Материалы для заочного математического кружка по дополнительным разделам математики

Задачи, разбираемые школьниками на математических кружках, очень близки олимпиадным заданиям. По сути, это и есть олимпиадные задачи, а подобные математические кружки служат подготовкой к успешному написанию олимпиад. К подготовке к решениям олимпиадных заданий нужно подходить с особой внимательностью. С одной стороны, задания составлены таким образом, что бы их можно было решить изучаемыми в школе методами, что бы в решении задачи не пришлось применять никаких понятий и фактов, выходящих за рамки школьной программы. С другой стороны, само понятие “олимпиадная задача” подразумевает красивое изящное решение, неожиданный прием или метод, что и отличает олимпиадную задачу от, например, экзаменационной.

В связи с этим, при подготовке надо учитывать основной контингент учащихся, принимающих участие в математическом кружке и в олимпиаде. В наших методических рекомендациях основной расчет делается на школьников, решивших поступать в технические вузы, такие как МГТУ ГА. Поэтому и уровень разбираемых заданий должен соответствовать требованиям этих технических вузов, а не физико-математических.

В олимпиадные варианты обычно включается 5 – 10 задач на следующие темы. Данный перечень тем дает приблизительную ориентацию в огромном разнообразии задач и идей, встречающихся в их решении, — многие задачи могут быть отнесены одновременно к нескольким темам, другие настолько своеобразны, что при попытках более тонкой классификации, для каждой задачи пришлось бы завести отдельную «тему». На каждую тему приведено по две олимпиадные задачи, иллюстрирующие данный метод.

1. Задачи на целые числа и делимость.

В разнообразных задачах про целые числа используются основные понятия и теоремы, связанные с делимостью. Каждое целое число a можно разделить на натуральное число m с остатком, то есть представить в виде $a=mq+r$, где q и r, (r – остаток) — целые числа и $0 \leq r < m$.

Среди любых m последовательных целых чисел найдется ровно одно число, делящееся на m. Если два числа a и b при делении на число m дают одинаковые остатки, то говорят, что a сравнимо с b по модулю m. Записывают это так $a \equiv b \pmod{m}$.

Если a и b — натуральные числа и $a=bq+r$ $(0 \leq r < b)$, то наибольший общий делитель d этих чисел равен наибольшему общему делителю b и r; пользуясь этим утверждением несколько раз, можно найти его как последний не равный нулю остаток в цепочке делений с остатком:

$$a = bq + r,\ b = rq_1 + r_1,\ r = r_1 q_2 + r_2,\ r_1 = r_2 q_3 + r_3, \dots,\ r_{n-1} = r_n q_{n+1} + d,\ r_n = dq_{n+2}$$

(алгоритм Евклида); отсюда следует, что существуют целые числа x и y, такие, что $a=bq+r$. В частности, если числа a и b взаимно просты, т. е. не имеют общих множителей, больших 1, то существуют целые x и y, для которых $ax+by=1$.

Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых чисел (основная теорема арифметики). Количество простых чисел бесконечно; доказательство этого утверждения по Евклиду основано на том, что произведение нескольких простых чисел, сложенное с единицей, имеет отличные от всех этих простых чисел множители.

Если числа $b_1, b_2, ..., b_n$ попарно взаимно просты, то для любых остатков $r_1, r_2, ..., r_n$ $(0 \le r_i < b_i)$ найдется число a, которое при делении на b_i дает остаток r_i, т. е. $a \equiv r_i \pmod{b_i}$ при $i=1,2,...,n$ (китайская теорема об остатках).

Задача. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

Задача. Номер автобусного билета – шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр номера равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

2. Задачи о цифрах и системах счисления.

В задачах, где речь идет о цифрах в десятичной записи натурального числа

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$

(эта запись иногда обозначается через $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$), используются разнообразные соображения: делимость целых чисел, алгебраические преобразования, оценки. В частности, полезен признак делимости на 3 и на 9, а также следующее его уточнение: число $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ дает при делении на 9 (и на 3) тот же остаток, что и его сумма цифр (разность

$$A - (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + ... + a_1 \cdot (10 - 1),$$

очевидно, делится на 9).

Иногда оказывается полезной запись натурального числа A в системе счисления с основанием q:

$$A = a_n \cdot q^n + a_{n-1} \cdot q^{n-1} + ... + a_1 \cdot q + a_0$$

где a_i, $0 \le a_i < q$ $(i = 1, 2, ..., n)$ —«цифры» этой системы счисления.

Задача. У каждого из чисел от 1 до 1000000000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитывается сумма его цифр и т.д. до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше: 1 или 2?

Задача. Найдите наибольшее возможное число, являющееся полным квадратом, такое, что после вычеркивания двух его последних цифр получается снова полный квадрат. (Предполагается, что одна из вычеркиваемых цифр – не нуль.)

3. Задачи на рациональные и иррациональные числа.

Рациональное число a представимо в виде $a = m/n$, где m – целое число, n – натуральное число, а также в виде периодической бесконечной десятичной (q-ичной) дроби. Десятичные (q-ичные) дроби, представляющие иррациональные числа, не периодичны.

Вместе с иррациональным числом $a + b\sqrt{d}$ (где a и b — рациональные числа, d — целое число, не являющееся квадратом натурального числа) полезно рассмотреть «сопряженное» с ним число $a - b\sqrt{d}$: его сумма и произведение с исходным — рациональные числа, так что числа $a \pm b\sqrt{d}$ являются корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача. В восьмиугольнике все углы равны, а длины сторон – целые числа. Докажите, что противоположные стороны восьмиугольника равны между собой.

Задача. При каких целых m и n выполняется равенство

$$(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n \ ?$$

4. Задачи на квадратный трёхчлен, на непрерывные функции, графики и корни уравнений.

В большинстве задач, сводящихся к исследованию квадратичной функции $y = f(x) = ax^2 + bx + c,$ полезно представить себе ее график. Если он пересекает ось *Ox* в двух точках (корнях) x_1 и x_2, то между корнями значения функции $y = f(x)$ противоположны по знаку числу *a*, а вне отрезка $[x_1, x_2]$ — совпадают по знаку с числом *a*. При этом вершина параболы $y = f(x)$ (абсцисса которой равна полусумме корней) соответствует точке экстремума функции $y = f(x)$: минимума, если $a > 0$, и максимума, если $a < 0$.

В ряде задач полезно использовать такой факт: если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает в концах этого отрезка значения разных знаков, то между точками *a* и *b* лежит хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0.$

Задача. Дан равносторонний треугольник со стороной 1. При каком наименьшем значении *d* отрезок длины *d* может, скользя концами по сторонам треугольника, замести его целиком?

Задача. Каково наименьшее натуральное число *a*, для которого найдется квадратный трехчлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом *a*, имеющий два различных положительных корня, меньших единицы?

5. Задачи из алгебры многочленов.

Многочлен *P(x)*, имеющий число *a* корнем, делится на двучлен *(x-a)*, то есть представляется в виде *P(x)=(x-a)Q(x)*, где *Q(x)* — многочлен на единицу меньшей степени (при этом, если *P(x)* имеет целые коэффициенты, то и $Q(x)$ —тоже). Многочлен степени n имеет не более n корней (даже с учетом кратности). Отсюда следует, что если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени, не большей n, принимают одинаковые значения более, чем в n точках, то их коэффициенты при соответствующих степенях равны.

Также используются тождества для многочленов с двумя переменными x и y.

Задача. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, d, что выражение ax^3+bx^2+cx+d равно 1 при x=19 и равно 2 при x=62.

Задача. На доске написано уравнение

$$x^3+\ldots+x^2+\ldots+x+\ldots=0.$$

Двое играют в такую игру. Первый ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от нуля (положительное или отрицательное). Затем второй ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, первый ставит целое число на последнее свободное место. Докажите, что первый может играть так, чтобы независимо от хода второго все три корня получившегося уравнения оказались целыми числами.

6. Задачи на выполнение тождеств.

Можно использовать соображение, что если уравнение или система выполняется при любых значениях переменных, то и при конкретных значениях.

Задача. Найдите такие вещественные числа a, b, p, q, чтобы равенство

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

выполнялось при любых x.

Задача. При каких действительных числах a, b, c равенство

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=|x|+|y|+|z|$$

верно для всех действительных чисел x, y, z ?

7. Уравнения и системы уравнений.

При решении и исследовании уравнений, помимо обычных «школьных» методов (подстановки, замены переменной, преобразования), иногда используются соображения монотонности: если функция $y=f(t)$ — строго возрастает или строго убывает, то уравнения $f(g_1)=f(g_2)$ и $g_1=g_2$ равносильны. При решении систем уравнений иногда бывают полезны геометрическая интерпретация, соображения симметрии и т. д.

Ряд задач связан с линейными соотношениями между несколькими переменными.

Задача. Двое играют в такую игру. Первый записывает один под другим два ряда по 10 чисел так, чтобы выполнялось следующее правило: если число b записано под числом a, а число d — под числом c, то $a+d=b+c$. Второй игрок, зная это правило, хочет определить все написанные числа. Ему разрешается задавать первому игроку вопросы типа «Какое число стоит в первой строке на третьем месте?» или «Какое число стоит во второй строке на девятом месте?» и т. п. За какое наименьшее число таких вопросов второй игрок сможет узнать все числа?

Задача. В таблице $m\times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся числам можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не меньше чем $m+n-1$ чисел.

8. Неравенства.

Среди часто встречающихся неравенств, отметим неравенства с модулями, неравенства, связывающие среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое двух или нескольких чисел, а также неравенства для оценок тригонометрических функций.

Задача. Какое из чисел больше: 31^{11} или 17^{14} ?

Задача. Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

9. Задачи на принцип Дирихле.

Если в k клетках больше nk зайцев, то хотя бы в одной клетке сидит больше n зайцев. Подобные соображения используются в разных задачах для доказательства существования.

Приведем еще несколько похожих на «принцип Дирихле» (и столь же очевидных) утверждений, используемых в геометрических и аналитических задачах. Если сумма площадей нескольких фигур меньше S, то ими нельзя покрыть фигуру площади S. Если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков с суммой длин L, то найдется точка, покрытая не более чем $[L]$ (целая часть от L) этими отрезками. Если среднее арифметическое нескольких чисел больше a, то хотя бы одно из этих чисел больше a.

Задача. Дана таблица 4×4 клетки, в некоторых клетках которой расставляются звездочки. Докажите, что можно так расставить семь звездочек, что при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда будет хотя бы одна звездочка. Докажите, что если звездочек меньше чем семь, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

Задача. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

10. Комбинаторика.

Основной прием в задачах на подсчет числа различных комбинаций элементов конечного множества — установление соответствия между множествами, заданными различными условиями.

В частности, множество всех упорядоченных наборов из n единиц и нулей — всего таких наборов 2^n — может быть поставлено в соответствие множеству всех подмножеств данного множества из n элементов. Множество таких наборов, содержащий k единиц, соответствует множеству всех k-элементных подмножеств n-элементного множества. Всего таких наборов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}.$$

При $n=2$ — это число неупорядоченных пар элементов из данного множества: $C_n^2 = n(n-1)/2.$

Число перестановок (упорядочений) данного множества из n элементов равно $n! = 1\bullet 2\bullet\ldots\bullet n.$

Задача. Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Докажите, что

$$\frac{2}{5} \le \frac{m}{n} \le \frac{3}{5}.$$

Задача. Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее, чем в 2^{n-1} разрядах.

11. Задачи на графы и отображения.

Изображая элементы некоторого множества точками и соединяя некоторые пары точек отрезками, мы получаем наглядное представление для очень популярного объекта дискретной математики. Он называется графом; точки (элементы множества) называются вершинами, отрезки (или дуги) — ребрами графа. Граф, из любой вершины которого можно пройти в любую другую путем, состоящим из ребер, называется связным. Замкнутый путь по ребрам графа называется циклом. Связный граф без циклов — дерево — имеет вершин на одну больше, чем ребер. Если все циклы графа имеют четную длину, то его вершины можно раскрасить в два цвета так, что вершины одного цвета не соединены ни одним ребром; такой граф называется двудольным.

Если на ребрах графа расставить стрелки, то получится ориентированный граф (орграф). Любое отображение f конечного множества A в себя задает орграф, из каждой вершины a которого выходит одна стрелка — в вершину $f(A)$. (При этом возможны и петли — стрелки, идущие из a в a; они соответствуют неподвижным точкам отображения f.) Если f взаимнооднозначно, то орграф распадается на циклы (и петли).

Один из примеров сложного графа — схема телефонной сети.

Рассматриваются также графы, ребра или вершины которых раскрашены в несколько цветов, или помечены числами.

Задача. n точек соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки можно пройти в каждую из остальных по этим отрезкам, причем нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Докажите, что общее число отрезков равно $n-1$.

Задача. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

12. Задачи на чётность и раскраску, задачи на решётках.

В задачах про графы часто важны соображения четности. Например, число вершин, к которым примыкает нечетное число ребер, всегда четно. Соображения подобного рода полезны и в других задачах; например, для решения классической задачи: можно ли шахматную доску 8×8 клеток без двух клеток в противоположных углах покрыть «доминошками» 1×2 — достаточно заметить, что каждая доминошка покрывает две клетки разного цвета (при обычной шахматной раскраске), а угловые клетки — одного цвета. Бывает полезна и раскраска в большее число цветов.

Помимо четности или раскраски, в задачах на клетчатой бумаге и других плоских и пространственных решетках также нередко используются различные геометрические и комбинаторные соображения, метод координат. Бывает полезно рассмотреть клетчатую бумагу как числовую плоскость, на которой узлы решетки — точки с целочисленными координатами, или квадрат из p^2 узлов, координаты которых — пары остатков (x,y) при делении на p.

Задача. Шахматная доска размером 6×6 покрыта 18 костями домино размером 2×1 (каждая кость покрывает две клетки). Докажите, что при любом таком покрытии можно разрезать доску на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

Задача. Город имеет в плане вид прямоугольника, разбитого на клетки: n улиц параллельны друг другу, m других пересекают их под прямым углом. На улицах города, но не на перекрестках, стоят милиционеры. Каждый милиционер сообщает номер проходящего мимо него автомобиля, направление его движения и время, когда он проехал. Какое наименьшее число милиционеров нужно расставить на улицах, чтобы по их показаниям можно было однозначно восстановить путь любого автомобиля, едущего по замкнутому маршруту (маршрут не проходит по одному и тому же участку улицы дважды)?

13. Операции и инварианты.

В задачах, где требуется выяснить, можно ли с помощью заданных операций перейти от одного из объектов к другому, часто полезно найти «инвариант» — числовую характеристику объектов (или функцию с какими-то другими значениями на множестве объектов), которая не меняется при указанных операциях. Если при этом значение инварианта на двух объектах различно, то превратить один в другой нельзя. В целочисленных и других «дискретных» задачах инвариантом часто служит остаток от деления на 2 (четность) или на другое натуральное число.

Если все выполняемые операции обратимы, то все множество объектов, над которыми они выполняются, разбивается на классы эквивалентности (два объекта эквивалентны, если один из них может быть получен из другого заданными операциями).

В задачах, где требуется оценить количество операций или доказать, что их нельзя проделывать бесконечное число раз (скажем, убедиться в отсутствии «цикла»), иногда бывает полезно придумать функцию, которая при каждой операции возрастает (или при каждой операции убывает).

Задача. На всех клетках шахматной доски 8×8 расставлены плюсы, за исключением одной не угловой клетки, где стоит минус. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках одной горизонтали, одной вертикали или одной диагонали. Докажите, что сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить доску с одними плюсами.

Задача. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c)<0,$ то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

14. Задачи на расстановки цифр и целых чисел, их преобразования, турниры.

В решениях задач о конечных последовательностях из целых чисел, букв, фишек, расстановках их по окружности или в таблице сочетаются различные соображения, связанные с делимостью, комбинаторикой, оценками, использующими индукцию.

Задачи о турнирах, набранных очках и занятых участниками местах, объединенные спортивной тематикой,

Задача. В концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая из получившихся полуокружностей делится пополам, и в ее середине пишется сумма чисел, стоящих в концах (первый шаг). Затем каждая из четырех получившихся дуг делится пополам, и в ее середине пишется число, равное сумме чисел, стоящих в концах дуги (второй шаг). Такая операция проделывается n раз. Найдите сумму всех записанных чисел.

Задача. В шахматном турнире участвовало 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

15. Задачи на планиметрию.

Почти в каждом варианте олимпиадных задач встречается традиционная школьная, хотя и не простая, задача по геометрии. Среди наиболее распространенных геометрических теорем, используемых для их решения, отметим следующие.

Угол между касательной и секущей окружности равен полуразности величин дуг, заключенных между сторонами угла; квадрат длины касательной равен произведению отрезков секущей от вершины угла до точек ее пересечения с окружностью. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны; четырехугольник описан около окружности, если и только если суммы противоположных сторон равны. Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус окружности.

В отдельные группы выделим задачи о правильных многоугольниках; использующие понятие «геометрического места» (множества) точек; на применение геометрических преобразований (поворотов, параллельных переносов, подобий и их композиций); задачи, в которых речь идет о площади фигур (или, как нередко бывает, площадь служит вспомогательным инструментом в решении).

Задача. Три последовательные вершины ромба лежат соответственно на сторонах *AB, BC, CD* данного квадрата со стороной 1. Найдите площадь фигуры, которую заполняют четвертые вершины таких ромбов.

Задача. Точки *A* и *B* движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям с центрами O_1 и O_2 соответственно (по часовой стрелке). Докажите, что вершина *C* правильного треугольника *ABC* также движется равномерно по некоторой окружности.

16. Задачи на стереометрию.

В решениях задач полезно рассмотреть проекции фигур на плоскость (или на прямую). Отметим также теорему, не входящую обычно в школьный курс: в трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других.

Задача. На какое наименьшее число неперекрывающихся тетраэдров можно разбить куб?

Задача. Докажите, что сумма длин ребер многогранника больше $3d$, где d – расстояние между наиболее удаленными вершинами многогранника.

17. Задачи на комбинаторную геометрию.

Это название относится к разнообразным оценкам, связанным с размещениями, покрытиями, различными комбинациями фигур. Здесь используются самые общие свойства, связанные с расположением фигур на плоскости (и в пространстве).

Укажем среди них теорему Жордана: любая не самопересекающаяся замкнутая ломаная делит плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю, причем любой путь из точки внутренней области в точку внешней пересекает эту ломаную, а две точки каждой области можно соединить путем, не пересекающим ломаной.

Напомним определение выпуклого множества — это множество, которое вместе с каждыми двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Выпуклой оболочкой фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее эту фигуру; выпуклая оболочка конечного множества — многоугольник (в пространстве — многогранник) с вершинами в некоторых из данных точек.

Вместе с данной фигурой бывает полезно рассмотреть ее окрестность: множество точек, наименьшее расстояние от которых до точек фигуры меньше некоторого фиксированного числа.

Задача. Из пяти данных окружностей любые четыре проходят через одну точку. Докажите, что найдется точка, через которую проходят все пять окружностей.

Задача. Прожектор освещает угол 90°. Докажите, что расположенные в четырех произвольных точках плоскости прожектора можно направить так, чтобы осветить всю плоскость.

18. Задачи на геометрические неравенства, оценки, экстремумы.

Среди многочисленных теорем, используемых в оценках и доказательстве неравенств геометрическими средствами, отметим следующие, наиболее распространенные. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других (неравенство треугольника). Угол треугольника меньше, равен или больше 90° в зависимости от того, меньше, равен или больше суммы квадратов двух прилежащих к нему сторон квадрат противолежащей стороны. Длина проекции отрезка на плоскость или прямую не больше длины этого отрезка. Площадь проекции многоугольника на любую плоскость не больше площади многоугольника.

Задача. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, стороны которого a, b, c заключены в следующих пределах:

$$0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3\ ?$$

Задача. Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника *ABCD* делит его площадь пополам. Докажите, что *ABCD* – параллелограмм.

19. Задачи на векторы.

Кроме наиболее стандартных операций над векторами — сложения, вычитания и умножения на число — полезно использовать также скалярное произведение и соображения о центре тяжести системы *n* точек.

Задача. Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32-угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

Задача. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар *A, B* этих точек взяты векторы *AB,* при чем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма выбранных векторов равна 0.

20. Задачи на оценки и экстремальные задачи для наборов чисел и таблиц.

Во многих олимпиадах встречаются задачи о сравнении по величине чисел из некоторого конечного набора, о расположениях точек на прямой, об оценках сумм, разностей и о других функциях, связанных с числовым набором или таблицей.

Часто в таких задачах бывает полезным: выбрать наибольшее или наименьшее число из набора («принцип крайнего»), упорядочить числа набора по величине.

Задача. Каждое из чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ может независимо от остальных принимать значение 1, 0 или -1. Какое наименьшее значение может иметь сумма всевозможных попарных произведений этих n чисел?

Задача. Натуральное число k в десятичной записи имеет n знаков. Это число округлили с точностью до десятков, заменив последнюю цифру нулем и увеличив на единицу число десятков, если эта последняя цифра была больше четырех. Полученное число аналогичным образом округлили с точностью до сотен и так далее. В результате последнего $(n-1)$-го округления получилось число l. Докажите, что $l<18k/13$.

21. Задачи на последовательности.

В данном типе задач встречаются периодические последовательности, рекуррентные (в которых каждый следующий член последовательности – некоторая функция от предыдущих членов последовательности). В подобных задачах можно использовать огрубление оценок и соображение монотонности.

Задача. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, члены которой — целые положительные числа. Один из них — полный квадрат. Докажите, что прогрессия содержит бесконечно много квадратов.

Задача. В числовых последовательностях a_n и b_n каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательностях?

22. Игры, преследования, стратегии и алгоритмы.

Решение задач, в которых речь идет о достижении цели с помощью последовательности ходов — в частности, требуется выяснить, кто из игроков побеждает в той или иной игре — требует описания стратегии, правила выбора ходов, обеспечивающего достижение цели. В задачах про игры (или в задачах «погони», «преследования») при этом требуется доказать, что стратегия обеспечивает выигрыш при любом поведении партнера.

Задача. Коля и Петя делят $2n+1$ орехов, $n \geq 2$, причем каждый хочет получить возможно больше. Предполагаются три способа дележа (каждый проходит в три этапа).

1-й этап: Петя делит все орехи на две части, в каждой не меньше двух орехов.

2-й этап: Коля делит каждую часть снова на две, в каждой не меньше одного ореха.

(1-й и 2-й этапы общие для всех трех способов.)

3-й этап: при первом способе Коля берет большую и меньшую части; при втором способе Коля берет обе средние части; при третьем способе Коля берет либо большую и меньшую части, либо обе средние части, но за право выбора отдает Пете один орех.

Определите, какой способ самый выгодный для Коли и какой наименее выгоден для него.

Задача. Имеется доска 3×3 клетки и 9 карточек размером в одну клетку, на которых написаны какие-то числа. Двое играющих по очереди кладут эти карточки на клетки доски. После того, как все карточки разложены, первый (начинающий) подсчитывает сумму шести чисел; стоящих в верхней и нижней строках, второй подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в левом и правом столбцах. Выигрывает тот, у кого сумма больше. Докажите, что при правильной игре первого второй не сможет выиграть независимо от того, какие числа написаны на карточках.

23. Интересные примеры и конструкции.

Во многих задачах наиболее трудная часть решения – не доказательство, а построение необычного примера. К этим задачам относятся и такие задачи, где построение и исследование примера — многошаговая конструкция.

Задача. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

Задача. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

Задания для заочного математического кружка

Одним из этапов подготовки к успешному написанию олимпиады является решение заданий с несколькими вариантами ответов. К тому же, такие задания могут служить для тестирования учащихся по различным темам олимпиадных заданий и отлично подходят для заочных математических кружков. Отличным подспорьем для этого является сайт http://intelmath.narod.ru/kangaroo-problems.html. Задачи собраны по темам. Сначала идут довольно легкие задачи, но постепенно их сложность возрастает. Часть задач уже требует довольно глубоких и основательных математических знаний.

Тема №1: комбинаторика, логика, взвешивания

Условия задач

Задача 1. Сколько существует наборов из двух или более последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 100?
А:1; Б:2; В:3; Г:4; Д:5.

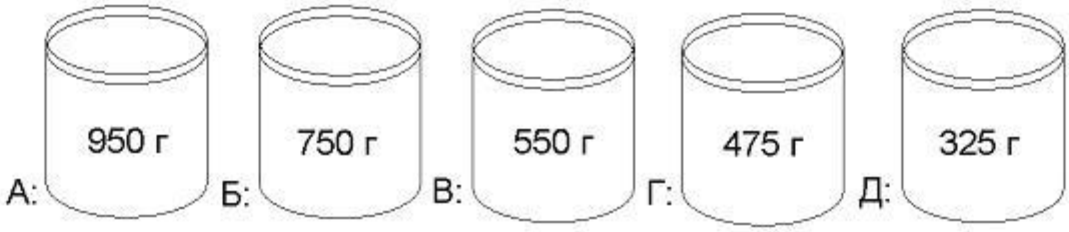
Задача 2. Мы выписали все натуральные числа от однозначных до семизначных, в записи которых используются только 0 и 1. Сколько единиц мы записали?

А:128; Б:288; В:448; Г:512; Д:896.

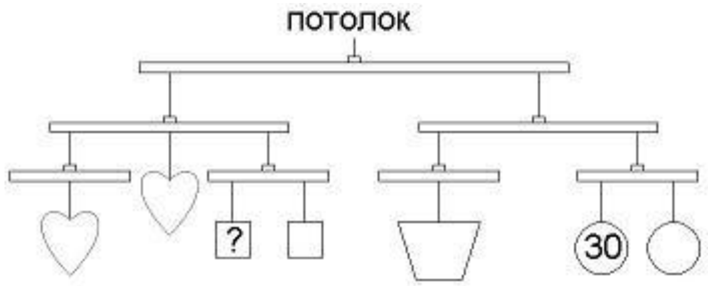
Задача 3. Чему равняется $303^2 + 404^2$?

А: 707^2; Б: 606^2; В: 505^2; Г: 808^2; Д: ; 909^2.

Задача 4. В каждом из пяти стаканов кофе, какао или молоко. Общий объём кофе вдвое больше объёма какао. Известно, что ни в каких трёх стаканах нет одинакового напитка. В каком стакане какао?



Задача 5. Детская игрушка подвешена к потолку и находится в равновесии. Одинаковые фигурки весят одинаково. Шарик весит 30 граммов. Сколько весит кубик, отмеченный знаком вопроса?



А:10г; Б:20г; В:30г; Г:40г; Д:50г.

Решения

Задача 1. Сначала заметим, что суммой двух последовательных чисел число 100 не получить, т.к. из двух последовательных, одно будет чётным, а другой нечётным, и их сумма обязательно будет нечётным числом. Если же сложить 3 последовательных натуральных числа: n+n+1+n+2, то их сумма 3n+3 будет обязательно делиться на 3, следовательно, и здесь мы число 100 не получим. Для четырёх слагаемых окажется, что их сумма n+n+1+n+2+n+3=4n+6 даёт остаток 2 при делении на 4, а 100 делится на 4 нацело, итак, и здесь неудача.

Рассмотрим в общем случае сумму k последовательных натуральных чисел.

n+n+1+n+2+...+n+k-1=kn+k(k-1)/2

Отсюда видно, что при нечётных k сумма будет делиться на k, а при чётных k сумма k последовательных натуральных чисел будет давать остаток k/2 при делении на k, и, следовательно, будет делиться на k/2.

Выясним теперь, какое наибольшее количество последовательных слагаемых может образовать сумму в 100. Поскольку наименьшая по величине сумма из 14-ти слагаемых 1+2+...+14=14*15/2=105>100, то достаточно перебрать все k, не большие 13-ти. Из нечётных подходит только 5, т.к. на 7, 9, 11 или 13 число 100 не делится. Из чётных подходит только 8 (100=12*8+4).

Можно привести и соответствующие разбиения:

100=18+19+20+21+22

100=9+10+11+12+13+14+15+16

Итак, получили 2 способа.

Ответ. Б:2 способа.

Кстати, интересно найти трёхзначное число, которое можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел наибольшим количеством способов.

Задача 2. Хмм… интересно. Цифры 0 и 1, а также варианты ответа А:128 и Г:512 наталкивают на мысль об использовании двоичной системы счисления. И вправду, задачу можно переформулировать так: сколько единиц используется в двоичной записи всех чисел от 1 (даже от 0, на ответ это не повлияет) до 127? (от 0000000 до 1111111?)

Но ведь из этих 128-ми чисел в каждом из семи двоичных разрядов ровно у половины стоит единица, у другой половины – 0. Имеем 7*64=448 единиц во всех числах.

Ответ. В: 448.

Задача 3. Первый вариант ответа $303^2+404^2=707^2$ заставляет вспомнить о правильно-неправильных сокращениях и выносах из корня, когда выполняя неверные с математической точки зрения действия мы получаем верный результат. Однако вряд ли здесь это. Вариант $303^2 + 404^2 = 505^2$ больше похож на правду, учитывая, что для близких к данным в условии числам 300, 400 и 500 равенство выполняется (увеличенный в 100 раз египетский треугольник).

Стоп! А если мы египетский треугольник увеличим не в 100, а в 101 раз, что получим? Как раз эту тройку: 303, 404, 505. Значит, окончательно, ответ В: 505^2

Задача 4. Вопрос звучит «В *каком стакане* какао?», значит, стакан с какао один. Тогда в двух из остальных четырёх стаканов кофе, и в двух – молоко.

В первом стакане какао быть не может, т.к. его объём максимальный и 2 других стакана не смогут занимать вдвое больший объём. А второй стакан (750г) подходит, тогда кофе будет в первом и третьем стаканах (950+550). Поскольку тест предполагает однозначный ответ, на этом можно и остановиться, сэкономив драгоценное время на решение других задач. Нам же с вами можно спокойно посидеть и убедиться, что действительно ни для какого из оставшихся стаканов нельзя найти двух других таких, чтобы они занимали вдвое больший объём.

Ответ. Б.

Задача 5. Обратим внимание, что в формулировке задачи не говорится стандартная фраза «весом самой конструкции можно пренебречь». А ведь она и действительно не нужна – все перекладины уравновешивают друг друга и на решение не влияют.

Из правой части заметим, что трапеция равна по весу двум шарикам. Из левой части одно сердечко равно по весу двум кубикам. Значит, 6 кубиков равны четырём шарикам. 6 кубиков весят 120г, значит 1 кубик весит 20г.

Ответ. Б.

Тема №2: комбинаторика, логика, выражения

Условия задач

Задача 6. На гранях куба написаны некоторые натуральные числа, и у каждой вершины написано число, равное произведению чисел на гранях, прилежащих к этой вершине. Сумма чисел на вершинах равна 100. Тогда наибольшая возможная сумма чисел на гранях равна:

А:14; Б:17; В:25; Г:29; Д:100.

Задача 7. Рассмотрим множество всех чисел, которые состоят из цифр 1, 2, 3, 4 без повторов. Чему равна сумма всех этих чисел?

А:5550; Б:99990; В:66660; Г:100000; Д:98760.

Задача 8. Чему равняется первая цифра наименьшего натурального числа, сумма цифр которого равна 2001?

А:1; Б: 2; В: 3; Г: 4; Д: 5.

Задача 9. M, D, S, E, K сидят на скамейке в парке. M не сидит справа на краю, а D не сидит слева на краю. S не сидит на краю. K не сидит рядом с S, а S не сидит рядом с D. E сидит справа от D, но не обязательно рядом. Кто сидит крайним справа?

А:Невозможно определить; Б: D; В: S; Г: E; Д: K.

Задача 10. Ира, Аня, Катя, Оля и Эля живут в одном доме: две девочки на первом этаже и три на втором.. Оля живёт не на том этаже, где Катя и Эля. Аня - не на том этаже, где Ира и Катя. Кто живёт на первом этаже? А:Катя и Эля; Б:Ира и Эля; В:Ира и Оля; Г:Ира и Катя; Д:Аня и Оля.

Решения

Задача 6. Пусть числа на верхней и нижней гранях куба равны a и b, а на его боковых гранях: c, d, e и f. Тогда сумма чисел у вершин куба будет равна:

$acd+ade+aef+acf+bcd+bde+bef+bcf=$

$=a(cd+de+ef+cf)+b(cd+de+ef+cf)=$

$=(a+b)(cd+de+ef+cf)=(a+b)(c(d+f)+e(d+f))=(a+b)(c+e)(d+f)=100.$

Получаем произведение трёх натуральных чисел, каждое из которых не менее двух, равно 100. Число 100 в виде такого произведения можно представить тремя способами. 100=2*2*25=2*5*10=4*5*5. Из них сумма множителей, а, соответственно, и сумма a+b+c+d+e+f наибольшее значение принимает в первом случае.

Ответ. Г: 29.

Задача 7. Всего таких чисел будет 4!=24. При этом в любом из четырёх разрядов ровно у шести из них будет стоять 1, у шести - 2, у шести - 3 и у шести чисел - 4. Искомую сумму можно представить как:

6(1000*(1+2+3+4)+100*(1+2+3+4)+10*(1+2+3+4)+(1+2+3+4))=66660.

Ответ. В: 66660.

Задача 8. Из всех числе с такой суммой цифр наименьшим будет во-первых число, состоящее из наименьшего количества цифр, а во-вторых, с наименьшей возможной первой цифрой. Сколько знаков должно быть у числа, чтобы сумма его цифр могла составлять 2001? 2001/9=222 (остаток 3). Значит наименьшим числом с суммой цифр 2001 будет число 399...9, где за тройкой идёт 222 девятки.

Ответ. В: 3.

Задача 9. Для удобства занумеруем места слева направо: 1, 2, 3, 4, 5 и занумеруем утверждения задачи: M не сидит справа на краю(I), а D не сидит слева на краю(II). S не сидит на краю(III). K не сидит рядом с S(IV), а S не сидит рядом с D(V). E сидит справа от D, но не обязательно рядом(VI). Теперь из I, III VI определяем, что на 5 месте не могут сидеть M, S или D. Из II, III, VI определяем, что на 1м месте не могут сидеть D, S или E. Таким образом, из V, для расположения S и D есть только два варианта: S2, D4 или D2, S4. Но в первом случае 5е место должно быть занято E, и тогда K не удаётся усадить не рядом с S, согласно IV. Для второго варианта однозначно K1, M3, E5. Итак, справа сидит E.

Ответ. Г: E.

Задача 10. Получается, что Ира и Катя, а также Катя и Эля живут на одном этаже. Значит, они живут на втором. На первом этаже тогда живут Аня и Оля.
Ответ. Д: Аня и Оля.

Тема №3: взвешивания, логика, делимость

Условия задач

Задача 11. Какое наименьшее количество гирь необходимо, чтобы иметь возможность взвесить на чашечных весах любой груз массой от 1 до 10г? (Масса выражается только целым числом граммов и гири можно класть на обе чаши весов).
А:2; Б:3; В:4; Г:5; Д:10.

Задача 12. Сумма цифр натурального числа m равна 30. Чему не может равняться сумма цифр числа (m+3)?
А:6; Б:15; В:21; Г:24; Д:33.

Задача 13. В сумке более одного кенгуру. Первый кенгуру сказал "Нас здесь шестеро", – и выпрыгнул из сумки. Затем через каждую минуту один из оставшихся кенгуру говорил "Все, кто выпрыгнул передо мной, говорили неправду",- и также выпрыгивал. Сколько кенгуру сказали правду?
А:0; Б: 1; В: 2; Г: 6; Д: все.

Задача 14. Если кенгуру при прыжке оттолкнётся левой ногой, то прыгнет на 2 метра. Если оттолкнётся правой ногой, то длина прыжка составит 4м. Если же обеими ногами, то прыгнет на 7 метром. Какое наименьшее количество прыжков должен сделать кенгуру, чтобы проскакать ровно 1000м?
А:142; Б: 144; В: 250; Г: 500; Д: другой ответ.

Задача 15. В компании из пяти человек есть вруны, которые всегда говорят неправду, и честные, которые всегда говорят правду. Каждого из них спросили: "Сколько врунов в вашей компании?", на что были получены ответы: "один", "два", "три", "четыре" и "пять". Сколько на самом деле врунов в этой компании?

А:1; Б:2; В:3; Г:4; Д:5.

Решения

Задача 11. Запишем числа от 1 до 10 в двоичной системе: 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1001, 1010. Поскольку в них не более четырёх двоичных разрядов, для взвешивания этих грузов можно обойтись четырьмя гирьками, массой 1г, 2г, 4г и 8 г. Но здесь мы не используем возможность класть гирьки на обе чаши весов. А в таком случае более экономной будет троичная форма записи, но с цифрами не 0, 1, 2, а с (-1), 0, 1:

1=1=001

2=3-1=01(-1)

3=3=010

4=3+1=011

5=9-3-1=1(-1)(-1)

6=9-3=1(-1)0

7=9-3+1=1(-1)1

8=9-1=10(-1)

9=9=100

10=9+1=101

Всего же с помощью гирек массой 1г, 3г и 9г можно взвесить грузы до 9+3+1=13г.

Ответ. Б: 3.

Задача 12. Первая идея: поскольку сумма цифр числа m равна 30, оно делится на 3, значит и (m+3) делится на 3, делиться должна и сумма его цифр. Однако этим свойством обладают все предложенные варианты. Копнём глубже: т.к. сумма цифр числа m равна 30, его остаток от деления на 9 равен остатку от деления на 9 числа 30, т.е. трём. Значит число (m+3), как и его сумма цифр, должно давать остаток 6 при делении на 9. Такой остаток дают все предложенные варианты, кроме В:21. Он-то и будет невозможным. Ответ. В: 21.

Задача 13. Если в сумке шестеро кенгуру, то первый сказал правду, а все остальные своим утверждением: "Все, кто выпрыгнул передо мной, говорили неправду",– соврали. Если же в сумке сидело не 6 кенгуру, то соврал первый, второй сказал правду, а остальные (если они были), снова соврали. В любом случае, правду сказал только один.

Ответ. Б: 1.

Задача 14. Определим, за сколько прыжков можно максимально приблизиться к отметке 1000. За 142 прыжка можно продвинуться на 994 метра. Оставшиеся 6 метров можно преодолеть за 2 прыжка: оттолкнувшись последовательно левой и правой ногой. Кстати, если бы кенгуру умел прыгать и на 1 метр, то в 144 прыжка можно было уложиться и другим способом: 143 прыжка по 7 метром и затем на 1 метр назад.

Ответ. Б: 144.

Задача 15. Если бы честных в компании было несколько, то мы бы получили как минимум 2 одинаковых ответа (однако наличие одинаковых ответов не гарантирует того, что они принадлежат честным, ведь и вруны могли одинаково соврать). В нашем случае 5 врунов быть не может, поскольку тот, кто сказал “пять”, сказал бы правду. А вот 4 вруна – вполне возможно.

Ответ. Г: 4.

Тема №4: делимость, последовательности, рассуждения

Условия задач

Задача 16. В озере плавает яблоко: 2/3 его под водой и 1/3 – над водой. К нему подплывает рыба и подлетает птица, и одновременно начинают его есть. Птица есть вдвое быстрее, чем рыба. Какую часть яблока съест птица? А:1/3; Б:1/2; В:2/3; Г:3/5; Д:4/5.

Задача 17. Если зачеркнуть последнюю цифру натурального числа, оно уменьшится в 14 раз. Сколько существует натуральных чисел с таким свойством?

А:0; Б:1; В:2; Г:3; Д:4.

Задача 18. Первый элемент последовательности равен 2, второй равен 3. каждый элемент, начиная со второго, на 1 меньше произведения предыдущего и следующего элементов. Чему равна сумма первых 2003 элементов этой последовательности?

А:2358; Б:2989; В:3241; Г:3607; Д:3745.

Задача 19. Известно, что “микс” 36 равен 18, “микс” 325 – 30, “микс” 45 – 20, “микс” 30 равен 0. Найдите “микс” 531.

А:10; Б:15; В:16; Г:21; Д:22.

Задача 20. Красная Шапочка несла бабушке 14 пирожков: с мясом, грибами и капустой. Пирожков с капустой было больше всего, их было вдвое больше, чем пирожков с мясом, а пирожков с мясом было больше, чем пирожков с грибами. Сколько пирожков с грибами несла Красная Шапочка?

А:2; Б:4; В:5; Г:1; Д:3.

Решения

Задача 16. Вспоминается физический опыт “водяной подсвечник”. Если в нижнюю часть парафиновой свечи воткнуть гвоздь так, чтобы та плавала в стакане вертикально, то по мере сгорания свеча будет подниматься, но вес воды, вытесненной погружённой частью всегда будет равен общему весу свечи. Здесь так же: по мере исчезновения в желудках существ, всё равно 1/3 яблока будет над водой, а 2/3 – под водой. И, поскольку птица есть вдвое быстрее, она в конечном итоге съест 2/3 яблока, а рыба – 1/3.

Ответ. В: 2/3.

Задача 17. Пусть последняя цифра числа равна x, а число с зачёркнутой последней цифрой равно y. Тогда $14y=10y+x$, откуда $x=4y$. Поскольку x – цифра, то может быть 3 варианта:

x=0, y=0, но если в числе 0 зачеркнуть 0 не останется вообще ничего.

x=4, y=1. Получаем 14=1*14.

x=8, y=2. Получаем 28=2*14.

Ответ. В: 2.

Задача 18. Построим несколько элементов данной последовательности в соответствии с правилом. 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1 ... Можно заметить, что в последовательности повторяется группа из пяти элементов: 2, 3, 2, 1, 1, их сумма равна 9. А среди 2003 последовательных элементов такая группа встретится 400 раз, затем пойдёт числа 2, 3, 2. Искомая сумма будет равна 400*9+2+3+2=3607.

Ответ. Г: 3607.

Задача 19. На основе данных примеров можно догадаться, что “микс” числа – это произведение всех его цифр. Поэтому “микс” 531=5*3*1=15. Ответ. Б: 15.

Задача 20. Так как пирожков с капустой вдвое больше, чем с мясом, то их общее количество должно делиться на 3. Такое будет возможно только когда пирожков с грибами 2 или 5. Но если тех будет 5, то пирожков с мясом должно быть 4, что не соответствует второму условию. Значит. С грибами было всего 2 пирожка.

Ответ. А: 2.

Тема №5: вероятность, геометрия, логика

Условия задач

Задача 21. Случайным образом в решётке 3x4 точек выбрали три из них.

*   *   *   *

*   *   *   *

*   *   *   *

Какова вероятность того, что эти точки будут лежать на одной прямой?
А:1/12; Б:1/11; В:1/16; Г:1/8; Д:1/4.

Задача 22. Квадрат 4х4 разделили на 16 единичных квадратов. Найти максимально возможное количество диагоналей, которые можно провести в этих единичных квадратах так, чтобы они не имели общих точек (включая концы).
А:8; Б:9; В:10; Г:11; Д:12.

Задача 23. Пусть m – произведение периметра треугольника на сумму трёх высот этого треугольника. Какое из высказываний ложно, если площадь этого треугольника равна 1?
А:m может быть больше 1000; Б:всегда $m>6$; В:m может равняться 18; Г:если треугольник правильный, то $m>16$; Д:m может быть меньше 12.

Задача 24. Какое наибольшее количество цифр можно стереть в 1000-значном числе 20082008…2008, так, чтобы сумма оставшихся цифр равнялась 2008?
А:260; Б:510; В:746; Г:254; Д:130.

Задача 25. В коробке лежат 7 карточек с написанными на них числами от 1 до 7 (по одному числу на карточке). Первый мудрец наугад берёт три карточки из коробки, а второй – две (ещё две карточки остаются в коробке). Первый мудрец, глядя на свои карточки, говорит второму: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётная». Сумма чисел, записанных на карточках первого мудреца, равняется:
А:6; Б:9; В:10; Г:12; Д:15.

Задача 26. Котик-Муркотик и Лисичка-Сестричка ловили рыбу. К ним подбежал голодный Волчик-Братик и спросил, много ли рыбы они поймали? Лисичка хитро ответила: у нас двоих рыб на 7 больше, чем у меня одной, а у одного из нас на 17 рыб меньше, чем у другого. Сколько рыбы словили вместе Котик-Муркотик и Лисичка-Сестричка?

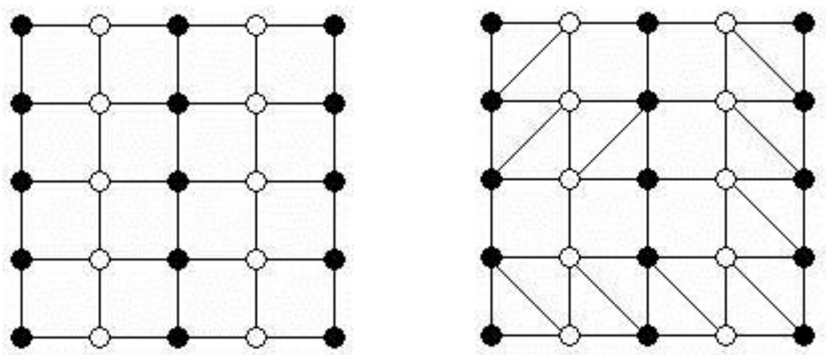
А:10; Б:17; В:22; Г:27; Д:31.

Решения

Задача 21. Подсчитаем, сколько троек точек могут образовать прямую линию. В каждом из трёх горизонтальных рядов таких троек будет по 4, также такими тройками будут 4 вертикальных и 4 диагональных ряда точек. Таким образом, всего троек точек, удовлетворяющих условию будет 20. Всего способов выбрать 3 точки из 12 будет 220. Таким образом, искомая вероятность равна 20/220=1/11.

Ответ. Б: 1/11.

Задача 22. Раскрасим столбцы вершин единичных квадратов чёрным и белым цветами. Каждая диагональ единичного квадрата будет иметь концами точки разного цвета. Поэтому непересекающихся диагоналей может быть не более десяти. Один из вариантов представлен ниже.



Ответ. В: 10.

Задача 23. Поскольку $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, то $h_a = \frac{2}{a}$, $h_b = \frac{2}{b}$ и $h_b = \frac{2}{b}$. Тогда $m = (a+b+c)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right)$. Отсюда сразу видно, что если взять треугольник с площадью 1 и достаточно большим периметром, величина m может превысить 1000. Если раскрыть скобки, то получиться выражение вида m=6+*f*(a,b,c), принимающее значения, большие шести. Для правильного треугольника m=3*2*3=18>16. Следовательно, методом исключения, неверно пятое утверждение.

Ответ: Д:*m* может быть меньше 12.

Задача 24. В данном числе последовательность 2008 повторяется 1000/4=250 раз. Сумма цифр этого числа равна 2500. Если вытереть 500 нулей, она не изменится. Таким образом, варианты А, Г и Д отметаем сразу, а вариант Б отметается после следующего размышления: даже если дополнительно вычеркнуть 10 восьмёрок, сумма оставшихся цифр уменьшится лишь на 80. Поэтому остаётся только вариант В, в целях экономии времени на олимпиаде его можно не проверять. А вообще, действительно: зачёркиваем 500 нулей и 246 двоек и сумма оставшихся цифр будет равна 2008.

Ответ. В: 746.

Задача 25. Первый мудрец будет точно знать, что сумма цифр на карточках старого мудреца чётна лишь в том случае, если ему будет известно, что все оставшиеся числа – одной чётности. Следовательно, ему могли выпасть только карточки с числами 2, 4 и 6, их сумма равна 12. Данная задача проходила в 2008 году сквозь все классы и была использована для мониторинга умения совершать логические умозаключения. Наряду со стабильным ростом из класса в класс, тем не менее был отмечен общий низкий уровень данного умения.

Ответ. Г: 12.

Задача 26. Если у них двоих рыб на 7 больше, чем у Лисички, то эти 7 рыб принадлежат Коту. И выходит, что у Лисички рыб на 17 больше, т.е. 24. Итого 31 рыба.

Ответ. Д: 31.

Тема №6: целая и дробная часть, делимость, цифры

Условия задач

Задача 27. При каком наибольшем значении параметра а выполняется неравенство $x^2 \geq a[x]\{x\}$?

А:1; Б:2; В:3; Г:4; Д:5.

Задача 28. Из какого набора цифр, приведённых далее, состоит семизначное число, если оно делится на каждую из своих цифр и все его цифры различны?

А:0123467; Б:1246789; В:1235679; Г:2356789; Д:1236789.

Задача 29. Сколько номеров лет XX века можно представить в виде разности двух степеней двойки?

А:0; Б:1; В:2; Г:3; Д:4.

Задача 30. У Тани в коробке 9 карандашей. Как минимум один из них синего цвета. Среди каждых 4 карандашей как минимум два – одинакового цвета, а среди каждых пяти не более трёх одинакового цвета. Сколько синих карандашей у Тани в коробке?

А:1; Б:2; В:3; Г:4; Д: Невозможно определить.

Задача 31. На счётчике пробега моей машины сейчас показано число 187369 (км). В этом числе все цифры различны. Какое наименьшее количество километров нужно проехать, чтобы на счётчике опять появилось число, у которого все цифры различны?

А:1; Б:21; В:431; Г:12431; Д:13776.

Решения

Задача 27. Понятно, что при x<0 неравенство выполняется при любых значениях параметра a. Для нуля равенство также будет иметь место всегда. А для положительных значений x используем тот факт, что $x=[x]+\{x\}$. Тогда неравенство можно представить в виде $([x]+\{x\})^2 \ge a[x]\{x\}$, откуда $[x]^2+\{x\}^2 \ge (a-2)[x]\{x\}$. А т.к. сумма квадратов двух чисел не менее удвоенного их произведения, то a-2 не превосходит двух, отсюда наибольшее значение параметра a – 4.

Ответ. Г: 4.

Задача 28. Первым делом отпадает вариант А, как содержащий цифру 0. Затем отбрасываем варианты В (1235679) и Г (2356789), содержащие одновременно двойку и пятёрку. Основание следующее: число должно одновременно делиться на 2 и на 5, следовательно, на 10, и заканчиваться нулём. А нуля среди этих наборов цифр нет, да и быть не может в наборе, удовлетворяющем условиям задачи.

Из оставшихся двух наборов сделать выбор поможет признак делимости на 9, который инвариантен расположению цифр. Сумма цифр в наборе Б на 9 не делится, хотя девятка в нём присутствует. Следовательно, искомый набор – Е (1236789). Поскольку задачи найти конкретно число, обладающее данным свойством, не ставилось, на этом можно было и успокоиться. Однако мне стало интересно и с помощью переборной программы я обнаружил, что таких чисел целых 105, начиная с 1289736 и заканчивая 9867312. А несколько подумав, можно и без перебора убедиться, что для восьмизначных чисел не существует аналогичных наборов цифр. Вообще, интересно было бы рассмотреть такую задачу в других системах счисления, вполне возможно, что это будет темой одной из статей.

Ответ. Е: 1236789.

Задача 29. Пусть для некоторого числа x выполняется равенство $x = 2^k - 2^n$, тогда $x = 2^n\left(2^{k-n} - 1\right)$. Следовательно, $x \in \left[2^k - 1; 2^{k-1}\right]$ и может принимать лишь k различных значений. Поскольку промежуток [1901; 2000] принадлежит промежутку [2048; 1024], то значение k=11. А промежутку [1901; 2000] будут принадлежать только две из одиннадцати разностей: 1984=2048-64 и 1920=2048-128.

Ответ. В: 2.

Задача 30. Поскольку среди каждых пяти карандашей не более трёх одноцветных, то и во всём наборе количество карандашей одинакового цвета не превышает трёх. Следовательно, т.к. карандашей 9, то и количество цветов не менее трёх. Однако, если бы карандаши у Тани были, к примеру, четырёх цветов, то взяв по одному карандашу каждого цвета мы получили бы противоречие с первым условием. Следовательно, у Тани карандаши ровно по 3 карандаша трёх различных цветов, в том числе и синих.

Ответ. В: 3.

Задача 31. Эта задача – хороший пример приёма перебора в тесте. Вместо того, чтобы непосредственно вычислять, какое расстояние нужно проехать, прежде чем вновь появится число из разных цифр, будет последовательно пытаться прибавлять к 187369 числа из вариантов ответа и смотреть, что получится.

187369+1=187370 – не подходит

187369+21=187390 – подошло!

Ответ. Б: 21.

Тема №7: комбинаторика, среднее арифметическое, дроби

Условия задач

Задача 32. Сколькими способами можно прочесть слово KANGAROO, двигаясь только вниз и вправо?

K	A	N	G	A	R	O	O
A	N	G	A	R	O	O	
N	G	A	R	O	O		
G	A	R	O	O			
A	R	O	O				
R	O	O					
O	O						
O							

А:168; Б:224; В:128; Г:256; Д:328.

Задача 33. Сколько существует таких четырёхзначных чисел, у которых сумма двух последних цифр и числа, образованного двумя первыми цифрами, равняется числу, образованному двумя последними цифрами? (Пример числа, удовлетворяющего данному условию: 6370, т.к. 7+0+63=70).

А:10; Б:45; В:50; Г:80; Д:90.

Задача 34. Среднее арифметическое десяти различных положительных целых чисел равняется 10. Чему может равняться наибольшее среди этих чисел?

А:10; Б:45; В:50; Г:55; Д:91.

Задача 35. В селе Кенгуровка есть две улицы: Яблочная и Грушёвая. Половина всех домов села расположены на Яблочной улице, а четверть – на Грушёвой. У каждого дома четыре окна: да белых, синее и красное. Каких окон больше: красных на Яблочной или белых на Грушёвой?

А: одинаково; Б: красных вдвое больше, чем белых; В: белых вдвое больше, чем красных; Г: невозможно определить; Д: ответ зависит от количества синих окон.

Задача 36. Если мы умножим число 12345679 на 9, то получим число 111111111. Если мы умножим его на 18, то получим результат, который содержит только цифры 2. Если мы умножим это число на 27, то получим число, которое записывается только при помощи цифры 3. На какое число нужно умножить число 12345679, чтобы получить число из одних семёрок?

А:43; Б:53; В:63; Г:73; Д:83.

Решения

Задача 32. Прочитав очередную букву, имеем 2 варианта: повернуть или вправо, или вниз. Т.к. всего возможных повторов будет 7, то слово KANGAROO можно прочесть 128-ю способами. Параллельно можно заметить, что если подписать на каждой букве количество способов, которыми до неё можно дойти, то получим повёрнутый на бок треугольник Паскаля.

Ответ. В: 128.

Задача 33. Пусть четырёхзначное число имеет вид 1000a+100b+10c+d, где a, b, c, d – натуральные числа и a>0. Тогда условие, выполнение которого требуется, можно записать как: c+d+10a+b=10c+d. Отсюда получаем: 10a+b=9c. Следовательно, последняя цифра может быть любой, а число, образованное первыми двумя цифрами, должно быть в 9 раз больше третьей цифры. Значит третья цифра может быть равной 2, 3, … 9 (т.к. a>0), а четвёртая – 0, 1, … 9. Всего 8*10=80 вариантов.

Ответ. Г: 80.

Задача 34. Если среднее арифметическое десяти чисел равно 10, то их сумма равна 100. Десятое число будет наибольшим из возможных, когда остальные девять чисел будут наименьшими из возможных. Поскольку они все различны, то это должны быть 1, 2, … 9, с суммой равной 45. Следовательно максимальное значение десятого числа равно 55.

Ответ. Г: 55.

Задача 35. На Яблочной улице домов вдвое больше, чем на Грушёвой. А в каждом доме белых окно вдвое больше, чем красных. Значит красных окон на Яблочной улице ровно столько же, сколько и белых на Грушёвой.

Ответ. А: одинаково.

Задача 36. Чтобы получить число из одних семёрок, нужно умножить 111111111 на 7, а это то же самое, если умножить 12345679 на 9*7=63. Кстати, на свойствах 12345679, “числа без восьмёрки”, основано ещё несколько интересных математических трюков и фокусов. А чтобы понять, что в нём такого особенного, разделите 1 на 81.

Ответ. В: 63.

Тема №8: числовые процессы, выбор, множества

Условия задач

Задача 37. Сколько существует непустых подмножеств множества {1, 2, 3, ..., 12}, в которых сумма наибольшего и наименьшего элементов равна 13?

А: 1024; Б: 1175; В: 1365; Г: 1785; Д:4095.

Задача 38. Числа 1, 2, 3 записаны по кругу. Затем между ними поместили суммы пар соседних чисел. Получили 6 чисел: 1, 3, 2, 5, 3, 4. Эту операцию повторили ещё 4 раза и в результате получили 96 чисел. Чему равна сумма этих 96-ти чисел?

А: 486;Б:998; В: 1458; Г: 2187; Д: 4374.

Задача 39. Мама попросила маленького Ваню рассортировать парами его носки после стирки. Но он бросил носки в комод, не сортируя. Там было 5 пар чёрных, 10 пар коричневых и 15 пар серых носков. Ваня собирается пойти в поход на 7 дней. Какое минимальное количество носок ему нужно вытащить из комода, чтобы среди них наверняка оказались 7 пар одного цвета?

А: 21;Б:31; В: 37; Г: 40; Д: 41.

Задача 40. С полудня до полуночи Ученый Кот спит под дубом, а с полуночи до полудня он рассказывает сказки. Табличка на дубе говорит: «Два часа назад Учёный Кот делал то же, что он будет делать через час». Сколько часов в сутки табличка говорит правду?

А: 3;Б:6; В: 12; Г: 18; Д: 21.

Задача 41. Марк загадал трёхзначное и двузначное числа, разность которых равна 989. Тогда сумма этих чисел равна:

А: 1000;Б: 1001; В: 1009; Г: 1010; Д: 2005.

Решения

Задача 37. Из множества в n элементов можно выбрать подмножество 2^n способами. Таким образом, множеств с наибольшим элементом 12 и наименьшим элементом 1 будет столько, сколько подмножеств множества {2, 3, ..., 10, 11}, а именно 1024. Далее, множеств с наибольшим элементом 11 и наименьшим элементом 2 будет столько, сколько подмножеств множества {3, 4, ..., 9, 10}, а именно 256. Далее будет ещё 64 множества с наибольшим элементом 10 и наименьшим элементом 3, 16 – с наибольшим 9 и наименьшим 4, 4 с наибольшим 8 и наименьшим 5 и одно с наибольшим элементом 7 и наименьшим 6. Всего 1024+256+64+16+4+1=1365.

Ответ. В: 1365.

Задача 38. Поскольку каждое из дописываемых чисел равно сумме двух соседних чисел из предыдущей итерации, то сумма всех новых чисел будет равна удвоенной сумме всех чисел, бывших на окружности до дописывания. Таким образом, после каждой операции дописывания сумма всех чисел на окружности утраивается, а их количество удваивается. Значит, после 5-ти дописываний изначальная сумма чисел, равная 6, увеличится в 243 раза и станет равной 1458.

Ответ. В: 1458.

Задача 39. При решении таких задач нужно рассматривать самый неблагоприятный вариант. А именно: какое максимальное количество носок можно вытащить так, чтобы среди них не оказалось 7 пар одного цвета? Ясно, что это будет возможным, если мы вытащим 10 чёрных, 13 коричневых и 13 серых носок: всего 36. Значит, если вытащить 37 носок, то среди них гарантированно будет 7 пар одного цвета.

Ответ. В: 37.

Задача 40. Поскольку табличка охватывает временной диапазон в 3 часа, то надпись на ней станет правдивой в 2 часа дня и перестанет – в 11 часов вечера. Затем снова станет правдивой в 2 часа ночи и перестанет – в 11 утра. Всего 18 часов.

Ответ. Г: 18.

Задача 41. Число 989 может получиться только если от наибольшего трёхзначного отнять наименьшее двузначное число: 989=999-10. Значит, сумма этих чисел равна 999+10=1009.

Ответ В:1009.

Тема №9: комбинаторика, проценты, ребус

Условия задач

Задача 42. Сколько существует 10-значных чисел, состоящих только из цифр 1, 2 и 3 таких, в которых соседние цифры отличаются на 1?

А: 16; Б: 32; В: 64; Г: 80; Д:100.

Задача 43. На выборах мера города Кенгуруполя было зарегистрировано 2 кандидата. После обработки n% бюллетеней для голосования избирательная комиссия сообщила жителям, что кандидат А набрал 62% голосов, а кандидат В – 38% голосов. При каком минимальном целом n эти предварительные результаты выборов гарантируют победу кандидату А, если недействительных бюллетеней не будет? Мер избирается простым большинством.

А: 55;Б:62; В: 81; Г: 87; Д: 93.

Задача 44. В уравнении K+A+N+G+A+R+O+O=56 разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы – одинаковые цифры. Тогда значение суммы A+O равняется:

А: 18;Б:17; В: 16; Г: 15; Д: однозначно определить невозможно.

Задача 45. Дано 4 утверждения о натуральном числе А:

А делится на 5, А делится на 11, А делится на 55, А меньше 10. Известно, что два из них правильные, а другие два – неправильные. Тогда А равняется:

А: 0;Б:5; В: 10; Г: 11; Д: 55.

Задача 46. Маша коллекционирует фотографии известных спортсменов. Количество фотографий, которые она собирает за каждый год равно количеству фото, собранных за два предыдущих года. В 2008 году она собрала 60 фотографий, а в этом – 69. Сколько фотографий собрала Маша в 2006 году?

А: 20;Б: 24; В: 36; Г: 40; Д: 48.

Задача 47. Серёжа подбрасывал игральный кубик четыре раза и каждый раз записывал полученное число очков. Сложив эти числа, он получил 21 очко. Какое наибольшее количество раз могла выпадать тройка?

А: 0;Б: 1; В: 2; Г: 3; Д: 4.

Решения

Задача 42. В записи таких чисел после единиц и троек обязательно должна идти двойка. После двоек может идти как единица, так и тройка. Таким образом, если первая цифра числа - 1, то вторая определяется однозначно, третья может быть одной из двух, четвертая – вновь однозначно, пятая – одна из двух вариантов и т.д. Получается 2^4 чисел, начинающихся на единицу. Столько же чисел будет начинаться на 3. Если же первой цифрой будет двойка, то вторая цифра – одна из двух, третья – однозначно и т.д., всего 2^5 вариантов. Итого 16+16+32=64 числа.

Ответ. В: 64.

Задача 43. Следует рассмотреть самый неблагоприятный для А случай – все оставшиеся неподсчитанными бюллетени были поданы за кандидата В. Тогда за А подано 0,62n% голосов, а за В – 0,38n+100-n = 100-0,62n процентов. Решая неравенство 0,62n>50 получаем, n>80,65. Минимальное целое n, удовлетворяющее этому неравенству равно 81.

Ответ. В: 81.

Задача 44. Сразу видно, что ответ 18 в этом числовом ребусе невозможен, т.к. цифры А и О различны. Проверим 17=9+8. Запишем уравнение ребуса так:

$$2(A+O)=56-(K+N+G+R)$$

Наименьшее значение правой части будет, если за согласными буквами будут спрятаны числа 7, 6, 5, 4. Тогда 2(8+9)=34=56-(7+6+5+4). Сходится. Однозначный ли это ответ? Если А+О=16=9+7, то значение 56-(K+N+G+R) не может быть меньше, чем 56-(8+6+5+4)=33. А нужно получить 32. И далее, снижая на 1 сумму А+О, значение выражения 2(А+О) снижается на 2, а правая часть уравнения нельзя будет уменьшить менее, чем на 1, и она будет отставать. Значит А+О=17 – однозначное решение данного числового ребуса.

Ответ. Б: 17.

Задача 45. Если правильны первые 2 утверждения, автоматически становится верным и третье. И обратно: если верно третье (про делимость на

55), то отсюда следует, что А делится и на 5, и на 11. Значит из первых трёх утверждений верно лишь одно. Значит, верно и четвёртое утверждение: А<10. А т.к. нет натуральных чисел, меньших 10 и делящихся на 11, то верным будет первое: А делится на 5. Следовательно, А=5.

Ответ. Б: 5.

Задача 46. В 2007 Маша должна была собрать 36 фотографий, чтобы в сумме с 60 фото, собранными в 2008 году получилось 96 [фотографий 2009 года](). А в 2006 было собрано 60-36=24 фотографии. Обратите внимание, как тонко здесь для задачи 3-4 классов вводятся свойства последовательности Фибоначчи.

Ответ. Б: 24.

Задача 47. Какую наибольшую сумму очков мог получить Серёжа? 6*4=24. Полученная им сумма в 21 всего на 3 очка меньше максимальной. А замена шестёрки тройкой также уменьшает максимальную сумму на 3. Поэтому тройка могла выпасть всего раз.

Ответ. Б: 1.

Тема №10: целые числа, уравнения, логика

Условия задач

Задача 48. Сколько целых решений имеет уравнение

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+\ldots+(x+9)(x+10)=1000x+1997?$$

А:0; Б:1; В:2; Г:6; Д: бесконечно много.

Задача 49. Число X состоит из цифр 1, 2, 3, а число Y – из цифр 4, 5, 6. Мы знаем, что число X+Y чётное и что вторая цифра числа X равна двум. Какова последняя цифра числа X*Y?

А: нельзя однозначно установить; Б:2; В:6; Г:5; Д:4.

Задача 50. В тесте было 30 вопросов. Каждый правильный ответ увеличивает количество набранных баллов на 7, а каждая ошибка или отсутствие ответа уменьшает количество баллов на 12. Саша, выполнив тест, набрал 77 баллов. Сколько ошибок он сделал?

А: от 0 до 4; Б: от 5 до 8; В: от 9 до 12; Г: о 13 до 16; Д: невозможно определить.

Задача 51. Имеются 3 коробки и 3 предмета: монета, игрушечная черепаха и горошина. У каждой коробке есть только один предмет, причём:

- Зелёная коробка находится левее голубой;
- Монета находится левее горошины;
- Красная коробка стоит правее черепахи;
- Горошина правее красной коробки;

В какой коробке монета?

А: в красной; Б: в зелёной; В: в голубой; Г: невозможно определить однозначно; Д: условия задачи противоречивы.

Задача 52. В обувном магазине для животных на 10 полках было по 12 пар обуви. Первыми покупателями были пять многоножек. Первые три из них купили по 30 пар, а две следующие – по 5 пар каждая. Сколько пар обуви осталось в магазине после визита этих покупателей?

А:10; Б:15; В:20; Г:25; Д:30.

Решения

Задача 48. Слева имеем сумму девяти произведений соседних целых чисел. Из двух ярдом стоящих чисел одно всегда будет чётным, значит, каждое из слагаемых в левой части – чётное число. И вся левая часть уравнения будет чётной. Справа же стоит сумма чётного числа 1000x и нечётного числа 1997. Значит, если бы некоторое целое x было бы решением уравнения, то чётное число равнялось бы, нечётному, что невозможно. Выходит, целых корней у уравнения нет.

Ответ. А: 0.

Задача 49. Поскольку двойка стоит внутри числа X, то число X оканчивается на 1 или на 3, т.е. оно нечётное. Если сумма X и Y – чётное число, то число Y также нечётное. Значит, Y оканчивается на цифру 5. Следовательно, произведение чисел X и Y будет нечётным делящимся на 5 числом, и также будет оканчиваться на 5.

Ответ. Г: 5.

Задача 50. Пусть он решил x задач. Тогда 30-x задач остались без правильного ответа. Общая сумма баллов составит 7x-12(30-x), что по условию равняется 77. Решаем уравнение:

$$7x-12(30-x)=77$$

$$19x=437$$

$$x=23$$

Значит 7 вопросов остались без правильного ответа. Однако мы не можем установить, были ли на них даны неверные ответы, или вообще никаких ответов не давалось. Некоторая некорректность условия, которое позволяло толковать отсутствие ответа на вопрос или как неправильный ответ, или как отдельное действие, была исправлена тем, что при проверке засчитывались два ответа:

Ответы. Б: от 5 до 8 или Д: невозможно определить.

Задача 51. Первое, на что обращаем внимание – это тройка «черепаха – красная коробка – горошина». Её можно расположить лишь одним способом:

	Красная	
Черепаха		Горошина

Единственное место для монеты – в красной коробке. Если бы среди вариантов ответ не было намёка на возможность противоречивости условия, на этом можно было бы остановиться. Однако нужно проверить, возможна ли вообще ситуация, описанная в условии.

То, что зелёная коробка находится левее голубой, указывает нам цвета коробок с черепахой и горошиной. А то, что монета находится левее горошины, совпадает с уже найденным нами расположением.

Зелёная	Красная	Голубая

Черепаха	Монета	Горошина

Ответ. А: монета в красной коробке.

Задача 52. Решим задачу по вопросам

Вопрос 1. Сколько пар обуви было в магазине сначала?

10х12=120 (пар)

Вопрос 2. Сколько пар обуви купили первые три многоножки?

3х30=90 (пар)

Вопрос 3. Сколько пар обуви купили первые три многоножки?

2х5=10 (пар)

Вопрос 4. Сколько пар обуви было куплено всего?

10+90=100 (пар)

Вопрос 5. Сколько пар обуви осталось в магазине?

120-100=20 (пар)

Ответ. В: 20.

Тема №11: целые числа, делимость, палиндромы

Условия задач

Задача 53. Числами палиндромами называются такие числа, которые читаются одинаково слева направо и справа налево. Сколько существует пятизначных палиндромов, делящихся на 9?

А:81; Б:90; В:100; Г:500; Д:1000.

Задача 54. Каково наибольшее количество последовательных чисел, ни у одного из которых сумма цифр не делится на 5?

А:5; Б:6; В:7; Г:8; Д:9.

Задача 55. Число 2004 делится на 12, а сумма его цифр равна 6. Сколько четырёхзначных чисел имеют те же свойства?

А:10; Б:12; В:13; Г:15; Д:18.

Задача 56. 9 пирожных стоят меньше, чем 10 гривен, а 10 таких же пирожных стоят больше, чем 11 гривен. Сколько стоит одно пирожное? А: 1,09 грн.; Б: 1,11 грн.; В: 1,12 грн.; Г: 1,15 грн.; Д: невозможно определить.

Задача 57. Между числами 2002 ? 2003 ? 2004 ? 2005 ? 2006 вместо каждого знака вопроса можно записать знак + или -. Какое из чисел не может получиться?

А:1988; Б:2001; В:2002; Г:2004; Д:2006.

Решения

Задача 53. Первую цифру числа мы можем выбрать 9-ю способами (она может быть любой от 1 до 9). Последняя цифра определяется однозначно. Вторую цифру можно выбрать 10-ю способами (она может быть любой от 0 до 9), а предпоследняя определяется однозначно.

Сумма первой, второй, последней и предпоследней цифр числа может давать остаток от 0 до 8 при делении на 9. Если данный остаток не равен нулю, то средняя цифра определится однозначно как разность между девятью и текущим остатком. А если же остаток равен нулю, то средняя цифра может быть или нулём, или девяткой.

Поскольку числа 2 и 9 взаимно просты, то сумма двух первых и двух последних цифр палиндрома будет делиться на 9 тогда и только тогда, когда двузначное число, образованное первыми двумя его цифрами делится на 9. И не будет делиться – в обратном случае.

Всего двузначных чисел – девяносто. Из них на 9 делятся 9 чисел: 18, 27, …, 90. Значит искомое число пятизначных палиндромов, делящихся на 9 можно вычислить как 9х2+81=100.

Заметим, что этот ответ можно в тесте получить и намного быстрее. Мы видим, что искомое число несколько больше количества способов выбрать первые и последние 2 цифры числа, равного 9х10=90. А серди вариантов ответа число 100 достаточно близко к 90, в то же время как остальные варианты: 500 и 1000 уже отстоят от него довольно далеко. Так что можно отвечать 100 и экономить время для других заданий.

Ответ. В: 100.

Задача 54. Обозначим сумму цифр числа n как S(n). Если n оканчивается не на девятку, то S(n+1)= S(n)+1. так что если в последовательности не будет «перехода через девятку», максимальная её длина равна 4. Максимальная длина последовательности с «переходом через девятку» будет, если сумма цифр первого после перехода числа будет равна 1. Такое будет возможно, к примеру, для чисел 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Может ли быть 9 таких последовательных чисел? Нет. Ведь среди девяти последовательных чисел может быть только один переход через девятку, значит, или до, или после перехода будет идти 5 последовательных чисел. А среди них непременно найдётся число с суммой цифр, делящейся на 5.

Ответ. Г: 8.

Задача 55. Если сумма цифр числа равна 6, оно автоматически будет делиться на 3. Чтобы оно делилось, к тому же, на 4, двуциферное окончание его должно делиться на 4. Поскольку сумма цифр в двуциферном окончании должна быть меньше 6, то имеем следующие варианты: 00, 20, 40, 12, 32, 04. Разберём, сколько будет способов получения суммы первых двух цифр, дополняющей до 6 суму цифр двуциферных окончаний.

00: нужно первыми двумя цифрами получить сумму 6. Всего 6 вариантов:

60, 51, 42, 33, 24, 15.

20: первыми двумя цифрами нужно получить сумму 4: всего 4 варианта:

40, 31, 22, 24.

40: сумма первых двух цифр должна быть 2. Имеем 2 варианта.

12: сумма первых двух цифр должна быть 3. Имеем 3 варианта.

32: для первых двух цифр остаётся единственный вариант.

04: для первых двух цифр есть 2 варианта.

Итого 6+4+2+3+1+2=18 вариантов.

Ответ. Д: 18.

Задача 56. Собственно, имея перед глазами варианты ответов, ответ можно найти простым перебором. Но здесь мы разберём общий метод решения подобных задач. Цена пирожного измеряется дискретной величиной: гривнами и копейками. Обозначим её через натуральное x число копеек. Имеем:

$$\begin{cases} 9\dfrac{x}{100} < 10 \\ 10\dfrac{x}{100} > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{100} < \dfrac{10}{9} \\ \dfrac{x}{10} > \dfrac{11}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1000}{9} \\ x > \dfrac{110}{1} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (110; 111,(1))$$

Единственное натуральное число, входящее в этот промежуток – число 111. Поскольку это число копеек, то в гривнах цена составит 1,11.

Ответ. Б: 1,11.

Задача 57. Поскольку в полученном выражении будет два нечётных числа, независимо от расстановки знаков, его значение будет чётным. Значит, не может получиться число 2001.

Ответ. Б: 2001.

Тема №12: последовательности, проценты, уравнения

Условия задач

Задача 58. Выбранное число удваивают и отнимают единицу. Повторяя эту процедуру 98 раз получили число 2^100+1. С какого числа начинали?

А:1; Б:2; В:4; Г:6; Д: другое число.

Задача 59. За столом сидят 5 мальчиков и 6 девочек, а на столе на тарелке лежат пирожки. Каждая девочка дала по одному пирожку каждому знакомому мальчику. Потом каждый мальчик дал с тарелки по одному пирожку каждой незнакомой девочке. После этого тарелка осталась пустой. Сколько было пирожков на тарелке вначале?

А:5; Б:11; В:25; Г:30; Д: нельзя установить.

Задача 60. Некоторые из 11 коробок содержат по 8 меньших коробок. Некоторые из меньших коробок содержат ещё но 8 коробок каждая. Если пустых коробок 102, то сколько коробок всего?

А: 102; Б: 64; В: 118; Г: 115; Д: невозможно определить.

Задача 61. Если K составляет 10% от L, L составляет 20% от M, M составляет 30% от N, P составляет 40% от N, то отношение K/P равно:

А: 7; Б: 3/2; В: 2/300; Г: 3/200; Д: 1/250.

Задача 62. В соревнованиях по бегу участвовали 28 детей. Количество детей, которые прибежали позже Димы вдвое больше количества детей, которые прибежали раньше Димы. В таком случае Дима прибежал:

А: шестым; Б: седьмым; В: восьмым; Г: девятым; Д: десятым.

Решения

Задача 58. Пусть начальное число равно a. Тогда мы будем получать числа

$$2a-1$$

$$2(2a-1)-1=4a-3$$

$$2(4a-3)-1=8a-7$$

Можно заметить, что n-й результат выражается формулой 2^n(a-1)+1. Докажем это по индукции. Для n=1 формула верна, пусть она верная для n=k. Тогда для n=k+1: 2(2^k(a-1)+1)-1=2^k+1(a-1)+1. Сходится.

Теперь имеем:

$$2^{98}(a-1)+1=2^{100}+1$$

$$2^{98}(a-1)= 2^{100}$$

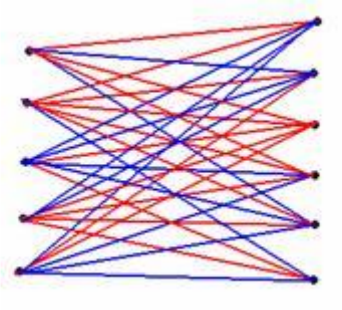
$$a-1=4$$

$$a=5$$

Значит, начинали с пятёрки.

Ответ. Д: с другого числа.

Задача 59.



Начертим граф знакомств между мальчиками и девочками. Для этого нарисуем группы по 5 и 6 точек и соединим точи из разных групп красными линиями, если соответствующие люди знакомы и синими – если незнакомы.

Теперь видно, что количество пирожков, переданных девочками мальчикам, равно количеству красных рёбер, а количество пирожков, переданных мальчиками девочкам, равно количеству синих рёбер. Общее количество рёбер равно 5х6=30. Вот столько и было пирожков на тарелке. Такой граф, кстати, называется двудольным.

Ответ. Г: 30.

Задача 60. Пусть из 11 коробок «верхнего уровня» x заполнены меньшим коробками. Тогда меньших коробок будет 8x. Пусть из них y коробок заполнены маленькими. Тогда маленьких коробок будет 8y. Всего коробок будет 11+8x+8y=11+8(x+y). Количество пустых коробок подсчитаем так: пустых больших коробок будет 11-x, пустых меньших коробок: 8x-y и все 8y маленьких коробок также будут пустыми. Всего пустых коробок 11-x+8x-y+8y=11+7(x+y).

Из уравнения 11+7(x+y)=102 найдём сумму x+y

$$7(x+y)=91$$

$$x+y=13$$

Тогда всего коробок будет 11+8(x+y)= 11+7(x+y)+(x+y)=102+13=115.

Ответ. Г: 115.

Задача 61.

Отношение $\frac{K}{N}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{500}$

Отношение $\frac{P}{N}=\frac{2}{5}$

Искомое отношение находится как частное:

$\frac{K}{P}=\frac{K}{N}:\frac{P}{N}=\frac{3}{500}:\frac{2}{5}=\frac{3}{200}$

Ответ. Г: 3/200.

Задача 62. Остальных участников забега было 27. Если разделить 27 в отношении 1:2, получим 9 и 18. Значит, 9 участников финишировали раньше Димы. Выходит, он пришёл десятым.

Ответ. Д: десятым.

Тема №13: принцип Дирихле, цифры, множества

Условия задач

Задача 63. Экипаж космического корабля, приземлившегося на Марсе, заметил интересные особенности марсиан:

- Все они или красные, или зелёные, или синие;
- Рост каждого – 1 метр;
- У марсианина от 2 до 5 голов;
- На теле у них от 3 до 20 антенн.

Какое минимальное количество жителей должно быть в марсианском посёлке, чтобы среди них заведомо можно было выбрать команду из 11 одинаковых игроков для футбольного матча с космонавтами? (Все 11 марсиан должны быть одного цвета, иметь одинаковое количество голов и одинаковое количество антенн.)

А:216; Б:2161; В:2160001; Г:230051; Д: другое.

Задача 64. Пусть $a=1997^{1998}+1998^{1999}+1999^{2000}+2000^{2001}$. Чему равна последняя цифра числа а?

А:0; Б:2; В:3; Г:4; Д:5.

Задача 65. В июне во Львове число солнечных дней составило 25% от количества пасмурных, количество тёплых – 20% от количества холодных. Только три дня были солнечными и тёплыми. Сколько было пасмурных и холодных дней? (Всего в июне 30 дней.)

А: 27; Б: 22; В: 19; Г: 17; Д: 7.

Задача 66. У Полы и Билла вместе 18 гривен, у Билла и Джона – 12 гривен. У Джона и Марии – 10 гривен. Сколько гривен у Марии и Полы?
А: 16; Б: 20; В: 24; Г: 25; Д: 48.

Задача 67. Рассмотрим число 12321232123212321…, состоящее из 2002 цифр. Тремя последними цифрами этого числа будут:
А: 123; Б: 232; В: 321; Г: 212; Д: 321.

Решения

Задача 63. Рассмотрим, сколько всего может быть вариаций марсиан. Имеем 3 возможности для цвета, 4 возможности для числа голов и 18 возможностей для количества антенн. Это даёт нам 3x4x18=216 вариантов. Рассмотрим теперь самый неблагоприятный случай: в посёлке живёт по 10 марсиан каждой вариации. Тогда его население составит 2160 жителей. Если же там поселится ещё один марсианин, он наверняка по своим параметрам будет совпадать с некоторыми десятью жителями, формируя тем самым местную футбольную команду.

Верно и обратное: имея 2161=216x10+1 жителей и 216 категорий, согласно принципу Дирихле, как минимум в одной категории будет 11 представителей.
Ответ. Б: 2161.

Задача 64. Последние цифры степеней подчиняются несложным закономерностям. Чтобы их вывести, достаточно понять, что последняя цифра степени зависит только от последних цифр предыдущей степени и основания.

Для семёрки получаем такую таблицу:

Показатель	1	2	3	4	5
Последняя цифра	7	9	3	1	7

Заполняется она так: $7^1=7$, 7x7=49. Во вторую ячейку пишем 9. 9x7=63 – пишем тройку в третью ячейку. 3x7=21 – пишем единицу. Далее 1x7=7 и цифры начнут повторяться.

Поскольку цифры повторяются через 4, а 1998 даёт остаток 2 при делении на 4, то последней цифрой 1997^{1998} будет 9.

Построим такие таблицы для восьмёрки и для нуля:

Показатель	1	2	3	4	5
Последняя цифра	8	4	2	6	8

Отсюда, 1998^{1999} оканчивается на 2.

Показатель	1	2	3
Последняя цифра	9	1	9

А 1999^{2000} – на 1.

Четвёртое слагаемое, понятно, оканчивается нулём. Итого 9+2+1+0=12, значит, последней цифрой будет 2.

Ответ. Б: 2.

Задача 65. Поскольку солнечные дни относятся к пасмурным как 1:4, то солнечных было 30/5=6, а пасмурных – 24. Т.к. тёплые дни относятся к холодным как 1:5, то тёплых было 30/6=5, а холодных – 25.

Известно, что тёплых и солнечных дней было 3. Значит, 6-3=3 солнечных дня были холодными, а 5-3=2 тёплых дня было пасмурными.

Чтобы найти число холодных пасмурных дней, отнимем от общего количества дней (30) тёплые солнечные (3), холодные солнечные (3) и тёплые пасмурные (2). Итого 30-3-3-2=22 холодных пасмурных дня.

Ответ. Б: 22.

Задача 66. Чтобы найти сумму денег у Марии и Полы, сложим деньги Полы и Билла с деньгами Джона и Марии, и отнять от результата деньги Билла и Джона.

Получаем: 18+10-12=16 (грн).

Ответ. А: 16.

Задача 67. Можно заметить, что в заданном числе будет повторяться группа цифра 1232. Т.к. общее количество цифр, 2002, даёт остаток 2 при делении на 4, то число будет оканчиваться на …123212 и последними тремя цифрами будут 212.

Ответ. Г: 212.

Тема №14: комбинаторика, делимость, геометрия

Условия задач

Задача 68. Тест состоит из 10 вопросов, на каждый из которых нужно выбрать вариант ответа а) или б). Если на любые 5 вопросов ответить вариантом а), а на остальные пять – вариантом б), то обязательно как минимум 4 ответа окажутся верными. Сколько существуем вариантов расположения правильных ответов в тесте, которые обеспечивают такое его свойство?

А:2; Б:10; В:22; Г:252; Д: 5^5.

Задача 69. В коробке была 31 конфета. В первый день Кристина съела 3/4 от количества конфет, которые съел Петя в тот же день. На второй день Кристина съела 2/3 количества конфет, которые съел Петя в тот же день. После двух дней коробка осталась пустой. Сколько конфет из коробки съела Кристина?

А:9; Б:10; В:12; Г:13; Д:15.

Задача 70. Карл говорит правду в тот день, когда он не обманывает. Какое из следующих утверждений Карл не мог высказать в один день вместе с остальными?

А: Число моих друзей - простое;

Б: У меня столько же друзей среди мальчиков, сколько и среди девочек;

В: 288 делится на 12;

Г: Я всегда говорю правду;

Д: Три моих друга старше меня.

Задача 71. Какое наибольшее количество тупых углов могут образовать 6 лучей с общим началом?

А: 6; Б: 8; В: 9; Г: 12; Д: 15.

Задача 72. В каждом подъезде на каждом этаже 16-этажного дома есть по 4 квартиры. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира №165?

А: 3 подъезд 9 этаж; Б: 3 подъезд 10 этаж; В: 3 подъезд 12 этаж; Г: 2 подъезд 13 этаж; Д: 3 подъезд 7 этаж.

Решения

Задача 68. Если все правильные ответы будут а), то, отвечая указанным в условии образом, мы будем иметь 5 гарантированных правильных ответов. Рассмотрим теперь случай, если будет 9 правильных ответов а) и один правильный ответ – б). Тогда в наихудшем случае все наши ответы б) попадут на вопросы с ответом а), а из ответов а) один попадёт на вопрос с правильным ответом б), а остальные 4 – на вопросы с правильным ответом а). Так что 4 гарантированных правильных ответов будет. Рассуждая далее аналогичным образом, получим, что в случае с двумя правильными ответами б) и восемью – а), можно получить только 3 гарантированных верных ответа. Так что возможных распределений правильных ответов в тесте, при котором описанный в условии трюк сработает, всего 4: все ответы а), 9 а) и 1 б), а также, из соображений симметрии, 1 ответ а) и 9 ответов б) и все ответы б).

Количество возможных вариантов расположения правильных ответов в первом и четвёртом случаях будет по одному, а во втором и третьем случаях – по 10. Итого 22 возможности.

Ответ. В: 22.

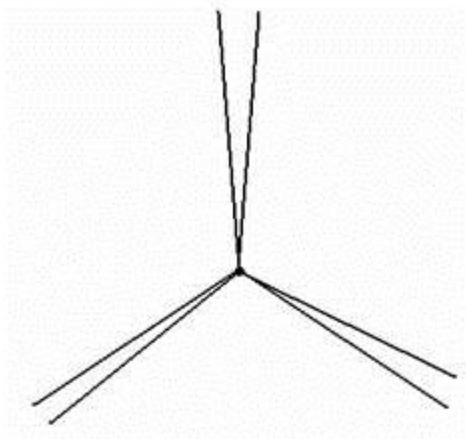
Задача 69. Из условия задачи следует, что количество конфет, съеденных в первый день, делится на 7, а во второй – на 5. Представить число 31 в виде суммы натуральных чисел, одно из которых делится на 7, а другое – на 5, можно единственным способом: 31=21+10. Разбив первое слагаемое в отношении 4:3, а второе – 3:2, получим 31=(12+9)+(6+4). Значит, Кристина съела 9+4=13 конфет.

Ответ. Г:13.

Задача 70. Поскольку 288 на самом деле делится на 12, то утверждение В – истинное. Из утверждений А, Б и Д следует, что число его друзей простое, чётное и не меньше трёх. Очевидно, что никакое число не может удовлетворять этим условиям, так что как минимум одно утверждение из этой тройки – ложно. Следовательно, ложно и утверждение Г о том, что он всегда говорит правду. Поскольку по условию задачи, или среди 4 истинных утверждений будет одно ложное, или среди 4 ложных будет одно истинное, то но может быть сказано в один день с остальными истинное утверждение о делимости.

Ответ. В: 288 делится на 12.

Задача 71. Всего 6 лучей сформируют 15 углов. Все 15 тупыми быть не могут, потому что в таком случае мы не сможем уложиться в 360^o. А вот 12 – вполне:



Ответ. Г: 12.

Задача 72. В одном подъезде 64 квартиры. Т.к. 165=2*64+9*4+1, то квартира 165 будет в (2+1=3) третьем подъезде на (9+1=10) десятом этаже.

Ответ. Б: 3 подъезд 10 этаж.

Тема №15: системы счисления, геометрия, арифметика

Условия задач

Задача 73. Сколько положительных целых чисел могут быть записаны как $a_0+a_1 3+a_2 3^2+a_3 3^3+a_4 3^4$, если a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 принадлежат множеству {-1, 0, 1}.

А:5; Б:80; В:81; Г:121; Д: 243.

Задача 74. Сколькими способами можно полностью покрыть прямоугольник со сторонами 2x8 костяшками домино 1x2 без наложений?

А:16; Б:21; В:30; Г:32; Д:34.

Задача 75. По результатам контрольной работы, в классе средний балл мальчиков оказался равен 8,6, девочек – 9,8, а средний балл всех учеников в классе – 9,4. Какую часть класса составляют мальчики?

А: 1/4; Б: 1/3; В: 1/2; Г: 2/3; Д: невозможно определить.

Задача 76. Сколько точек пересечения точно не могут иметь 4 прямые?

А: 1; Б: 2; В: 3; Г: 4; Д: 5.

Задача 77. Маленький Мук и королевский скороход соревновались в беге на дорожке длиной 30 км, которая проходила вокруг большого луга. По условиям состязания, выиграет тот, кто обгонит другого, пробежав на один круг больше. Скороход пробегает круг за 10 минут, а Маленький Мук – за 6 минут. Оба стартуют одновременно из одного и того же места. Через сколько минут Маленький Мук победит?

А: 5; Б: 10; В: 15; Г: 20; Д: 25.

Решения

Задача 73. Здесь мы имеем дело с равновесной троичной системой счисления. Если бы коэффициенты при степенях тройки принимали значения 0, 1 или 2, то таким образом могли бы быть записаны числа от 0 до $(22222)_3$ = 242. А в равновесной троичной системе счисления пятью цифрами можно записать число от $((-1)(-1)(-1)(-1)(-1))_3$ = -121 до $(11111)_3$ = 121. Из них положительных чисел будет 121.

Строго доказать, что с помощью n цифр равновесной троичной системы можно записать все числа в диапазоне от $–(3^n-1)/2$ до $(3^n-1)/2$ можно по индукции. Одной цифрой можно записать числа -1, 0, 1 – база индукции имеется. Пусть для k цифр верно, что мы получаем все числа от $–(3^k - 1)/2$ до $(3^k - 1)/2$.

Тогда, взяв k+1-ю цифру, равную нулю, мы получим те же числа. Взяв её равной единице, получим числа от $3^k – (3^k - 1)/2$ до $3^k + (3^k - 1)/2$, т.е. от $(3^k - 1)/2 +1$ до $(3^{k+1} - 1)/2$. Аналогично, взяв взяв k+1-ю цифру, равную -1, получим все числа от $–(3^{k+1} - 1)/2$ до $(3^k - 1)/2 -1$. Таким образом, с помощью k+1 цифры мы получим все числа от $–(3^{k+1} - 1)/2$ до $(3^{k+1} - 1)/2$, что и требовалось доказать.

Следовательно, утверждение верно и с помощью 5 цифр мы действительно получим все числа от -121 до 121.

Ответ. Г: 121.

Задача 74. У нас уже разбиралась задача о нахождении количества разбиений полоски 2xn на домино 1x2. Там доказывалось, что искомое количество равно n-му числу Фибоначчи, если начинать ряд с 1, 2. Следовательно, для восьми, число способов будет равняться: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Ответ. Д:34.

Задача 75. Пусть доля мальчиков в классе равна x, 0<x<1. Тогда доля девочек в классе (1-x). Верно равенство:

$8,6x + 9,8(1-x) = 9,4.$

$8,6x + 9,8 - 9,8x = 9,4.$

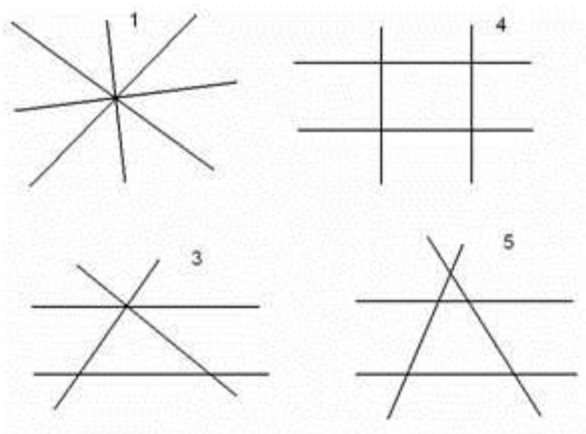
$0,4 = 1,2x.$

$x = 1/3.$

Значит, мальчиков в классе – треть.

Ответ. Б: 1/3.

Задача 76. Легко можно расположить 4 прямые так, чтобы у них была одна или 4 точки пересечения. Если ещё немного подумать, находятся варианты для трёх и пяти точек пересечения. Поскольку мы имеем дело с тестом, теперь можно выбирать ответ Б: у четырёх прямых не может быть ровно две точки пересечения.



Ответ. Б: 2.

Задача 77. Сколько километров пробегает скороход за минуту?

30/10 = 3 (км).

Сколько километров пробегает Маленький Мук за минуту?

30/6 = 5 (км).

На сколько километров обгоняет Маленький Мук обгоняет скорохода каждую минуту?

5 – 3 = 2 (км).

Через сколько минут Маленький Мук обгонит скорохода на 30 км?

30/2 = 15 (мин).

Ответ. В: 15.

Тема №16: целые числа, логика, геометрия

Условия задач

Задача 78. Дядя Богдан наловил рыбы. Три самых больших рыбы он дал своей собаке, тем самым, уменьшив общий вес своего улова на 35%. Затем он дал три самых маленьких рыбы своему коту, уменьшив вес оставшейся рыбы на 5/13. Остальные рыбы семья съела на обед. Сколько рыб поймал дядя Богдан?

А:8; Б:9; В:10; Г:11; Д: 12.

Задача 79. В одной из подгрупп кубка чемпионов Европы участвовали 5 команд:, A, B, C, D, E. Пять спортивных изданий высказали свои прогнозы насчёт финалистов:

1)B, D;

2)C, E;

3)B, C;

4)A, B;

5)D, C.

Оказалось, что один из прогнозов был полностью верным, а в остальных указывалась лишь одна из команд-финалистов. Какие команды вышли в финал?

А: B, D; Б: C, E; В: B, C; Г: A, B; Д: D, C.

Задача 80. На плоскости даны 4 точки. Пять из шести расстояний между ними равны 7, 5, 5, 2 и 2. Тогда шестое расстояние может равняться:
А: 3; Б: 4; В: 7; Г: 10; Д: 12.

Задача 81. Чтобы очистить 4 своих аквариума, Ваня поселил в них улиток. Чтобы очистить один аквариум, нужны или 4 большие улитки, или 1 большая и 5 маленьких улиток, или 3 большие и 3 маленькие улитки. У Вани 15 больших улиток. Но в зоомагазине он может обменять одну большую улитку на 2 маленьких. Какое наименьшее количество больших улиток нужно обменять Ване, чтобы почистить все свои аквариумы?
А: 2; Б: 3; В: 4; Г: 5; Д: 6.

Задача 82. В футбольном матче победитель получает 3 очка, проигравший – 0, а ничья оценивается одним очком. После 31 матча моя любимая команда имела 64 очка, причём 7 матчей она сыграла вничью. Сколько раз проиграла моя любимая команда?
А: 0; Б: 5; В: 19; Г: 21; Д: 24.

Решения

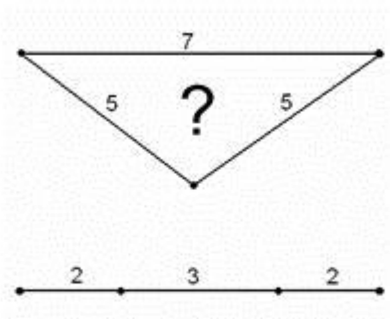
Задача 78. Примем общий вес пойманных рыб за 100. Тогда вес отданных коты рыб составил 35, после этого вес рыб составил 65. Коту было отдано трёх рыб общим весом 25, следовательно, на обед осталось несколько рыб весом 40.

Поскольку три самые тяжёлые рыбы имели общий вес 35, то вес самой тяжёлой из оставшихся рыб не может быть меньше $\frac{35}{3}$. Аналогично, вес самой лёгкой из оставшихся рыб не может быть меньше $\frac{25}{3}$. Следовательно, количество оставшихся рыб находится между числами $40:\frac{35}{3}=\frac{120}{35}\approx 3.4$ и $40:\frac{25}{3}=\frac{120}{25}=4.8$. Единственное целое число в этом диапазоне равно 4. Значит, всего рыб было 3+4+3=10.
Ответ. В: 10.

Задача 79. Перебором возможных вариантов находим такой прогноз, который с каждым из остальных имеет один общий элемент. Это прогноз третьего издательства: B, C.

Ответ. В: B, C.

Задача 80.



Как могут быть расположены те три из данных четырёх точек, между которыми расстояния известны? Существует лишь 2 варианта: в вершинах равнобедренного треугольника с вершинами 7, 5, 5 или на отрезке длиной 7. В первом случае установить четвёртую точку так, чтобы использовать остальные 2 из известных расстояний, невозможно. А второй вариант даёт нам отрезок длиной 7, разбитый на отрезки в 2, 3 и 2. Следовательно, шестое расстояние равно 3.

Ответ. А: 3.

Задача 81. Относительно «обменного курса» улиток, второй вариант очистки эквивалентен 3,5 большим улиткам, а третий способ – 4,5 большим. Поскольку у Вани всего 15=4+4+3,5+3,5 больших улиток, то ему придётся 2 аквариума чистить первым способом, а ещё два – вторым. Для этого ему нужно 5 больших улиток сменять на 10 маленьких.

Ответ. Г: 5.

Задача 82. За победы команда получила 64-7=57 очков. Значит, побед было 57/3=19. Так как из 31 матча было 7 ничьих и 19 побед, то поражений было 31-7-19=5.

Ответ. Б: 5.

Тема №17: тригонометрия, неравенства, геометрия

Условия задач

Задача 83. Каково максимальное значение выражения

$$\sin a \cos b + \sin b \cos c + \sin c \cos d + \sin d \cos a$$

для действительных a, b, c, d?

А:1; Б:2; В:3; Г:4; Д: 8.

Задача 84. Известно, что x и y - положительные действительные числа, и только одно из приведённых в ответах утверждений истинное. Какое?

А: $x^2 > 2y^2$; Б: $x > 2y$; В: $x > y$; Г: $x^2 > y^2$; Д: $x > y^2$.

Задача 85. Некоторое количество прямых изобразили на бумаге так, что между ними есть углы величиной 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°. Найдите наименьшее количество прямых, для которых такое возможно.
А: 4; Б: 5; В: 6; Г: 7; Д: 8.

Задача 86. В стране Туфляндии у каждого жителя правая нога на один или на два размера больше левой. К сожалению, в магазине продаются пары обуви только одинакового размера. Чтобы сэкономить деньги, несколько друзей пошли в магазин и каждый из них купил одну пару обуви. Когда они обменялись обувью, один ботинок 36 размера и один ботинок 45 размера оказались лишними. Какое наименьшее количество человек могло быть в этой группе?

А: 5; Б: 6; В: 7; Г: 8; Д: 9.

Задача 87. На клумбе расцвели цветы: белый, красный, синий и жёлтый. Пчела Майя подлетает к каждом цветку всего 1 раз. Сначала она летит к красному цветку, а затем – к остальным. Майя не может лететь с жёлтого цветка сразу на белый. Сколькими способами пчела Майя может посетить все 4 цветка?

А: 1; Б: 2; В: 3; Г: 4; Д: 6.

Задача 88. Петя прибавляет 2, Назар отнимает 1, а Дима удваивает число. Каждый мальчик выполняет своё действие только один раз. В каком порядке им нужно выполнять эти действия, чтобы из 3 получить 9?

А: Дима, Петя, Назар;

Б: Петя, Дима, Назар;

В: Дима, Назар, Петя;

Г: Назар, Дима, Петя;

Д: Петя, Назар, Дима.

Решения

Задача 83. Выражение sin a cos b + sin b cos c + sin c cos d + sin d cos a можно рассмотреть как скалярное произведение 4-мерных векторов с координатами (sin a, sin b, sin c, sin d) и (cos b, cos c, cos d, cos a). По неравенству Коши-Буняковского, скалярное произведение векторов не превосходит произведения их модулей. Значит:

$$\begin{aligned}
&\sin a\cos b+\sin b\cos c+\sin c\cos d+\sin d\cos a\le\\
&\le\sqrt{\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d}\cdot\sqrt{\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+\cos^2 d}=\\
&=\sqrt{\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d}\cdot\sqrt{4-\left(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\right)}=\\
&=\sqrt{\left(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\right)\left(4-\left(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\right)\right)}
\end{aligned}$$

Применив теперь неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получим:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\right)\left(4-\left(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\right)\right)}\le\\
&\le\frac{\left(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\right)+\left(4-\left(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\right)\right)}{2}=\\
&=2
\end{aligned}$$

Взяв $a=b=c=d=\dfrac{\pi}{4}$ получаем значение выражение, в точности равное двум.

Ответ. Б:2.

Задача 84. Установим, какие из приведённых соотношений взаимосвязаны.

А: $x^2 > 2y^2$; => Г: $x^2 > y^2$;

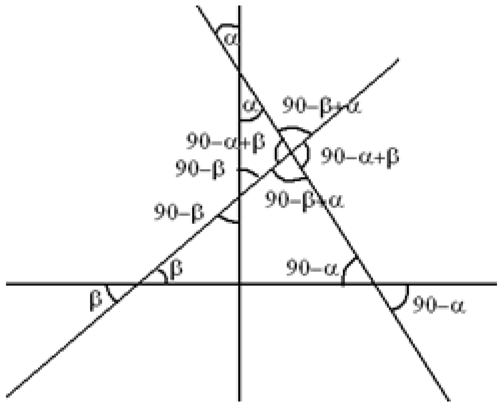
Б: $x > 2y$; => В: $x > y$;

В: $x > y$; <=> Г: $x^2 > y^2$.

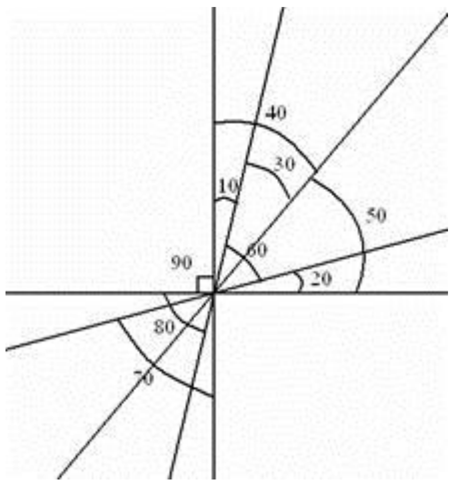
Выходит, утверждения А, Б, В, Г не могут быть единственными истинными, т.к. их истинность влечёт за собой истинность какого-нибудь ещё утверждения. Значит, они ложны, а единственно истинным будет утверждение $x > y^2$. Примером таких чисел будут $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$.

Ответ. Д: $x > y^2$.

Задача 85. Заметим, что среди прямых, две обязательно должны быть перпендикулярны. Если две перпендикулярные прямые пересечь ещё двумя, острых углов может получиться не более пяти, как в случае, когда ни одна из этих двух прямых не проходит через точку пересечения перпендикулярных (на рисунке), так и в других случаях.



Имея же 5 прямых, мы можем построить требуемую конструкцию:



Ответ. Б: 5.

Задача 86. Наименьшим количество покупателей будет, если у наибольшего их количества ноги различаются на 2 размера. Значит, это были люди с размерами: (45, 43), (43, 41), (41, 39), (39, 37) и (37, 36) – итого 5 человек. Но ответить 5 было бы опрометчиво. Ведь кроме обутых в итоге ботинок было куплено ещё 2 штуки. Значит, всего купили 6 пар ботинок, и покупателей было шестеро.

Ответ. Б: 6.

Задача 87. Первый цветок она выбирает однозначно. Второй цветок может быть выбран одним из трёх способов:

Красный – Белый, Красный – Синий или Красный – Жёлтый.

Поскольку с жёлтого цветка нельзя лететь сразу на белый, получаем 5 способов для трёх цветков:

Красный – Белый – Жёлтый,

Красный – Белый – Синий,

Красный – Синий – Белый,

Красный – Синий – Жёлтый,

Красный – Жёлтый – Синий.

Но среди этих способов один путь, а именно, Красный – Синий – Жёлтый – тупиковый, так как никакой цветок, кроме белого, не остаётся, а на него лететь нельзя. Остальные же 4 тройки дают нам 4 возможных маршрута облёта цветов:

Красный – Белый – Жёлтый – Синий,

Красный – Белый – Синий – Жёлтый,

Красный – Синий – Белый – Жёлтый,

Красный – Жёлтый – Синий – Белый.

Ответ. Г: 4.

Задача 88. Поскольку 9=(3+2)*2-1, то сначала посчитать должен Петя, затем Дима, и потом – Назар.

Ответ. Б: Петя, Дима, Назар.

Тема №18: тригонометрия, последовательность, цифры

Условия задач

Задача 89. Найдите, при каких значениях острого угла a уравнение

$$(2\cos a - 1)x^2 - 4x + 4\cos a + 2 = 0$$

будет иметь два действительных положительных корня?

А:$0^o < a < 30^o$; Б: $0^o < a <$ 60^0; В: $30^o < a <$ 60^0; Г: $30^o < a <$ 90^0; Д: $0^o < a < 90^o$.

Задача 90. Последовательность целых чисел задаётся рекуррентно: $a_0=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_n+(a_{n+1})^2$. Чему равен остаток от деления a_{2009} на 7?

А: 0; Б: 1; В: 2; Г: 5; Д: 6.

Задача 91. Решением уравнения $(x+2^{2007})^2 – (x–2^{2007})^2 = 2^{2008}$ является:

А: 0,5; Б: 2; В: 2^2; Г: 2^{2008}; Д: 0.

Задача 92. Комплект домино состоит из 28 костяшек, которые образованы всеми возможными комбинациями количеств точек от 0 до 6 включительно. Сколько всего точек в наборе домино?

А: 84; Б: 105; В: 126; Г: 147; Д: 168.

Задача 93. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра справа больше цифры слева?

А: 9; Б: 18; В: 26; Г: 30; Д: 36.

Задача 94. Секретный агент хочет расшифровать код из шести цифр. Он знает, что сумма цифр на первом, третьем и пятом местах равна сумме цифр на втором, четвёртом и шестом местах. Какой из предложенных вариантов не может быть кодом?

А: 81**61;

Б: 7*727*;

В: 4*4141;

Г: 12*9*8;

Д: 181*2*.

Решения

Задача 89. Раз корни этого уравнения положительны, положительной будет и их сумма, которая по теореме Виета равняется:

$$\frac{4}{2\cos a-1}>0\Rightarrow 2\cos a-1>0\Rightarrow \cos a>\frac{1}{2}=a<60^o$$

Это исключает ответы Г и Д.

Дискриминант должен быть положительным, значит $D=16-8(2\cos a-1)(2\cos a+1)=16-8(4\cos^2 a-1)=24-32\cos^2 a>0$.

Отсюда,

$$32\cos^2 a<24\Rightarrow \cos^2 a<\frac{3}{4}\Rightarrow \cos a<\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a>30^o$$

Отбрасываем ответы А и Б, оставляя единственный вариант.

Ответ. В: $30^o < a < 60^o$.

Задача 90. Сначала найдём a_1 из уравнения: $2=1+(a_1)^2$, откуда $a_1=1$ или $a_1=-1$.

Для каждого варианта далее будем вместо самих a_n вычислять остатки от деления a_n на 7.

При $a_1=1$ получим последовательность:

1, 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1, 1, ...

Поскольку десятый и одиннадцатый члены равны единице и каждый член последовательности однозначно определяется двумя предыдущими, то далее последовательность зациклится циклом (1,1,2,5,6,6,0,6,1,0). Период цикла равен 10. Значит a_{2009} будет давать такой же остаток при делении на 7, как и a_9, а именно 0.

При $a_1=-1$ последовательность остатков будет такой же, если бы a_1 равнялось 6: 1, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 6,

Здесь длина периода равна 6, и т.к. 2009 даёт остаток 5 при делении на 6, то $a_{2009}=a_5=5$.

Ответ. А: 0 или Г: 5.

Задача 91. Раскроем скобки:

$$(x+2^{2007})^2-(x-2^{2007})^2=2^{2008}$$

$$x^2+2^{2008}x+2^{4014}-x^2+2^{2008}x-2^{4014}=2^{2008}$$

$$2^{2009}x=2^{2008}$$

$$x=0{,}5$$

Ответ. А: 0,5.

Задача 92. В наборе будет 7 дублей, костяшек с одинаковыми значениями на половинках. Сумма очков на всех дублях равна (0+1+2+3+4+5+6)х2=21х2=42. В остальном наборе каждое количество точек на костяшках домино появляется в паре с шестью остальными. Например: 3-0, 3-1, 3-2, 3-4, 3-5, 3-6. так что нужно найти значение выражения (0+1+2+3+4+5+6)х6=21х6=126. Но т.к. при таком подсчёте каждая костяшка была учтена дважды (например, как 3-4 и как 4-3), то результат нужно разделить на 2: 126/2=63. Вместе с дублями количество очков составит 42+63=105.

Ответ. Б: 105.

Задача 93. Среди чисел, которые начинаются на 1, таких чисел будет 8: от 12 до 19. среди начинающихся на 2 их будет 7: от 23 до 29. И т.д., для начинающихся на 8 будет всего одно число – 89, а для следующего десятка таких не будет совсем. Ответом будет сумма 8+7+6+5+4+3+2+1=4х9=36.

Ответ. Д: 36.

Задача 94. Рассмотрим для каждого из вариантов, может ли выполниться условие:

А: 81**61;

8+*+6=1+*+1

14+*=2+*

12+*=*

На местах звёздочек должны стоять цифры, различающиеся на 12, что невозможно.

Б: 7*727*;

7+7+7=*+2+*;

19=*+*.

Две цифры не могут дать в сумме 19.

В: 4*4141;

4+4+4=*+1+1;

10=*.

Невозможно.

Г: 12*9*8;

1+*+*=2+9+8;

+=18.

А вот это возможно, т.к. 9+9=18 и кодом будет последовательность 129998.

Д: 181*2*;

1+1+2=8+*+*.

Здесь правая часть уже явно больше левой.

Так что единственный вариант ответа, который может быть кодом - это 12*9*8.

Ответ. Г: 12*9*8.

Тема №19: комбинаторика, последовательность, логика

Условия задач

Задача 95. Ордината вершины параболы $y=x^2+bx+c$ равна -7. Сколько целых чисел может находиться между корнями уравнения $x^2+bx+c=0$?

А:6 или 7; Б: 4 или 5; В: 5 или 6; Г: только 5; Д: только 6.

Задача 96. Кенгуру прыгает только вперёд на 1 или на 3 метра. Он хочет преодолеть ровно 10 метров. Сколькими способами он может это сделать?

А: 28; Б: 34; В: 35; Г: 55; Д: 56.

Задача 97. Дана числовая последовательность такая, что $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_{n+3}= a_n+ a_{n+1}– a_{n+2}$. Найдите a_{2007}.

А: -2006; Б: -2004; В: -2002; Г: 2008; Д: 2007.

Задача 98. Пять целых чисел написали по кругу так, что сумма никаких двух или трёх расположенных подряд не делится на 3. Сколько среди этих пяти чисел таких, которые делятся на 3?

А: 0; Б: 1; В: 2; Г: 3; Д: невозможно определить.

Задача 99. Есть 5 коробок с карточками с буквами B, R, A, V, O.

В первой лежат B, V.

Во второй лежат B, A, V, R.

В третьей лежат A, B.

В четвёртой лежит V.

В пятой лежат B, R, A, V, O.

Петя вытащил из коробок карточки так, чтобы в каждой коробке осталось по одной карточке и в разных коробках остались карточки с разными буквами. Какая буква останется во второй коробке?

А: B; Б: R; В: A; Г: V; Д: O.

Задача 100. Маша подарила маме, бабушке, тёте и двум сёстрам по букету цветов. Цветы для сестёр и тёти были одного цвета. Известно, что бабушке она подарила не розы. Какой из этих букетов получила мама?

А: Жёлтые тюльпаны; Б: Розовые розы; В: Красные гвоздики; Г: Жёлтые розы; Д: Жёлтые гвоздики.

Решения

Задача 95. Рассмотрим параболу $y=x^2-7$. Точки пересечения её с осью Ox имеют абсциссы $\pm\sqrt{7}$, следовательно, расстояние между ними равно $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$. При сдвиге параболы вдоль оси Ox, расстояние между корнями не поменяется, и т.к. $\sqrt{28}<\sqrt{25}=5$, между корнями будут попадать 5 или 6 целых чисел.

Ответ. В: 5 или 6.

Задача 96. Есть 4 варианта представления числа 10 в виде суммы троек или единиц:

10=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1+3=1+1+1+1+3+3=1+3+3+3.

Первое разбиение предлагает всего один способ преодоления расстояния в 10 метров.

Во втором разбиении единственная тройка может быть одним из восьми слагаемых, что даёт 8 вариантов.

Из третьего разбиения можно получить $C_6^2 = 15$ вариантов расположения прыжков в 3 метра.

В третьем разбиении единственная единица может быть одним из четырёх слагаемых, что даёт ещё 4 варианта.

Всего 1+8+15+4=28 вариантов.

Ответ. А: 28.

Задача 97. Вычислим несколько членов последовательности: 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, 11, -8, 13, -10, 15, -12, 17.

Замечаем, что члены с нечётными номерами равны номеру. А члены с чётными номерами равны разности между числом 2 и номером.

$$a_{2n+1}=2n+1$$

$$a_{2n}=2-2n$$

Докажем это по индукции. Базу мы уже построили. Пусть это условие выполняется для всех чисел с номером, меньшим 2k. Тогда

$a_{2k}= a_{2k-3}+ a_{2k-2}- a_{2k-1} = 2k-3 + 2-(2k-2) - (2k-1) = 2-2k$

$a_{2k+1}= a_{2k-2}+ a_{2k-1}- a_{2k} = 2-(2k-2) + (2k-1) - (2-2k) = 2k+1$

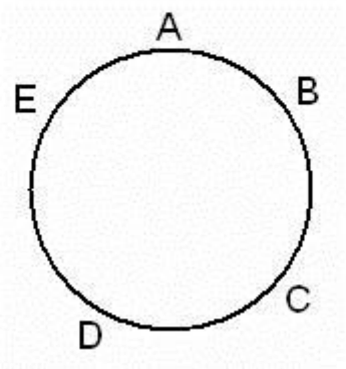
Доказано.

Следовательно, $a_{2007} = 2007$.

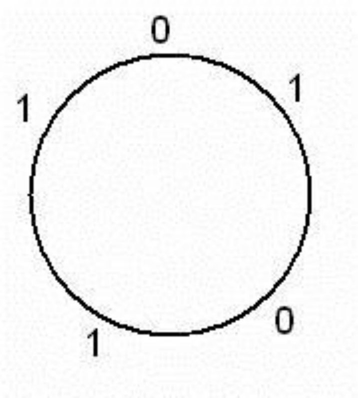
Ответ. Д: 2007.

Задача 98.

Рассмотрим остатки от деления записанных чисел на 3. Могут ли три из них быть равными 0? Нет, т.к. в таком случае 2 числа стояли бы рядом, и их сумма делилась бы на 3.



Что если два из остатков равняться 0? Да, но в таком случае между ними должен стоять некоторый нулевой остаток, скажем, 1. Пусть числа A и C делятся на 3, а B даёт остаток 1. Тогда остатки E и D должны равняться только единицам, иначе три рядом стоящих числа разделятся на 3. Получаем удовлетворяющее условию расположение.



Может ли только один из остатков равняться 0? Пусть A даёт остаток 0. Тогда у B и E должны быть одинаковые ненулевые остатки, иначе или сумма одной из пар, или всех трёх чисел разделится на 3. Допустим, они равны 1.

Следовательно, ни один из остатков C и D не равен 2. Также они не могут одновременно равняться 1. Значит, один из них равен 0, а другой – 1. Но этот случай с двумя числами, делящимися на 2, мы уже рассмотрели.

Может ли ни одно число не делиться на 3? Нет, т.к. в таком случае найдётся три подряд стоящих одинаковых остатка, в сумме дающих делящееся на 3 число.

Следовательно, ровно 2 числа из пяти должны делиться на 3.

Ответ. В: 2.

Задача 99. Из четвёртой коробки ничего не нужно вытаскивать. Там останется V. Значит, из первой нужно вытащить V и оставить B. Тогда из третьей нужно вытащить B и оставить A. И из второй нужно вытащить B, A, V и оставить R. Из пятой тогда Петя вытащит всё, кроме O.

Ответ. Б: R.

Задача 100. Три жёлтых букета: А, Г и Д получили тётя и сёстры. Т.к. бабушка получила не розы, то она получила гвоздики, а маме Маша подарила розовые розы.

Ответ. Б: Розовые розы.

Сайты, рекомендуемые для заочного математического кружка

http://mccme.ru

http://olympiad.msu.ru

http://intelmath.narod.ru/kangaroo-problems.html

http://www.problems.ru

http://www.olimpiada.ru