5x^4 - x$. Найти координаты точки касания.

10. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^7 e^{-x}$ в точке $x = 1$.

11. Составить уравнение касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проходящих через точки пересечения этих кривых.

12. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y = (2/3)x^5 - (1/9)x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$.

13. Составить уравнение касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2, -5)$. Сделать чертеж.

14. Составить уравнение касательной к графику функции
$y = \ln(2e - x)$ в точке $x = e$.

15. Составить уравнение касательной к графику функции
$f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке $x = -2$.

16. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3?

17. В каких точках касательная к графику функции $y = (x+2)/(x-2)$ образует с осью $0x$ угол $135°$.

18. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y = (x-4)/(x-2)$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

19. Провести касательную к графику функции $y = (x+9)/(x+5)$ так, чтобы она прошла через начало координат.

20. На линии $y = 1/(1+x^2)$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

21. Найти уравнение касательной к линии $x^2(x+y) = a^2(x-y)$ в начале координат.

22. В каких точках линии $y = x^3 + x - 3$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x - 1$?

23. Составить уравнения касательных к линии $y = x - 1/x$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

24. Составить уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярной к прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

25. Хорда параболы $y = x^2 - 2x + 5$ соединяет точки с абсциссами $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Составить уравнение касательной к параболе, параллельной хорде.

Рекомендуемая Литература.

1. Данко П.Е и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, том .I; М. «Айрис – пресс» 2006.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс – М, «Айрис – пресс» 2002 г.

3. Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике, ч. II. Пределы, производные и графики функций. М. «РИО МГТУ ГА» 2003 г. № 536.