МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра высшей математики

Л. Д. Жулёва

МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

для студентов второго курса
специальности 080200
заочного обучения

Москва – 2013

Рецензент доц. В. А. Ухова

Л. Д. Жулёва
Математика. Пособие по выполнению контрольных работ и варианты заданий для студентов второго курса специальности 080200 заочного обучения – М.: МГТУ ГА, 2013. –

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой дисциплины «математика» по учебному плану специальности 080200.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры высшей математики 04.04.2013г. и методического совета 2013г.

Введение

Пособие содержит рабочую программу по высшей математике, разбитую на разделы, которые изучают на втором курсе, список рекомендуемой литературы, методические указания по некоторым темам курса, задачи контрольных работ (десять вариантов) и примеры решения типовых задач.

На втором курсе студенты должны изучить следующие разделы курса высшей математики:

1. а) Неопределённый и определённый интегралы.

   б) Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Теория вероятностей
3. Математическая статистика.

Указанные разделы определяют содержание трёх контрольных работ (№5, №6, №7), которые нужно выполнить на втором курсе. Каждый студент должен решить задачи своего варианта. Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента.

Указания к выполнению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.
2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия имя и отчество студента, учебный номер (шифр), название дисциплины, курс обучения, номер контрольной работы и номер варианта.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров.
5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать её условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.
6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
7. После получения прорецензированной работы, как незачтённой так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

   При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на неё. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.
8. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к собеседованию по контрольной работе, к сдаче зачёта или экзамена.
9. **Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по номеру варианта. Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента, при этом цифра 0 соответствует варианту 10.**

Программа курса «Математика»

1. Неопределённый и определённый интегралы

1. Первообразная. Неопределённый интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.
2. Определение определённого интеграла, его свойства.
3. Формула Ньютона - Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
4. Приложения определённого интеграла.
5. Несобственные интегралы на конечном и бесконечном интервалах.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

6. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Частное и общее решения.
7. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
8. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши.
9. Линейные дифференциальные уравнения, однородные и неоднородные. Структура общего решения.
10. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида.

3. Теория вероятностей

11. Случайные события. Пространство элементарных событий. Операции над событиями. Классическое и статистическое определение вероятности.
12. Условные вероятности. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
13. Последовательность независимых испытаний, схема Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.
14. Определение случайной величины. Функция распределения и её свойства. Непрерывные и дискретные случайные величины. Примеры распределений: биномиальное, пуассоновское, нормальное, равномерное, показательное.
15. Числовые характеристики случайных величин. Их свойства.

4. Математическая статистика

16. Выборка и способы её записи. Графическое представление выборки. Точечные оценки неизвестных параметров распределения по выборке, по-

нятие состоятельности и несмещённости оценок. Доверительные интервалы.

17. Статистическая проверка гипотез.

Литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2007г.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2006г.
3. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2005-2011г.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2000-2011г.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2000-2011г.

Следующие пособия, изданные кафедрой высшей математики МГТУ ГА, помогут Вам выполнить контрольные работы:

6. Жулёва Л.Д. и др. Сборник задач по высшей математике ч. IV Интегралы. Дифференциальные уравнения. М.: РИО МГТУГА 2005г. № 1448.
7. Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике ч. V Теория вероятностей. М.: РИО МГТУГА 2001г. № 1495.

Методические указания
к выполнению задания 1 «Неопределённый интеграл»
контрольной работы № 5

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, если для любого $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то множество всех первообразных этой функции задаётся формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, то есть

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ если } \big(F(x) + C\big)' = f(x).$$

Например, функция $F(x)=x^2$ является одной из первообразных для функции $f(x)=2x$, так как $(x^2)'=2x$. Поэтому $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = \int 1\cdot dx = x + C$;

2) $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\cdot dx = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x \cdot dx = e^x + C$;

5) $\int a^x \cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

6) $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$;

7) $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot dx = \operatorname{tg} x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

10) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \arcsin x + C$;

11) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\cdot dx = \operatorname{arctg} x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\cdot dx = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;

13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;

14) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\cdot dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

15) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm k}}\cdot dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right| + C$;

16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

17) $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$;

18) $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C$;

19) $\int \cos ax\,dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$;

20) $\int \sin ax\,dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$;

21) $\int e^{ax}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax} + C$.

Правила интегрирования

1) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int A\cdot f(x)\cdot dx = A\cdot\int f(x)\,dx;$$

2) Интеграл от алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого:

$$\int \big(f(x) \pm g(x) \big)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx .$$

Подведение функции под знак дифференциала

(a, c – постоянные)

$$d\,(f(x)) = (f(x))' \cdot dx$$

1) $dx = \dfrac{1}{a} d(ax)$;

2) $dx = d(x + c)$;

3) $dx = \dfrac{1}{a} d(ax + c)$;

4) $dx = a \cdot d\left(\dfrac{x}{a}\right)$;

5) $dx = -d\,(-x)$;

6) $x \cdot dx = \dfrac{1}{2} d(x^2)$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot d(\sqrt{x})$;

8) $\dfrac{1}{x^2} dx = -d\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

9) $x^n \cdot dx = \dfrac{1}{n+1} d(x^{n+1})$;

10) $\dfrac{1}{x} \cdot dx = d(\ln x)$;

11) $e^x \cdot dx = d(e^x)$;

12) $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$;

13) $\sin x \cdot dx = -d(\cos x)$;

14) $\dfrac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x)$;

15) $\dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -d(\operatorname{ctg} x)$;

16) $\dfrac{1}{x^2 + 1} dx = d(\operatorname{arctg} x) = -d(\operatorname{arcctg} x)$;

17) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Основные методы интегрирования

1) <u>Метод подстановки (или замены переменной)</u>

Для нахождения интеграла $\int f(x) \cdot dx$ делаем замену $x = \varphi(t)$. Если существует обратная функция $t = g(x)$, то $dx = \varphi'(t)\, dt$ и

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = F(t) + C = F(g(x)) + C .$$

<u>Пример</u>.

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left\{ \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C .$$

2) <u>Формула интегрирования по частям</u>

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du\,.$$

Метод интегрирования по частям состоит в разбиении подынтегрального выражения на два множителя u и dv (dx всегда входит в dv). Затем первое равенство дифференцируют, а второе интегрируют. При нахождении v постоянная C не приписывается. Найдя du и v, ответ пишут по формуле интегрирования по частям.

Укажем некоторые типы интегралов, которые находят интегрированием по частям:

а) $\int x^n \sin ax\,dx$, $\int x^n \cos ax\,dx$, $\int x^n e^{ax}\,dx$, $\int x^n a^x\,dx$. В этих интегралах за u принимают x^n;

б) $\int x^n \ln x\,dx$, здесь $u = \ln x$, $dv = x^n dx$;

$\int x^n \arcsin ax\,dx$, здесь $u = \arcsin ax$, $dv = x^n dx$;

$\int x^n \operatorname{arctg} ax\,dx$, здесь $u = \operatorname{arctg} ax$, $dv = x^n dx$.

Иногда метод интегрирования по частям необходимо применить несколько раз.

<u>**Пример**</u>. $\int x^2 e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix}\right\} = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx = x^2 e^x -$

$-2\int x e^x\,dx$. Последний интеграл находим отдельно, применяя интегрирование по частям:

$$\int x e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix}\right\} = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C_1\,.$$

Возвращаясь в заданный интеграл, получим:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C_1) = e^x (x^2 - 2x + 2) + C\text{, где } C = -2C_1.$$

Методические указания к выполнению заданий 2 и 3 «Определённый интеграл» контрольной работы № 5

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $F(x)$ – её первообразная, то определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вычисляется по **формуле Ньютона-Лейбница**:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Все формулы и методы, которые применялись для нахождения неопределённых интегралов, сохраняются, с некоторыми особенностями, в случае определённых интегралов.

1) <u>Метод замены переменной</u>

Для вычисления $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ перейдём от переменной x к другой переменной t по формуле $x = \varphi(t)$. При некоторых ограничениях на функцию $\varphi(t)$ имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

где α и β находят из уравнений

$$\varphi(\alpha) = a, \;\; \varphi(\beta) = b.$$

Таким образом, при замене переменной следует изменить пределы интегрирования.

<u>Пример</u>. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{25 - x^2}} = \left\{ \begin{array}{ll} 25 - x^2 = t \Rightarrow -2x\,dx = dt, & x = 0 \Rightarrow t = 25 - 0^2 = 25 \\ x\,dx = -dt/2; & x = 3 \Rightarrow t = 25 - 3^2 = 16 \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{25}^{16} -\frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\sqrt{t}\,\Big|_{25}^{16} = -\sqrt{16} + \sqrt{25} = 1.$$

2) Метод интегрирования по частям: $\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{x}\,\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 -\frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}\,\Big|_1^2 - \frac{1}{x}\,\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \ln 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Некоторые приложения определённого интеграла

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

1) Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x),\quad (f(x) \ge 0)$; $x = a$; $x = b$; $y = 0$, находят по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

2) Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x),\quad y = f_2(x),\quad x = a,\quad x = b$ при условии, что $f_2(x) \ge f_1(x)$, находят по формуле

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Несобственные интегралы на бесконечном промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{M \to +\infty} \int\limits_a^M f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом*, обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int\limits_a^{M} f(x)\,dx.$$

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty,\, b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int\limits_N^{b} f(x)\,dx,$$

а несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c – произвольное число. При этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

Методические указания к выполнению заданий 4 и 5 «Дифференциальные уравнения» контрольной работы № 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение, в котором содержится независимая переменная, искомая функция и её производные или дифференциалы, называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:
$F(x, y, y') = 0$ (уравнение первого порядка в неявной форме), или
$y' = f(x, y)$ (уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной), или
$P(x, y)\cdot dx + Q(x, y)\cdot dy = 0$ (дифференциальная форма).

Решением дифференциального уравнения называется функция, при подстановке которой в уравнение получается тождество.

Решение дифференциального уравнения называется общим решением, если оно содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $y=\varphi(x,C)$, оно зависит от одной произвольной постоянной *C* и является решением уравнения при любом допустимом *C*.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, получаемое из общего решения при каком – либо определённом значении произвольной постоянной *C*.

Соотношение вида *Ф (x, y, C)=0,* неявно определяющее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка. Соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной *C*, называется частным интегралом дифференциального уравнения.

Задача нахождения частного решения по начальным условиям называется задачей Коши.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка ставится следующим образом:

Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, где x_0, y_0 заданные значения независимой переменной *x* и искомой функции *y.*

График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой. Графиком общего решения является семейство интегральных кривых.

УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде:

$y' = f(x)\cdot g(y)$ или $M(x)\cdot N(y)\cdot dx + P(x)\cdot Q(y)\cdot dy = 0$.

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только *x*, а в другую только *y* и затем проинтегрировать обе части. При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее
x и *y,* могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

<u>Пример 1</u>. Найти частное решение уравнения $x\cdot dx + y\cdot dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

<u>Решение</u>. Разделим переменные: $x\cdot dx = -y\cdot dy$. Интегрируем:

$\int x\cdot dx = -\int y\cdot dy$, получаем $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1$, или, обозначив $2C_1$

через C^2, будем иметь $x^2 + y^2 = C^2$ - общий интеграл. Это уравнение семейства концентрических окружностей с центром в начале координат и радиуса *C*. Для решения задачи Коши подставим в общий интеграл начальные условия $x = 1, \quad y = 0$: $1^2 + 0^2 = C^2$,откуда $C^2 = 1$, а тогда искомое частное решение $x^2 + y^2 = 1$ (частный интеграл)- окружность с центром в начале координат радиуса 1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков называются дифференциальными уравнениями высших порядков. Рассмотрим эти уравнения на примере уравнений второго порядка.

Общий вид уравнения второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ или в виде, разрешённом относительно старшей производной, $y'' = f(x, y, y')$.

Общее решение (общий интеграл) этого уравнения имеет вид $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ $\quad (\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0)$.

Задача Коши для уравнения второго порядка: найти частное решение (частный интеграл), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1.$$

Подставляя начальные условия в общее решение, получим систему уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 *и* C_2. Если затем найденные значения произвольных постоянных подставить в общее решение, получим искомое частное решение.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнение $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ (1)

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, где p и q действительные числа. При *f(x)=0* уравнение (1) называется однородным.

Общее решение $y_{о.н.}$ неоднородного уравнения (1) есть сумма общего решения $y_{о.о.}$ соответствующего однородного уравнения и какого – либо частного решения $y_{ч.н.}$ данного неоднородного уравнения, то есть

$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$. (2)

Однородные линейные уравнения

Однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 . \qquad (3)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y_{o.o.} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$, где $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ - линейно независимые частные решения этого уравнения, а C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Для отыскания общего решения уравнения (3) составляется алгебраическое уравнение

$$k^2 + p \cdot k + q = 0 , \qquad (4)$$

которое называется характеристическим уравнением. Это алгебраическое уравнение получается из уравнения (3) заменой в нём производных искомой функции соответствующими степенями k, причём сама функция y заменяется единицей. В зависимости от вида корней характеристического уравнения общее решение уравнения (3) будет иметь разный вид. Возможны три случая:

1. Если корни характеристического уравнения k_1, k_2 действительные и различные, то частными решениями уравнения (3) будут функции $y_1(x) = e^{k_1 \cdot x}$ *и* $y_2(x) = e^{k_2 \cdot x}$.

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x} .$$

2. Если $k_1 = k_2 = k$ действительные и равные, то $y_1(x) = e^{k \cdot x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{k \cdot x}$. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 e^{k \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k \cdot x} .$$

3. Если корни характеристического уравнения комплексно – сопряжённые числа $k_1 = \alpha + i \cdot \beta$, $k_2 = \alpha - i \cdot \beta$, тогда частными решениями уравнения (3) будут $y_1(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$, $y_2(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) .$$

Неоднородные линейные уравнения

Неоднородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид (1). Общее решение этого уравнения задаётся формулой (2), в которой способ получения функции $y_{o.o.}$ уже описан. Теперь задача сводится к отысканию частного решения $y_{ч.н.}$ неоднородного уравнения.

В общем случае интегрирование уравнения (1) можно осуществить методом вариации произвольных постоянных.

Если же правая часть уравнения (1) имеет специальный вид, то $y_{ч.н.}$ находят методом неопределённых коэффициентов.
Укажем вид частного решения $y_{ч.н.}$ для некоторых частных случаев правой части *f(x)*.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)$**,** где $P_n(x)$ - некоторый многочлен степени *n*, тогда

а) если корни характеристического уравнения $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_n(x).$$

Здесь $Q_n(x)$ - многочлен с неопределёнными коэффициентами той же степени, что и многочлен $P_n(x)$.

б) если один из корней характеристического уравнения равен нулю, например, $k_1 = 0, k_2 \neq 0$, то

$$y_{ч.н.} = x \cdot Q_n(x).$$

в) если оба корня характеристического уравнения равны нулю $k_1 = k_2 = 0$, то

$$y_{ч.н.} = x^2 \cdot Q_n(x).$$

Для того чтобы определить коэффициенты многочлена $Q_n(x)$, частное решение подставляют в дифференциальное уравнение (1) и уравнивают коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях уравнения.

2. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{a \cdot x}$. Тогда

а) если *a* не является корнем характеристического уравнения, то есть $k_1 \neq a, k_2 \neq a$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x}.$$

б) если один из корней характеристического уравнения равен *a*, например, $k_1 = a, k_2 \neq a$, то

$$y_{ч.н.} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x}.$$

в) если оба корня характеристического уравнения равны *a*, то есть $k_1 = k_2 = a$, то

$$y_{ч.н.} = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x}.$$

3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot \cos bx + T_m(x) \cdot \sin bx$, где $P_n(x),\ \ T_m(x)$ - многочлены степени *n* и *m*. Тогда

а) если корни характеристического уравнения не равны $\pm bi$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_s(x) \cdot \cos bx + R_s(x) \cdot \sin bx,$$

где $Q_s(x),\quad R_s(x)$ - многочлены s степени с неопределёнными коэффициентами (s наибольшая из степеней n и m).
б) если корни характеристического уравнения $k_{1,2}=\pm bi$, то частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.}=x\cdot(Q_s(x)\cdot\cos bx+R_s(x)\cdot\sin bx).$$

<u>Пример 2</u>. Найти частное решение уравнения, $y''-5y'+6y=-78\sin 3x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\quad y'(0)=0$.

<u>Решение.</u> Решим соответствующее однородное уравнение $y''-5y'+6y=0$. Для его решения составим характеристическое уравнение $k^2-5k+6=0$. Его корни $k_1=2,\ k_2=3$, следовательно,

$$y_{о.о.}=C_1\cdot e^{2\cdot x}+C_2\cdot e^{3\cdot x}.$$

Частное решение исходного уравнения согласно П. 3. а) ищем в виде

$$y_{ч.н.}=A\cos 3x+B\sin 3x,\qquad \text{так как } k_{1,2}\neq\pm 3\cdot i.$$

Находим $\quad y'_{ч.н.}=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,$

$$y''_{ч.н.}=-9A\cos 3x-9B\sin 3x.$$

Подставляя $y_{ч.н.},\quad y'_{ч.н.},\quad y''_{ч.н.}$ в исходное уравнение, получим

$$(-3A-15B)\cos 3x+(15A-3B)\sin 3x=-78\sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при синусе и косинусе в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений:

$$-3A-15B=0,\qquad 15A-3B=-78.$$

Решая систему, найдём: $A=-5,\ B=1$, то есть частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.}=-5\cos 3x+\sin 3x.$$

Значит, общее решение заданного уравнения будет иметь вид

$$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.}=C_1\cdot e^{2\cdot x}+C_2\cdot e^{3\cdot x}-5\cos 3x+\sin 3x.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, найдём производную $y'_{о.н.}=2C_1\cdot e^{2\cdot x}+3C_2\cdot e^{3\cdot x}+3\cos 3x+15\sin 3x$. Подставим начальные условия $y(0)=0,\quad y'(0)=0$ в общее решение и в его производную:

$$y(0)=C_1+C_2-5=0$$

$$y'(0)=2C_1+3C_2+3=0.$$

Откуда получаем $C_1=18,\quad C_2=-13$. Таким образом, искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, получится из общего решения при найденных значениях произвольных постоянных:

Ответ: $$y = 18 \cdot e^{2 \cdot x} - 13 \cdot e^{3 \cdot x} - 5\cos 3x + \sin 3x.$$

Методические указания к выполнению контрольных работ № 6, № 7 по теме «Теория вероятностей и математическая статистика»

В учебниках [2] и [4] списка литературы содержатся необходимые указания по изучению темы «Теория вероятностей и математическая статистика»; кроме того, в задачнике [5] приводятся подробные решения задач, аналогичных задачам контрольных работ №№ 6, 7.

Для выполнения контрольной работы № 6 рекомендуется изучить в задачнике [5] содержание следующих параграфов:

Часть 1, гл. 1, §1, стр.8, задачи №№ 7, 8, 17;

Часть 1, гл.2, §§1-4, стр.18, задачи №№ 46, 49, 64, 80, 97;

Часть 1, гл. 3, §1, стр.37, задача № 110;

Часть 2, гл.5, §3 стр.63, задача № 210;

Часть 2, гл.6, §§2,3, стр.91, задачи №№ 262, 267, 275;

Часть 2, §5, стр.109, задача № 328.

Для выполнения контрольной работы № 7 рекомендуется изучить в задачнике [5]содержание Части III, гл. 10, §1-3, стр. 151-157; разобрать решение задачи №508 (§4, стр.177) и решение задачи №639 (Часть III, гл.12, § 16, стр.254).

Смотрите также решение типовых задач контрольных работ № 6, 7 в данном пособии.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Тема: Неопределённый интеграл (задание 1);
Определённый интеграл (задания 2, 3);
Дифференциальные уравнения (задания 4, 5).

Контрольная работа состоит из заданий 1, 2, 3, 4, 5.

Задание 1

Найти неопределённые интегралы.

1. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2}\,dx$ б) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$

   в) $\int 3e^{3x-1}\,dx$ г) $\int x\cos\frac{x}{2}\,dx$

2. а) $\int \left(\frac{1-3x}{x}\right)^2 dx$ б) $\int \frac{3+\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

   в) $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ г) $\int \ln x\,dx$

3. а) $\int (3x^{-1}-\sqrt{x^5}+2)\,dx$ б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx$

   в) $\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ г) $\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$

4. а) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3}\,dx$ б) $\int \frac{3+2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

   в) $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx$ г) $\int x\cdot 7^x\,dx$

5. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2}}\,dx$ б) $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}$ г) $\int \arccos x\, dx$

6. а) $\int (\sqrt[7]{x^5} - \sqrt{x})\, dx$ б) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

в) $\int \sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x}\, dx$ г) $\int x e^{3x}\, dx$

7. а) $\int \frac{x^2+2}{x}\, dx$ б) $\int \frac{2\operatorname{tg}^2 x + 1}{\sin^2 x}\, dx$

в) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$ г) $\int x \cos 3x\, dx$

8. а) $\int (2x-3)^2\, dx$ б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx$

в) $\int \frac{\sin x}{\cos x + 2}\, dx$ г) $\int \arcsin x\, dx$

9. а) $\int \frac{2x^5 - 3x}{x^2}\, dx$ б) $\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}\, dx$

в) $\int (\sin x + 3)^5 \cdot \cos x\, dx$ г) $\int x \sin \frac{x}{2}\, dx$

10. а) $\int \frac{3\sqrt{x} - x^2 + 1}{x}\, dx$ б) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$

в) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$ г) $\int x \sin 2x\, dx$

Задание 2

Вычислить определённые интегралы.
При решении пункта а) следует применить указанную замену переменной.

1. а) $\int_4^{12} \frac{x+1}{x\sqrt{x-3}}\, dx$; $x-3=t^2$ б) $\int_0^1 x e^{-2x}\, dx$

2. а) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$; $e^x - 1 = t^2$ б) $\int\limits_0^{\pi} x \sin \frac{x}{3}\, dx$

3. а) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$; $2x + 1 = t^2$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos 2x\, dx$

4. а) $\int\limits_4^{9} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} - 1}$; $x = t^2$ б) $\int\limits_0^{1} (1 - 3x)\, e^{3x}\, dx$

5. а) $\int\limits_0^{1} \sqrt{4 - x^2}\, dx$; $x = 2\sin t$ б) $\int\limits_1^{e} x^2 \ln x\, dx$

6. а) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx$; $e^x - 1 = t^2$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} (2x + 1) \cos x\, dx$

7. а) $\int\limits_2^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$; $x - 1 = t^2$ б) $\int\limits_0^{1} x \cdot 3^x\, dx$

8. а) $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\, dx$; $x = \sin t$ б) $\int\limits_0^{e-1} \ln (x + 1)\, dx$

9. а) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$; $x = t^2$ б) $\int\limits_0^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx$

10. а) $\int\limits_0^{3} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 1}\, dx$; $1 + x = t^2$ б) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\, dx$

Задание 3

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$

2. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

3. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

4. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\, dx}{(x^2 + 1)^2}$

5. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$

7. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^2 + 5}$

8. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$

9. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}\, dx$

10. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3}\, dx$

Задание 4

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $x y y' = 1 - x^2$

2. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

3. $\sqrt{1 - y^2}\, dx + y\sqrt{1 - x^2}\, dy = 0$

4. $(1 + y^2)\, dx - (1 + x^2)\, y\, dy = 0$

5. $x^2 y y' = 1 + \frac{1}{x}$

6. $y y' = \frac{1 + 2x}{y}$

7. $y' \cos^2 x = \frac{y}{\ln y}$

8. $(x y^2 + x)\, dx + (y - x^2 y)\, dy = 0$

9. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$

10. $\operatorname{tg} y\, dx + \operatorname{tg} x\, dy = 0$

Задание 5

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1. $y'' + y = 4e^x$; $\quad y(0) = 4$; $y'(0) = -3$

2. $y'' - 2y' = 2e^{x}$; $\qquad y(0) = -1$; $y'(0) = 4$

3. $y'' + 2y' + 2y = 2x - 4$; $\qquad y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

4. $y'' - 4y' = 8x + 4$; $\qquad y(0) = 2$; $y'(0) = 0$

5. $y'' - 4y' + 4y = 5e^{-3x}$; $\qquad y(0) = 2$; $y'(0) = 0$

6. $y'' - 4y = \sin 2x$; $\qquad y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

7. $y'' + 3y' - 4y = 7e^{3x}$; $\qquad y(0) = \frac{1}{2}$; $y'(0) = 0$

8. $y'' + 4y = 16e^{-2x}$; $\qquad y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

9. $y'' - 2y' + 10y = 20x + 6$; $\qquad y(0) = 0$; $y'(0) = 4$

10. $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$; $\qquad y(0) = 5$; $y'(0) = 4$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 5

Типовые задачи задания 1

Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x}\,dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int dx + \int x\,dx = \ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2} +$
$+C$;

б) $\displaystyle\int 2\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int (1+\cos x)\,dx = \int dx + \int \cos x\,dx = x + \sin x + C$.

Замечание. При вычислении интегралов от тригонометрических функций применяются некоторые формулы тригонометрии: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\sin 2x = 2\sin x\cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x -$
$-\sin^2 x$; $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$; $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

в) $$\int \frac{dx}{3x-2} = \left\{\begin{aligned} &3x-2=t, \\ &3\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C;$$

г) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du\,.$$

Пусть $u=\operatorname{arctg}\sqrt{x},\ dv=dx \Rightarrow du=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx,\ v=x$. Имеем:

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{x}{(1+x)\cdot 2\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Найдём полученный интеграл: $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x)\cdot 2\sqrt{x}}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt,\ x=t^2\end{array}\right\} =$

$\displaystyle = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t-\operatorname{arctg}t + C_1 = \sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x} +$

$+\,C_1$; подставляя, получаем: $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$

($C = -\,C_1$ – произвольная постоянная).

Типовые задачи задания 2

Вычислить определённые интегралы.
Нам понадобится формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

а также правила пользования заменой и формулой интегрирования по частям в определённом интеграле.

а) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \sqrt[3]{2x}\,dx = \sqrt[3]{2}\cdot\int_{-2}^{3} x^{1/3}\,dx = \sqrt[3]{2}\cdot\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}\Bigg|_{-2}^{3} = \sqrt[3]{2}\cdot\frac{3}{4}x^{4/3}\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4}\Bigg|_{-2}^{3} =$

$\displaystyle = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2\cdot 3^4} - \sqrt[3]{2\cdot(-2)^4}\right) = \frac{3}{4}\left(3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{4}\right);$

б) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l}x=4\sin t,\\ dx=4\cos t\,dt,\ \sqrt{16-x^2}=\sqrt{16\cos^2 t}=4|\cos t|\end{array}\right.$; так как

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, то $4|\cos t| = 4\cos t$. Необходимо пересчитать пределы интегрирования:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow 4\sin t = 4,\ \sin t = 1,\ t = \pi/2 \\ x = 0 \Rightarrow 4\sin t = 0,\ \sin t = 0,\ t = 0 \end{array}\right\} = \int_0^{\pi/2} 4\cos t \cdot 4\cos t\, dt = 16\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt = \left(8t + \frac{8}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 8\cdot\frac{\pi}{2} + 4\sin\pi - 8\cdot 0 - 4\sin 0 = 4\pi.$$

Типовые задачи задания 3

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \qquad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}; \qquad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Решение

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_1^M\right) = \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{M}+1\right) = 1;$ значит, интеграл сходится и равен 1.

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M\to+\infty}\left(\ln|x|\Bigg|_1^M\right) = \lim_{M\to+\infty}\ln|M| = \infty;$ интеграл расходится.

в) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{N\to-\infty}\int_N^0 \frac{dx}{(x+1)^2+4} +$$

$$+\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \lim_{N\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_N^0\right) + \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_0^M\right) =$$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$; интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Типовая задача задания 4

Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения

$$3 + y^2 + \sqrt{1-x^2}\cdot yy' = 0$$

Решение

Выразим из данного уравнения y': $y' = -\dfrac{3+y^2}{y}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Правая часть имеет вид произведения функции от *y* и функции от *x*. Значит, это уравнение с разделяющимися переменными. Заменим y' на выражение $\dfrac{dy}{dx}$, затем умножим обе части на $\dfrac{y}{3+y^2}\,dx$. Получим: $\dfrac{y\,dy}{3+y^2} = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Таким образом, переменные разделены; интегрируем:

$$\int \frac{y\,dy}{3+y^2} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\ln|3+y^2| = -\arcsin x + C.$$

<u>Ответ</u>: Общий интеграл уравнения $\frac{1}{2}\ln|3+y^2| + \arcsin x = C$.

Типовая задача задания 5

<u>Задача</u>. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' = 30\,e^{5x},$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

<u>Решение</u>. Это уравнение – линейное неоднородное с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части.

а) Найдём $y_{о.о.}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' = 0$. Для этого составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$; его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, следовательно, $y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

б) Частное решение данного уравнения будем искать в виде $y_{ч.н.} = Ae^{5x}$; тогда $y_{ч.н.}{}' = 5Ae^{5x}$, $y_{ч.н.}{}'' = 25Ae^{5x}$. Подставляя $y_{ч.н.}$, $y_{ч.н.}{}'$, $y_{ч.н.}{}''$ в исходное уравнение, находим *A*: $25Ae^{5x} - 10Ae^{5x} = 30\,e^{5x}$, $15A = 30$, $A = 2$. Таким образом, $y_{ч.н.} = 2\,e^{5x}$; значит, общее решение данного уравнения

$$y = y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 + C_2 e^{2x} + 2\,e^{5x}.$$

в) Найдём теперь неизвестные постоянные C_1 и C_2; для этого подставим начальные условия в y и y': $y' = 2C_2 e^{2x} + 10\,e^{5x}$, $y(0) = C_1 + C_2 + 2 = 0$, $y'(0) = 2C_2 + 10 = 0$, откуда $C_1 = 3$, $C_2 = -5$.

<u>Ответ</u>: $y = 3 - 5e^{2x} + 2\,e^{5x}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Тема: Теория вероятностей.

Контрольная работа № 6 состоит из заданий 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Задание 1

1. Студент знает ответ на 20 теоретических вопросов из 30 и сможет решить 30 задач из 50. Определить вероятность того, что студент полностью ответит на билет, который состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи.

2. Из 50 вопросов экзамена студент подготовил 40. Найти вероятность того, что из двух заданных ему вопросов студент знает ровно один.

3. Из 20 деталей, среди которых 8 высшего качества, случайным образом выбираются на сборку 5. Какова вероятность того, что среди них окажется 3 детали высшего качества?

4. Из коробки, в которой находятся 12 карандашей и 8 ручек, наугад вынимают два предмета. Найти вероятность того, что вынуты ручка и карандаш.

5. Имеется 6 деталей первого сорта, 5 – второго сорта, 4 – третьего сорта. Какова вероятность того, что среди 3 случайно выбранных деталей окажутся детали всех сортов?

6. В книжной лотерее разыгрывается пять книг. Всего в урне имеется 20 билетов. Первый подошедший к урне вынимает четыре билета. Определить вероятность того, что два из этих билетов окажутся выигрышными.

7. В группе из 12 человек четверо имеют спортивные разряды. Случайным образом группа разбивается на две команды с одинаковым числом участников. Определить вероятность того, что в каждой команде окажется равное число разрядников.

8. На складе телеателье имеется пятнадцать кинескопов, причём десять из них изготовлены московским, а остальные – львовским заводами. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу взятых кинескопов окажется три кинескопа, изготовленных московским заводом.

9. Среди десяти люминесцентных ламп имеется одна негодная. Определить вероятность того, что среди шести случайно выбранных ламп все окажутся годными.

10.На шести карточках разрезной азбуки написаны буквы А, В, К, М, О, С. Перемешанные карточки вынимают наудачу по одной и располагают в одну линию. Какова вероятность того, что получится слово « МОСКВА»?

Задание 2

1.Среди изготовляемых рабочим деталей в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 деталей будут ровно две бракованные детали?

2. Три прибора испытываются на надёжность. Вероятности выхода из строя каждого прибора равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Найти вероятность того, что два прибора выйдут из строя.

3. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при пожаре датчик сработает, равны для первого и второго соответственно 0,9 и 0,95. Определить вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы один датчик.

4. В магазин вошли восемь покупателей. Найти вероятность того, что три из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого из покупателей равна 0,3.

5. Прибор, работающий в течение суток, состоит из трёх узлов, каждый из которых, независимо от других, может за это время выйти из строя; при этом неисправность хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы в течение суток для первого, второго и третьего узла соответственно равна 0,9; 0,95 и 0,85. Определить вероятность того, что в течение суток прибор выйдет из строя.

6. В среднем 10% автомобилей, производимых заводом, имеют брак. Для контроля из партии автомобилей взяли 5 машин. Найти вероятность того, что среди них будут ровно три машины без брака.

7. Оптовая база снабжает 6 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятность получения в день четырёх заявок.

8. Над изготовлением изделия работают последовательно трое рабочих. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0,05; второй – с вероятностью 0,01 и третий – с вероятностью 0,03. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

9. Из орудия произведено 5 выстрелов по объекту с вероятностью попадания в каждом выстреле 0,4. Найти вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого требуется не менее двух попаданий.

10. Рабочий обслуживает 10 одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна 1/3. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придётся регулировать 4 станка?

Задание 3

1. Прибор может работать в двух режимах: А и В. Режим А имеет место в 80% всех случаев работы прибора, режим В – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время Т в режиме А равна 0,1, в режиме В – 0,7.
1) Найти вероятность выхода прибора из строя за время Т. 2)Прибор вышел из строя за время Т. Какова вероятность, что он работал в режиме В?

2. Из 5 стрелков два попадают в цель с вероятностью 0,6, а три – с вероятностью 0,4. 1) Что вероятнее: попадёт в цель наудачу выбранный стрелок или нет? 2) Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее: принадлежит он к первым двум или к последним трём?

3. Ремонтная бригада завода обслуживает станки трёх типов: первого, второго и третьего, которые присутствуют на заводе в соотношении 1:2:3. Вероятности обращения к бригаде за время Т для обслуживания станков каждого типа равны соответственно 0,5; 0,3; 0,2. В бригаду поступил вызов (событие А). Какого типа станок вероятнее всего требует ремонта?

4. На конвейер поступают однотипные изделия, изготовленные двумя рабочими. При этом первый поставляет 60%, а второй – 40% общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим, окажется нестандартным, равна 0,005, а вторым – 0,01. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно было изготовлено первым рабочим.

5. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника - 0,9; для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. 1) Найти вероятность того, что

наудачу выбранный спортсмен выполнит норму. 2) Спортсмен выполнил норму. Найти вероятность, что это бегун.

6. Детали, поступающие на сборку, изготовлены тремя заводами, причём первый поставляет 40% всего количества, и вероятность того, что они отличного качества, равна 0,8, второй – 30% с вероятностью отличного качества 0,7, и третий – 30% с вероятностью отличного качества 0,9. Определить вероятность того, что оказавшаяся отличного качества деталь изготовлена на третьем заводе.

7. На проверку поступила партия микросхем, среди которых 10 процентов дефектных. При проверке дефект обнаруживается с вероятностью 0,95. С вероятностью 0,03 исправная микросхема может быть признана дефектной. Проверили одну микросхему. 1) Найти вероятность следующего события А: проверенная микросхема признана дефектной; 2) Событие А произошло, то есть проверенная микросхема признана дефектной. Найти вероятность, что она была исправной.

8. В сеансе одновременной игры в шахматы с мастером спорта играют 10 перворазрядников, 15 второразрядников и 20 третьеразрядников. Вероятность того, что в таком сеансе перворазрядник выиграет у мастера, равна 0,2, для второразрядника эта вероятность – 0,1, а для третьеразрядника – 0,05. Случайно выбранный участник выиграл. С какой вероятностью это был третьеразрядник?

9. В первом ящике находятся 3 белых и 4 чёрных шара; во втором – 2 белых и 3 чёрных шара; в третьем – неизвестное количество шаров, причём все они – белые. Из наугад взятого ящика вынули наугад один шар.1) Найти вероятность следующего события А: выбранный шар – белый.2) Вынули белый шар. Найти вероятность того, что его вынули из третьего ящика.

10. Пассажир приобретает билет в одной из двух касс. Вероятность его обращения в первую кассу равна 0,4, а во вторую – 0,6. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира все билеты будут распроданы, равна 0,35 для первой кассы и 0,7 – для второй. Пассажир приобрёл билет. В какой кассе он его купил вероятнее всего?

Задание 4

Закон распределения дискретной случайной величины X задан в виде таблицы.

1) Построить многоугольник распределения;
2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

3) Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $\mathrm{D}[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

1.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

2.

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

3.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1

4.

x_i	–2	–1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,25	0,35	0,1

5.

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

6.

x_i	–3	–1	0	1	3
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

7.

x_i	–1	3	4	6	8
p_i	0,15	0,3	0,12	0,33	0,1

8.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,05	0,35	0,2	0,1

9.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

10.

x_i	2	3	6	7	8	10
p_i	0,1	0,2	0,25	0,2	0,15	0,1

Задание 5

Дифференциальная функция распределения (плотность распределения) $f(x)$ случайной величины X задана выражением, зависящим от параметра.

1. Найти значение параметра a;
2. Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ и построить графики $f(x)$ и $F(x)$;
3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины;
4. Вычислить вероятность P попадания случайной величины X на заданный интервал.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ax^3, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ $\qquad P\left(0 \le X \le \frac{1}{2}\right) = ?$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ax^2, & 0 < x \le \frac{3}{2}; \\ 0, & x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ $\qquad P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{4}\right) = ?$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ a(2-x)^2, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ $\qquad P(1 \le X \le 1{,}5) = ?$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a(3x - x^2), & 0 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$ $\qquad P(1 \le X \le 2) = ?$

5. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x-a, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ $P(1 \le X \le 1{,}5) = ?$

6. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a\left(1-\dfrac{x}{3}\right), & 0 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$ $P(0 \le X \le 1) = ?$

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a(4x-x^2), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ $P(1 \le X \le 1{,}5) = ?$

8. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ax, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ $P\left(\dfrac{1}{2} \le X \le \dfrac{3}{4}\right) = ?$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a(2-x), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ $P(1 \le X \le 2) = ?$

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2; \\ ax-\dfrac{1}{4}, & 2 < x \le 6; \\ 0, & x > 6. \end{cases}$ $P(3 \le X \le 5) = ?$

Задание 6

Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α, β).

1. $a = 10$, σ = 4, α = 2, β = 13.
2. $a = 9$, σ = 5, α = 5, β = 14.
3. $a = 8$, σ = 1, α = 6, β = 9.
4. $a = 7$, σ = 2, α = 3, β = 10.

5. $a = 6$, $\sigma = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 11$.

6. $a = 5$, $\sigma = 1$, $\alpha = 3$, $\beta = 8$.

7. $a = 4$, $\sigma = 5$, $\alpha = 3$, $\beta = 11$.

8. $a = 3$, $\sigma = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 7$.

9. $a = 2$, $\sigma = 5$, $\alpha = 4$, $\beta = 9$.

10. $a = 2$, $\sigma = 4$, $\alpha = 6$, $\beta = 10$.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 6

Типовые задачи задания 1

Решение задач основано на использовании элементов комбинаторики, непосредственного определения вероятности случайного события и теорем сложения и умножения вероятностей.

Задача 1. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы О, П, Р, С, Т. Перемешанные карточки вынимаются наудачу по одной и располагаются в одну линию. Какова вероятность того, что получится слово «спорт»?
Решение. Искомую вероятность события A (получилось слово «спорт») определим по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов, n – общее число возможных исходов. В данном случае, $n = 5!$ – число перестановок из 5 элементов. Благоприятным исходам отвечает одно слово «спорт», то есть $m = 1$. Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Замечание. $n!$ (читается «эн факториал») – произведение натуральных чисел от 1 до n. В частности $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Задача 2. Группа спортсменов из 15 юношей и 5 девушек выбирает по жребию спортивную команду из 4 человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?
Решение. Испытание состоит в том, что из 20 человек выбирают 4 человека. Так как выборка состоит из 20 элементов по 4, и порядок их расположения не учитывается, то мы имеем дело с числом сочетаний. Поэтому общее число исходов $n = C_{20}^{4}$. Событие A состоит в том, что в составе выбранных окажутся 2 юноши и 2 девушки. Двух юношей из пятнадцати можно выбрать C_{15}^{2} способами, и после каждого такого выбора двух девушек из 5 можно выбрать C_{5}^{2} способами, то есть число благоприятных исходов равно $m = C_{15}^{2} \cdot C_{5}^{2}$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^2}{C_{20}^4} = \frac{70}{323} \approx 0{,}217\,.$$

Замечание. Если множество М содержит n различных элементов, то подмножества этого множества, каждое из которых содержит m элементов ($m \le n$), называются сочетаниями из n элементов по m. Число таких подмножеств обозначают символом C_n^m (читается «цэ из эн по эм») и вычисляют по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Типовые задачи задания 2

Для решения задач нужно знать формулу Бернулли, а также теоремы сложения и умножения вероятностей.

Задача 1. Игральную кость бросают четыре раза. Какова вероятность того, что шестёрка выпадет ровно 3 раза?

Решение. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна p, событие А наступит ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}\,,$$

где $q = 1 - p$. В данном случае, $n = 4$, $k = 3$, $p = \dfrac{1}{6}$, $q = \dfrac{5}{6}$, откуда искомая вероятность будет $P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{4-3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \dfrac{1}{6^3} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{324} \approx 0{,}015$.

Задача 2. Первый стрелок поражает мишень с вероятностью 0,6, второй – с вероятностью 0,5, третий – с вероятностью 0,3. Выстрелили все трое.

а) Найти вероятность того, что в мишень попал ровно один стрелок;

б) Найти вероятность того, что мишень поражена.

Решение. Обозначим A_1 событие, состоящее в том, что первый стрелок попал в мишень, $\overline{A_1}$ – противоположное ему событие, т. е. что первый стрелок промахнулся; A_2, $\overline{A_2}$, A_3, $\overline{A_3}$ – соответствующие события для второго и третьего стрелков соответственно. Все эти события независимы; по условию, вероятности событий A_1, A_2, A_3 равны $P(A_1) = 0{,}6$, $P(A_2) = 0{,}5$, $P(A_3) = 0{,}3$, откуда

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0{,}4\,,\ P(\overline{A_2}) = 0{,}5\,,\ P(\overline{A_3}) = 0{,}7\,.$$

а) Обозначим B событие, состоящее в том, что попал ровно один стрелок; тогда

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3,$$

где все слагаемые в правой части – события несовместные; поэтому искомая вероятность

$$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}41.$$

б) Обозначим C событие, состоящее в том, что мишень поражена; это означает, что попал или один, или два, или все три стрелка. Рассмотрим противоположное событие $\overline{C}$; оно состоит в том, что не попал ни один стрелок. Таким образом, $\overline{C} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, откуда

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14;$$

значит, $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 0{,}86$ – искомая вероятность.

Задача 3. В ящике 50 кубиков, из которых 5 неокрашенных. Наудачу последовательно извлекаются 3 кубика. Определить вероятность того, что все извлечённые кубики окрашены.

Решение. Обозначим события:

A_1 – первый извлечённый кубик окрашен;

A_2 – второй извлечённый кубик окрашен;

A_3 – третий извлечённый кубик окрашен.

Их условные вероятности находим по формулам непосредственного определения вероятности:

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \ P_{A_1}(A_2) = \frac{44}{49}; \ P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{43}{48}.$$

Обозначим через D событие, состоящее в том, что все три извлечённых кубика окрашены. Это событие можно представить в виде произведения событий A_1, A_2, A_3: $D = A_1A_2A_3$. Тогда вероятность его найдём по теореме умножения вероятностей для зависимых событий. Имеем окончательно:

$$P(D) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{1419}{1960} \approx 0{,}724.$$

Типовая задача задания 3

Решение задач основано на использовании формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Задача 1. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 студента подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и один – плохо. Имеется 20 вопросов, из которых отлично подготовленный студент может ответить на все, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно подготовленный – на 10, а плохо подготовленный – на 5.

1) Найти вероятность того, что наугад вызванный студент ответит на три заданных вопроса;

2) Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент плохо подготовлен, и ему просто повезло с вопросами.

Решение. 1) Обозначим через A событие, заключающееся в том, что студент ответит на три произвольно заданных вопроса. Это событие может произойти при реализации одной из гипотез: H_1 – студент подготовлен отлично, H_2 – хорошо, H_3 – удовлетворительно, H_4 – плохо. Эти гипотезы образуют полную группу попарно несовместных событий, и их вероятности равны

$$P(H_1)=0{,}3\ ;\ P(H_2)=0{,}4\ ;\ P(H_3)=0{,}2\ ;\ P(H_4)=0{,}1.$$

Эти вероятности априорные, то есть вычисленные до проведения опыта. Вероятности $P(A/H_i)$ наступления события A при условии реализации той или иной гипотезы H_i ($i=1,2,3,4$) можно найти, используя классическое определение вероятности:

$$P(A/H_1)=\frac{C_{20}^3}{C_{20}^3}=1; \qquad P(A/H_2)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=\frac{28}{57}\approx 0{,}491;$$

$$P(A/H_3)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}=\frac{2}{19}\approx 0{,}105; \qquad P(A/H_4)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{1}{114}\approx 0{,}009.$$

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=\frac{197}{380}\approx 0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009\approx$$

$$\approx 0{,}518.$$

2) По условию, событие A произошло; определим тогда вероятность реализации гипотезы H_4, то есть послеопытную (или апостериорную) вероятность $P(H_4/A)$, которую находим по формуле Байеса:

$$P(H_4/A)=\frac{P(H_4)\cdot P(A/H_4)}{P(A)}=\frac{1}{591}\approx\frac{0{,}1\cdot 0{,}009}{0{,}518}\approx 0{,}002.$$

Отметим, что эта вероятность весьма мала, поэтому экзаменатор может достаточно уверенно считать, что ответивший на три вопроса студент подготовлен не плохо.

Типовая задача задания 4

Закон распределения дискретной случайной величины X задан в виде таблицы.

1) Построить многоугольник распределения;

2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

3) Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $\mathrm{D}[X]$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma[X]$.

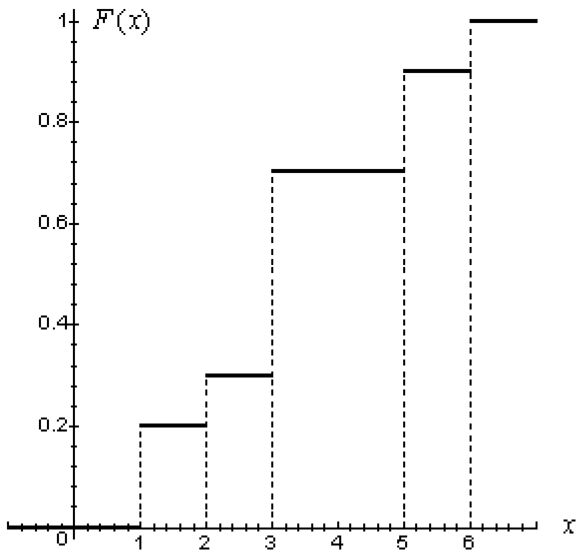
x_i	1	2	3	5	6
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Решение

1) Для построения многоугольника распределения в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых.

2) Функция распределения *F(x)* случайной величины *X* равна

$$F(x)=\begin{cases} 0; \ x\le 1 \\ 0{,}2; \ 1<x\le 2 \\ 0{,}2+0{,}1=0{,}3; \ 2<x\le 3 \\ 0{,}3+0{,}4=0{,}7; \ 3<x\le 5 \\ 0{,}7+0{,}2=0{,}9; \ 5<x\le 6 \\ 0{,}9+0{,}1=1; \quad x>6 \end{cases}$$



3)

$$M[X] = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}1 = 3{,}2;$$

$$D[X] = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}1 - 3{,}2^2 = 2{,}56;$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 1{,}6\,.$$

Типовая задача задания 5

Дифференциальная функция распределения (плотность распределения) $f(x)$ случайной величины X задана выражением, зависящим от параметра.

1. Найти значение параметра a;

2. Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ и построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины;

4. Вычислить вероятность P попадания случайной величины X на заданный интервал.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a\sqrt{x}, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases} \qquad\qquad P(0 \le X \le 0{,}5) = ?$$

Решение

1. По условию нормировки, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. В данном случае,

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} a\sqrt{x}\,dx = a \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}a$. Таким образом, $\frac{2}{3}a = 1$, откуда $a = \frac{3}{2}$. Значит, плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{3}{2}\sqrt{x}, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

2. Интегральная функция распределения $F(x)$ связана с плотностью вероятности $f(x)$ формулой

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

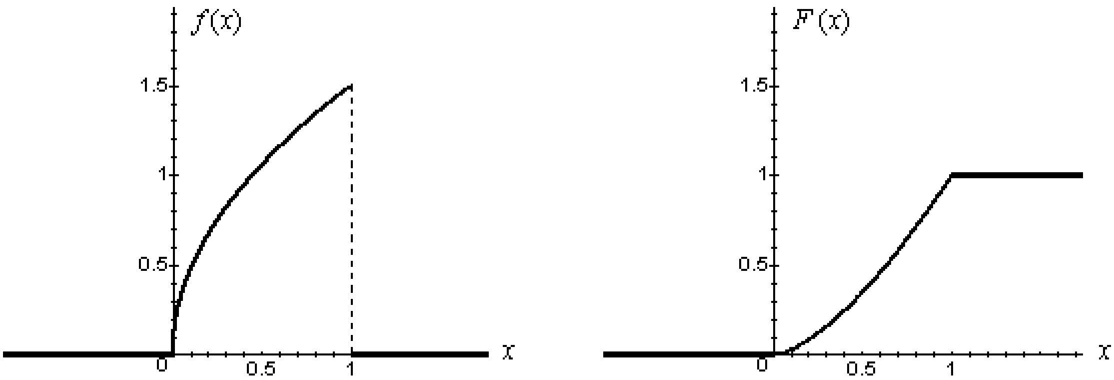
а) при $x\le 0 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0$;

б) при $0<x\le 1 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{x}\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt=t^{3/2}\Big|_{0}^{x}=x^{3/2}$;

в) при $x>1 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{1}\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt+\int_{1}^{x} 0\cdot dt=1.$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^{3/2}, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



3. $\mathrm{M}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\frac{3}{2}x\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{5}x^{5/2}\Big|_{0}^{1}=\frac{3}{5}=0{,}6$;

$\mathrm{D}(X)=\mathrm{M}(X^2)-(\mathrm{M}(X))^2$; $\mathrm{M}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\frac{3}{2}x^2\sqrt{x}\,dx=$

$=\frac{3}{7}x^{7/2}\Big|_{0}^{1}=\frac{3}{7}$, откуда $\mathrm{D}(X)=\frac{3}{7}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{12}{175}\approx 0{,}069$;

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{D}(X)}=\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}}\approx 0{,}262.$$

4. $P(0\le X\le 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}-0=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0{,}354.$

Типовая задача задания 6

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины *X* равны соответственно 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключённое в интервале (12, 14).

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где Φ_0 – функция Лапласа. Подставив $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$ и $\sigma = 2$, получим: $P(12<X<14)=\Phi_0(2)-\Phi_0(1)$. По таблице приложения 2 находим: $\Phi_0(2)=0{,}4772$, $\Phi_0(1)=0{,}3413$; таким образом, искомая вероятность $P(12<X<14)=0{,}1359$.

Замечание. Значения функции Лапласа $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ находят из таблиц. При этом используют свойства функции Φ_0:

1) Функция Φ_0 нечётна, то есть $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$;

2) При $x\to+\infty$ $\Phi_0(x)\to 0{,}5$, поэтому при $x>5$ полагают $\Phi_0(x)=0{,}5$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Тема: Математическая статистика.

Задание

Данные наблюдений сведены в упорядоченные группы и представлены в виде интервального статистического ряда. Первая строка таблицы – интервалы наблюдавшихся значений случайной величины *X*, вторая – соответствующие им частоты. Требуется:

1. Построить гистограмму относительных частот;
2. Вычислить числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение;
3. Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону, записать плотность вероятности случайной величины *X* и построить её график на одном чертеже с гистограммой относительных частот (график выравнивающей кривой);
4. Найти теоретические частоты нормального распределения. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить по критерию согласия Пирсона (хи-квадрат) гипотезу о нормальном законе распределения;
5. Найти интервальные оценки параметра *a* (математического ожидания) нормального распределения. Доверительную вероятность (надежность) принять равной 0,95.

1.

Интервалы	(3; 7)	(7; 11)	(11; 15)	(15; 19)	(19; 23)	(23; 27)	(27; 31)	(31; 35)
Частоты	1	5	28	53	62	36	12	3

2.

Интервалы	(20; 26)	(26; 32)	(32; 38)	(38; 44)	(44; 50)	(50; 56)	(56; 62)	(62; 68)
Частоты	1	4	20	43	60	44	23	5

3.

Интервалы	(4; 7)	(7; 10)	(10; 13)	(13; 16)	(16; 19)	(19; 22)	(22; 25)	(25; 28)
Частоты	5	20	43	59	48	19	5	1

4.

Интервалы	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)	(17; 21)	(21; 25)	(25; 29)	(29; 33)	(33; 37)
Частоты	3	10	33	55	53	31	12	3

5.

Интервалы	(2; 8)	(8; 14)	(14; 20)	(20; 26)	(26; 32)	(32; 38)	(38; 44)	(44; 50)
Частоты	3	10	30	51	56	24	20	6

6.

Интервалы	(1; 5)	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)	(17; 21)	(21; 25)	(25; 29)	(29; 33)
Частоты	1	6	21	50	63	42	15	2

7.

Интервалы	(10; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)	(50; 60)	(60; 70)	(70; 80)	(80; 90)
Частоты	1	3	20	39	70	36	10	1

8.

Интервалы	(3; 8)	(8; 13)	(13; 18)	(18; 23)	(23; 28)	(28; 33)	(33; 38)	(38; 43)
Частоты	1	6	20	53	66	41	11	2

9.

Интервалы	(5; 12)	(12; 19)	(19; 26)	(26; 33)	(33; 40)	(40; 47)	(47; 54)	(54; 61)
Частоты	4	9	37	49	55	37	6	3

10.

Интервалы	(2; 6)	(6; 10)	(10; 14)	(14; 18)	(18; 22)	(22; 26)	(26; 30)	(30; 34)
Частоты	1	8	26	50	58	38	15	4

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №7

Типовое задание

Данные наблюдений сведены в упорядоченные группы и представлены в виде интервального статистического ряда. Первая строка таблицы – интервалы наблюдавшихся значений случайной величины X, вторая – соответствующие им частоты. Требуется:

1. Построить гистограмму относительных частот;

2. Вычислить числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение;

3. Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону, записать плотность вероятности случайной величины X и построить её график на одном чертеже с гистограммой относительных частот (график выравнивающей кривой);

4. Найти теоретические частоты нормального распределения. При уровне значимости α = 0,05 проверить по критерию согласия Пирсона (хи-квадрат) гипотезу о нормальном законе распределения;

5. Найти интервальную оценку параметра *a* (математического ожидания) нормального распределения. Доверительную вероятность принять равной 0,95.

Интервалы	(6; 10)	(10; 14)	(14; 18)	(18; 22)	(22; 26)	(26; 30)	(30; 34)	(34; 38)
Частоты	4	15	38	58	50	26	8	1

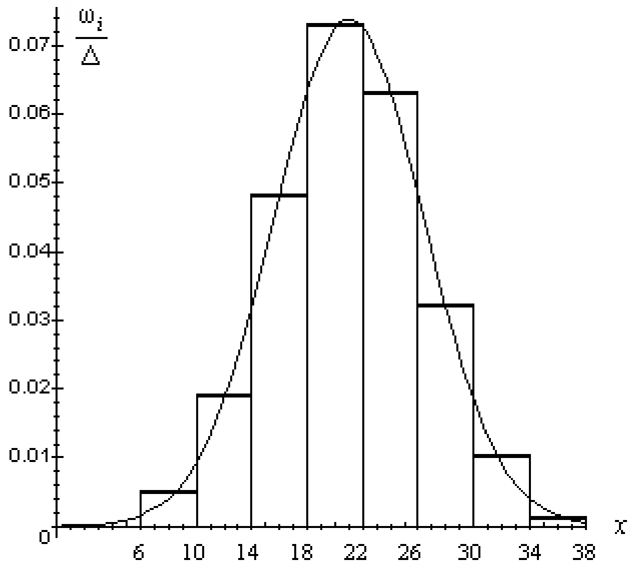
Решение

1. Объем выборки, по которой построен статистический ряд, равен $n = 4+15+38+58+50+26+8+1= 200$ - получают суммированием частот из второй строки таблицы.

Относительные частоты вычисляем по формуле $\omega_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1,2,...,8.$ Внесем полученные данные в таблицу (третья строка Таблицы).

Интервалы Δ_i	(6; 10)	(10; 14)	(14; 18)	(18; 22)	(22; 26)	(26; 30)	(30; 34)	(34; 38)
Частоты n_i	4	15	38	58	50	26	8	1
Относ.част. ω_i	0,02	0,075	0,19	0,29	0,25	0,13	0,04	0,005
Середины x_i*	8	12	16	20	24	28	32	36

Сумма относительных частот должна равняться единице. Для построения гистограммы надо над каждым интервалом статистического ряда построить прямоугольник, площадь которого равна соответствующей относительной частоте. Высоты этих прямоугольников определяем по формуле $h_i = \frac{\omega_i}{\Delta}$, где $\Delta=4$ – длина интервала в статистической таблице. С точностью до третьего знака после запятой получаем: $h_1=0{,}005$, $h_2=0{,}019$, $h_3=0{,}048$, $h_4=0{,}073$, $h_5=0{,}063$, $h_6=0{,}032$, $h_7=0{,}01$, $h_8=0{,}001$.



2. Стандартными точечными оценками *математического ожидания M[X]* и *дисперсии D[X]* изучаемой с.в. *X*, являются *выборочная средняя* и *выборочная дисперсия*. При вычислении этих оценок по выборке, заданной интервальным статистическим рядом, предполагают, что все наблюдаемые значения выборки, попавшие в *i-й* интервал, совпадают с его серединой x_i^* (четвертая строка таблицы).

В итоге получаем *выборочную среднюю*

$$\overline{x_в} = \frac{\sum x_i^* n_i}{200} = \frac{8\cdot 4 + 12\cdot 15 + 16\cdot 38 + 20\cdot 58 + 24\cdot 50 + 28\cdot 26 + 32\cdot 8 + 36\cdot 1}{200} = 21$$

Выборочная дисперсия

$$D_в = \frac{\sum (x_i^*)^2 n_i}{200} - (\bar{x}_в)^2 =$$

$$= \frac{8^2\cdot 4 + 12^2\cdot 15 + 16^2\cdot 38 + 20^2\cdot 58 + 24^2\cdot 50 + 28^2\cdot 26 + 32^2\cdot 8 + 36^2\cdot 1}{200} - 21^2 \approx 29$$

Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{200}{199}\cdot 29 \approx 29{,}1$$

Параметрами нормальной случайной величины являются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Оценки для них - это *выборочная средняя* $\bar{x} = 21$ и *выборочное среднее квадратическое отклонение* $\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{29} \approx 5{,}4$.

3. Таким образом, если исследуемая с.в. *X* распределена по нормальному закону, то это закон с параметрами $a = 21$ и $\sigma = 5{,}4$ т.е. $X \sim N(21;\ 5.4)$.

В этом случае плотность X имеет вид $f(x)=\frac{1}{5{,}4\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-21)^2}{2\cdot 5{,}4^2}}$. Для построения графика плотности найдем значения *f(x)* в точках x_i^*, $i=1{,}2{,}...{,}8$ и *x=21* – точка максимума *f(x)*. При вычислении воспользуемся таблицей значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Приложение 1). Очевидно, что

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi(u),\text{где } u=\frac{x-a}{\sigma}.$$

В итоге получаем $\frac{x_1^*-a}{\sigma}=-\frac{13}{5{,}4}\approx-2{,}67;\quad f(x_1^*)=\frac{\varphi(2{,}41)}{5{,}4}=\frac{0{,}0220}{5{,}4}=0{,}004$ (воспользовались четностью функции $\varphi(x)$ $(\varphi(x)=\varphi(-x))$. Аналогично находим остальные значения:

$$\frac{x_2^*-a}{\sigma}=-1{,}67;\quad f(x_2^*)=\frac{0{,}0989}{5{,}4}=0{,}018;$$

$$\frac{x_3^*-a}{\sigma}=-0{,}93;\quad f(x_3^*)=\frac{0{,}2589}{5{,}4}=0{,}048;$$

$$\frac{x_4^*-a}{\sigma}=-0{,}19;\quad f(x_4^*)=\frac{0{,}3918}{5{,}4}=0{,}073;$$

$$\frac{x_5^*-a}{\sigma}=0{,}56;\quad f(x_5^*)=\frac{0{,}3411}{5{,}4}=0{,}063;$$

$$\frac{x_6^*-a}{\sigma}=1{,}30;\quad f(x_6^*)=\frac{0{,}1714}{5{,}4}=0{,}032;$$

$$\frac{x_7^*-a}{\sigma}=2{,}04;\quad f(x_7^*)=\frac{0{,}0498}{5{,}4}=0{,}009;$$

$$\frac{x_8^*-a}{\sigma}=2{,}78;\quad f(x_7^*)=\frac{0{,}0084}{5{,}4}=0{,}002;$$

$$f(21)=\frac{0{,}3989}{5{,}4}=0{,}074.$$

Все вычисления проведены с точностью до третьего знака после запятой. Нанесем полученные точки на чертеж с гистограммой и соединим их гладкой кривой. Получили график плотности X (*график выравнивающей кривой*). Видно, что график выравнивающей кривой хорошо согласуется с гистограммой, что подтверждает предположение о нормальном законе распределения X (см. рисунок выше).

4. Проверим гипотезу о нормальном распределении X по критерию Пирсона [2, гл. 8.6, пример 8.8]. Вернемся к Таблице из пункта (1) решения. Частоты (эмпирические) в крайних интервалах таблицы меньше 5, поэтому крайние интервалы надо объединить с соседними (см. [2, стр. 250]). Получим ряд распределения:

$[x_i, x_{i+1})$	[6; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 38)
n_i	19	38	58	50	26	9

Всего осталось $m=6$ маленьких интервалов.
Для каждого интервала найдем *теоретические частоты* n_i' (сколько наблюдений должно было бы попасть в *i-й* интервал, если верно, что случайная величина $X \sim N(21; 5{,}4)$.
Сначала вычисляем вероятности p_i попадания случайной величины X на интервал $[x_i; x_{i+1}]$. Так как $X \sim N(21; 5{,}4)$, то

$$p_i = p\{x_i \le X \le x_{i+1}\} = \Phi_0\left(\frac{x_{i+1}-21}{5{,}4}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_i-21}{5{,}4}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ – функция Лапласа и ее значения представлены в Приложении 2.
Для первого и последнего интервалов вероятности вычисляют иначе:

$$p_1 = p\{-\infty < X \le 14\} = \Phi_0\left(\frac{14-21}{5{,}4}\right) - \Phi_0(-\infty) = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}30) = 0{,}5 - 0{,}4032 = 0{,}0968;$$

$$p_6 = p\{30 \le X < \infty\} = \Phi_0(\infty) - \Phi_0\left(\frac{30-21}{5{,}4}\right) = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}67) = 0{,}5 - 0{,}4525 = 0{,}0475.$$

Оставшиеся вероятности равны:

$$p_2 = \Phi_0\left(\frac{18-21}{5{,}4}\right) - \Phi_0\left(\frac{14-21}{5{,}4}\right) = \Phi_0(-0{,}56) - \Phi_0(-1{,}30) = -0{,}2123 + 0{,}4032 = 0{,}1909$$

$$p_3 = \Phi_0\left(\frac{22-21}{5{,}4}\right) - \Phi_0\left(\frac{18-21}{5{,}4}\right) = \Phi_0(0{,}19) - \Phi_0(-0{,}56) = 0{,}0754 + 0{,}2123 = 0{,}2877$$

$$p_4 = \Phi_0\left(\frac{26-21}{5{,}4}\right) - \Phi_0\left(\frac{22-21}{5{,}4}\right) = \Phi_0(0{,}93) - \Phi_0(0{,}19) = 0{,}3238 - 0{,}0754 = 0{,}2484$$

$$p_5 = \Phi_0\left(\frac{30-21}{5{,}4}\right) - \Phi_0\left(\frac{26-21}{5{,}4}\right) = \Phi_0(1{,}67) - \Phi_0(0{,}93) = 0{,}4525 - 0{,}3238 = 0{,}1287$$

После чего находим теоретические частоты по формуле $n_i' = 200 \cdot p_i$. Полученные результаты сведем в таблицу:

$[x_i, x_{i+1})$	$(-\infty; 14)$	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	$[30; \infty)$
n_i	19	38	58	50	26	9
n_i'	19,36	38,18	57,54	49,68	25,74	9,5

Применение критерия χ^2 включает следующие шаги.

Вычисляем *наблюдаемое значение величины* χ^2:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \left(\frac{19^2}{19{,}36} + \frac{38^2}{38{,}18} + \frac{58^2}{57{,}54} + \frac{50^2}{49{,}68} + \frac{26^2}{25{,}74} + \frac{9^2}{9{,}5} \right) - 200 \approx 200{,}04 - 200 =$$

$= 0.04$.

Находим *число степеней свободы* по формуле $k = m-r-1$, где $m=6$ – число интервалов в уточненной таблице распределения, а $r=2$ – количество оцениваемых параметров распределения X – у нас это $\bar{x}$ и $D_в$.

Получаем $k=6-2-1=3$.

По заданному уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и $k=3$ находим в таблице (Приложение 4) *критическое значение* $\chi^2_{крит} = 7{,}8$.

Сравниваем наблюдаемое и критическое значение величины χ^2. У нас $\chi^2_{набл} = 0{,}04 < \chi^2_{крит} = 7{,}8$. Это означает, что гипотеза не противоречит опытным данным. Следовательно, нет основания отвергать проверяемую гипотезу, и *мы принимаем гипотезу о нормальном распределении случайной величины X*.

5. После пункта (4) мы вправе считать, что *наша выборка произведена из случайной величины X, распределенной по нормальному закону*, параметры которого ($M[X]$ *и* $\sigma = \sqrt{D[X]}$) неизвестны.

В этом случае *доверительный интервал для математического ожидания* имеет вид [2, гл.8.4, формула (8.9)]

$(\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}})$, где $\bar{x}$ - выборочное среднее, $S = \sqrt{S^2}$ - исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ - критическая точка (квантиль) распределения Стьюдента (Приложение 3), найденное по *доверительной вероятности* $\gamma=0{,}95$ и *объёму выборки* $n=200$.

В нашем случае: $\bar{x} = 21$; $S = \sqrt{29{,}1} \approx 5{,}4$; $t_\gamma = 1{,}98$; $t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 1{,}98 \frac{5{,}4}{\sqrt{200}} \approx 0{,}76$.

Следовательно, доверительный интервал для математического ожидания $M[X]$ равен (21-0,76; 21+0,76) = (20,24; 21,76).

Это означает, что с *надежностью* (*доверительной вероятностью*) $\gamma=0{,}95$ можно утверждать, что $M[X]$ принадлежит интервалу *(20,24; 21,76).*

Замечание. Критическую точку $t_\gamma=1{,}98$ из Приложения 3 мы взяли для $n=120$. Видно, что для больших n критические значения практически не изменяются (изменяются от 1,98 до 1,96).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2369	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	10060	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Продолжение приложения 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,00	0,0000	0,16	0,0636	0,32	0,1255	0,48	0,1844
0,01	0,0040	0,17	0,0675	0,33	0,1293	0,49	0,1879
0,02	0,0080	0,18	0,0714	0,34	0,1331	0,50	0,1915
0,03	0,0120	0,19	0,0753	0,35	0,1368	0,51	0,1950
0,04	0,0160	0,20	0,0793	0,36	0,1406	0,52	0,1985
0,05	0,0199	0,21	0,0832	0,37	0,1443	0,53	0,2019
0,06	0,0239	0,22	0,0871	0,38	0,1480	0,54	0,2054
0,07	0,0279	0,23	0,0910	0,39	0,1517	0,55	0,2088
0,08	0,0319	0,24	0,0948	0,40	0,1554	0,56	0,2123
0,09	0,0359	0,25	0,0987	0,41	0,1591	0,57	0,2157
0,10	0,0398	0,26	0,1026	0,42	0,1628	0,58	0,2190
0,11	0,0438	0,27	0,1064	0,43	0,1664	0,59	0,2224
0,12	0,0478	0,28	0,1103	0,44	0,1700	0,60	0,2257
0,13	0,0517	0,29	0,1141	0,45	0,1736	0,61	0,2291
0,14	0,0557	0,30	0,1179	0,46	0,1772	0,62	0,2324
0,15	0,0596	0,31	0,1217	0,47	0,1808	0,63	0,2357

Продолжение приложения 2

X	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,64	0,2389	0,94	0,3264	1,24	0,3925	1,54	0,4382
0,65	0,2422	0,95	0,3289	1,25	0,3944	1,55	0,4394
0,66	0,2454	0,96	0,3315	1,26	0,3962	1,56	0,4406
0,67	0,2486	0,97	0,3340	1,27	0,3980	1,57	0,4418
0,68	0,2517	0,98	0,3365	1,28	0,3997	1,58	0,4429
0,69	0,2549	0,99	0,3389	1,29	0,4015	1,59	0,4441
0,70	0,2580	1,00	0,3413	1,30	0,4032	1,60	0,4452
0,71	0,2611	1,01	0,3438	1,31	0,4049	1,61	0,4463
0,72	0,2642	1,02	0,3461	1,32	0,4066	1,62	0,4474
0,73	0,2673	1,03	0,3485	1,33	0,4082	1,63	0,4484
0,74	0,2703	1,04	0,3508	1,34	0,4099	1,64	0,4495
0,75	0,2734	1,05	0,3531	1,35	0,4115	1,65	0,4505
0,76	0,2764	1,06	0,3554	1,36	0,4131	1,66	0,4515
0,77	0,2794	1,07	0,3577	1,37	0,4147	1,67	0,4525
0,78	0,2823	1,08	0,3599	1,38	0,4162	1,68	0,4535
0,79	0,2852	1,09	0,3621	1,39	0,4177	1,69	0,4545
0,80	0,2881	1,10	0,3643	1,40	0,4192	1,70	0,4554
0,81	0,2910	1,11	0,3665	1,41	0,4207	1,71	0,4564
0,82	0,2939	1,12	0,3686	1,42	0,4222	1,72	0,4573
0,83	0,2967	1,13	0,3708	1,43	0,4236	1,73	0,4582
0,84	0,2995	1,14	0,3729	1,44	0,4251	1,74	0,4591
0,85	0,3023	1,15	0,3749	1,45	0,4265	1,75	0,4599
0,86	0,3051	1,16	0,3770	1,46	0,4279	1,76	0,4608
0,87	0,3078	1,17	0,3790	1,47	0,4292	1,77	0,4616
0,88	0,3106	1,18	0,3810	1,48	0,4306	1,78	0,4625
0,89	0,3133	1,19	0,3830	1,49	0,4319	1,79	0,4633
0,90	0,3159	1,20	0,3849	1,50	0,4332	1,80	0,4641
0,91	0,3186	1,21	0,3869	1,51	0,4345	1,81	0,4649
0,92	0,3212	1,22	0,3883	1,52	0,4357	1,82	0,4656
0,93	0,3238	1,23	0,3907	1,53	0,4370	1,83	0,4664

Продолжение приложения 2

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
1,84	0,4671	2,06	0,4803	2,44	0,4927	2,80	0,4974
1,85	0,4678	2,08	0,4812	2,46	0,4931	2,82	0,4976
1,86	0,4686	2,10	0,4821	2,48	0,4934	2,84	0,4977
1,87	0,4693	2,12	0,4830	2,50	0,4938	2,86	0,4979
1,88	0,4699	2,14	0,4838	2,52	0,4941	2,88	0,4980
1,89	0,4706	2,16	0,4846	2,54	0,4945	2,90	0,4981
1,90	0,4713	2,18	0,4854	2,56	0,4948	2,92	0,4982
1,91	0,4719	2,20	0,4861	2,58	0,4951	2,94	0,4984
1,92	0,4726	2,22	0,4868	2,60	0,4953	2,96	0,4985
1,93	0,4732	2,24	0,4875	2,62	0,4956	2,98	0,4986
1,94	0,4738	2,26	0,4881	2,64	0,4959	3,00	0,49865
1,95	0,4744	2,28	0,4887	2,66	0,4961	3,20	0,49931
1,96	0,4750	2,30	0,4893	2,68	0,4963	3,40	0,49966
1,97	0,4756	2,32	0,4898	2,70	0,4965	3,60	0,499841
1,98	0,4761	2,34	0,4904	2,72	0,4967	3,80	0,499928
1,99	0,4767	2,36	0,4909	2,74	0,4969	4,00	0,499968
2,00	0,4772	2,38	0,4913	2,76	0,4971	4,50	0,499997
2,02	0,4783	2,40	0,4918	2,78	0,4973	5,00	0,499997
2,04	0,4793	2,42	0,4922				

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma,\ n)$

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы m	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

СОДЕРЖАНИЕ