Олимпиада «Паруса надежды» по математике 2014 год.

Очный тур

МИИТ

Пользоваться калькулятором не разрешается. Вариант ОДВН – 14 – 01

1. Решить неравенство $\frac{\log_2\left(8-x^3\right)}{\log_2(2-x)} \geq 3$
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$$\begin{cases} 2-|x| \leq |y| \leq 4-|x| \\ \frac{|x|}{2} \leq |y| \leq 2|x| \end{cases}$$
3. Корнет Оболенский жил в XIX веке. Суммы цифр года его рождения и смерти одинаковы. Число прожитых им лет начинается цифрой 8. Определить год рождения корнета. Ответ должен быть обоснован.
4. Найти делимое и частное в делении ***1* : 11 = *9*, где звездочки заменяют в задаче неизвестные числа. Ответ должен быть обоснован.
5. Найти все целые положительные числа x, произведение цифр которых равно $x^2-10x-22$.
6. Доказать, что для любого x выполняется неравенство $2x^4+4x^2-16x>-11$
7. Доказать, что если длина каждой из биссектрис треугольника больше 1, то его площадь больше $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
8. Найдите все пары чисел (a, b) при которых для всех x верно равенство $a(\cos x-1)+b^2=\cos\left(ax+b^2\right)-1$

Очный тур

МИИТ

Пользоваться калькулятором не разрешается..   Вариант ОДВН – 14 – 02

1. Решить неравенство $\frac{\lg\left(8+x^3\right)}{\lg(2+x)} \le 3$
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$$\begin{cases} \frac{|x|}{2} \le |y| \le |x| \\ 1-|x| \le |y| \le 3-|x| \end{cases}$$
3. Князь Юсупов жил в 18 веке. Сумма цифр года его рождения на единицу меньше, чем сумма цифр года его смерти. Число прожитых им лет начиналось с цифры 7. Определить год рождения князя, если год его смерти нечетное число, делящееся на 9. Ответ должен быть обоснован.
4. Восстановить цифры в умножении, если звездочки заменяют в задаче неизвестные цифры. Ответ должен быть обоснован. В ответе указать эти два множителя.

```
   ****
     *2
  ------
  18*48
 7499*
 -------
 ***66*
```

5. Найти все целые положительные числа *x*, произведение цифр которых равно $x^2-15x-10$.
6. Доказать, что для любого *x* выполняется неравенство: $-\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{3}x^3-2x^2+x<\frac{5}{24}$
7. Дан квадрат со стороной 1, в котором 5 точек. Доказать, что расстояние между какими-то двумя точками не превосходит числа $\frac{1}{\sqrt{2}}$
8. Найдите множество пар (a, b) таких, что для всех *x* справедливо равенство $\sin(ax+b)=a\sin x+b$

Очный тур

МИИТ

Пользоваться калькулятором не разрешается. Вариант ОДВН – 14 – 03

1. Решить неравенство $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
   $\begin{cases} 1-|x| \le |y| \le 2-|x| \\ |x| \le |y| \le 2|x| \end{cases}$
3. У помещицы Коробочки Чичиков купил мед и пеньку. За пуд меда он отдал 12 рублей, а за пуд пеньки 10 рублей. Сколько пудов меда и сколько пудов пеньки купил Чичиков, если за все он заплатил 44 рубля, а количество пудов как меда, так и пеньки было натуральным числом?
4. Восстановить цифры в умножении, где звездочки заменяют в задаче неизвестные числа. В ответе указать эти числа. Ответ должен быть обоснован.

```
     **4
     23*
    ----
    **24
   1***
  1***
  ------
  *1****
```

5. Найти все целые положительные числа x, произведение цифр которых равно $x^2 - 10x - 10$.
6. Доказать, что для любого x выполняется неравенство:
   $\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{28}{5} > 0$
7. Доказать, что площадь выпуклого шестиугольника со сторонами меньшими 1, меньше 2, 6.
8. Найдите все пары (a, b), где a > 0, b ≥ 0, что для всех $x > 0$ справедливо равенство $a \ln x + b = \ln(ax + b)$

Очный тур

МИИТ

Пользоваться калькулятором не разрешается. Вариант ОДВН – 14 – 04

1. Решить неравенство $\log_{x^2}(3-2x)>1$
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$$\begin{cases} 2-|x|\le|y|\le 6-|x| \\ 2|x|\le|y|\le 4|x| \end{cases}$$
3. Поручик Голицын родился в XIX веке. В 1901 году сумма цифр числа лет, прожитых им, равнялась сумме цифр года его рождения. В каком году родился поручик? Ответ должен быть обоснован.
4. Найти делитель и частное в делении, где звёздочки заменяют в задаче неизвестные цифры. Ответ должен быть обоснован.

```
 ****5 | **
-*7    |-----
 ---   | ***
  ***  |
 -***  |
 ----  |
    0  |
```

5. Найти все целые положительные числа x, произведение цифр которых равно $x^2-12x-24$.
6. Доказать, что для любого x выполняется неравенство: $\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x^2-8x+\frac{28}{3}\ge 0$
7. Дан квадрат со стороной 1см, в котором находятся 33 точки. Доказать, что расстояние между какими то двумя точками не превосходит числа 0,3 см.
8. Найдите все пары чисел (a, b), что при всех x верно равенство $a(\sin x-1)+b^2=\sin(ax+b^2)-1$

Очный тур

МИИТ

Пользоваться калькулятором не разрешается. Вариант ОДВН – 14 – 05

1. Решить неравенство $\dfrac{\log_5\left(35-x^3\right)}{\log_5(5-x)}>3$
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
   $\begin{cases} 4-2|x|\le|y|\le 8-2|x| \\ \quad |x|\le|y|\le 2|x| \end{cases}$
3. Два друга Фома Большой и Фома Маленький наловили рыбы и продали ее на базаре. У Фомы Большого в улове оказались одни коропы, а у Фомы Маленького, по странной случайности, одни караси. Фома Большой продавал рыбу по 10 руб. за штуку, а Фома Маленький по 7 руб. В итоге друзья выручили 230 рублей. Сколько штук рыбы продал первый рыбак, а сколько второй, если общее количество рыбы было меньше 28 штук?
4. Восстановить цифры в умножении, где звездочки заменяют в задаче неизвестные числа. В ответе указать эти числа и обосновать ответ.

```
   ***
   2**
  ----
  2**5
 **0
 -----
 83***
```

5. Найти все целые положительные числа x, произведение цифр которых равно $x^2-10x-36$.
6. Доказать, что для любого x выполняется неравенство: $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}-3x+\dfrac{81}{4}\ge 0$
7. В квадрате со стороной равной 4 см. лежат 17 точек. Доказать, что найдутся две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{2}$
8. Найдите множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство
   $ae^x+b=e^{ax+b}$

Решение.

Вариант 1.

1. ОДЗ $x < 2;\ x \neq 1$

$$\log_{2-x}\left(8-x^3\right) \geq \log_{2-x}(2-x)^3 \Leftrightarrow \left(8-x^3-(2-x)^3\right)(2-x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(1-x)\left(12x-6x^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1.$$ Ответ: $0 \leq x < 1$

2. Область симметрична относительно осей координат. Поэтому достаточно нарисовать и вычислить площадь в первой четверти. Тогда имеем: $2-x \leq y \leq 4-x,\ \ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x$.

Получим трапецию $ABCD$, чьи стороны заданы уравнениями

$y = 4-x,\ \ y = 2-x,\ \ y = \frac{x}{2},\ \ y = 2x$ (см. рисунок). Находим координаты вершин трапеции: $A\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$, $B\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$, $D\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ и длины сторон: $OA = OB = \frac{4}{3}\sqrt{5}$,

$OD = OC = \frac{2}{3}\sqrt{5}$, где O – начало координат. Пусть $\angle AOB = \varphi$. Тогда $S_{ABCD} = S_{AOB} - S_{ODC}$.

По формуле $tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ находим, что $tg\varphi = \frac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$, где k_2 и k_1 угловые коэффициенты прямых OA и OB. Зная $tg\varphi$, находим, что $\cos^2\varphi = \frac{16}{25}$, отсюда

$\sin^2\varphi = \frac{9}{25}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. А тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{80}{9}-\frac{20}{9}\right) = 2$. Следовательно искомая площадь равна $4 \cdot 2 = 8$. Ответ: $\{8\}$

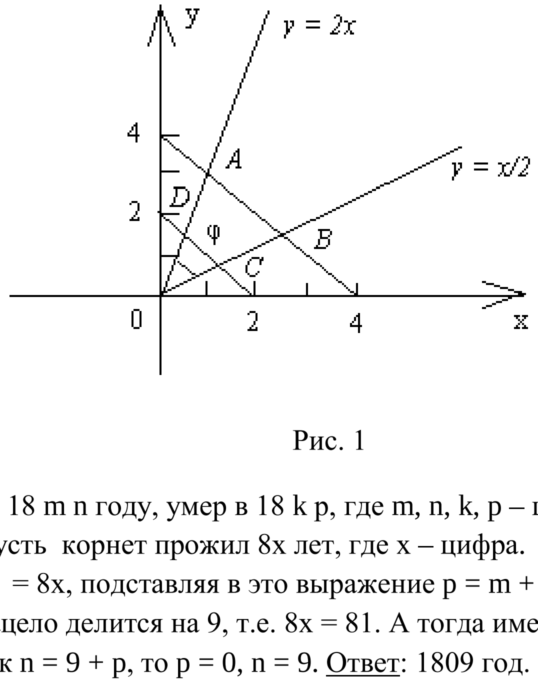


Рис. 1

3. Пусть корнет родился в 18 m n году, умер в 18 k p, где m, n, k, p – цифры. По условию имеем: m + n = k + p. Пусть корнет прожил 8x лет, где x – цифра.
Тогда 10k + p – 10m – n = 8x, подставляя в это выражение p = m + n – k, получим 9k – 9m = 8x, следовательно 8x нацело делится на 9, т.е. 8x = 81. А тогда имеем k = m + 9 $\Rightarrow$ k = 9, m = 0. И наконец так как n = 9 + p, то p = 0, n = 9. Ответ: 1809 год.

4. Записывая равенство в столбик, получим:

```
 *9*
  11
─────        рис.1
 *9*
*9*
─────
***1*
```

В этом равенстве нужно определить десять цифр. Занумеруем их сверху вниз. Так как в делимом четвертая цифра дана 1, то вторая и шестая цифры – 2, а тогда седьмая – единица и четвертая также двойка. А тогда имеем:

```
  *92
   11
 ————
  *92
 *92
 ————
1**12
```

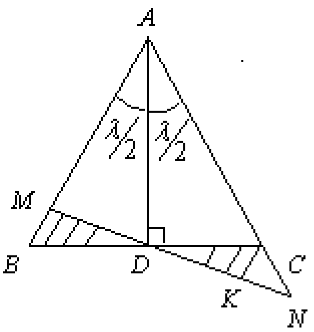
рис.2

Из рис.2 видно, что первая, вторая и третья звездочки определяют одно и то же число. Обозначим это число x. Так как x + 9 + 1 есть двузначное число, то его первая цифра равна 1, т.е. x = 9. А тогда делимое есть 10912, а частное 992. Ответ: 10912, 992.

5. Так как для всякого положительного числа произведение его цифр не превосходит это число, то имеем систему неравенств $\begin{cases} x^2-10x-22>0 \\ x^2-10x-22\le x \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-10x-22>0 \\ x^2-11x-22\le 0 \end{cases}$. Корни первого неравенства будут: $x=5\pm\sqrt{47}$, второго $x=\dfrac{11\pm\sqrt{209}}{2}$, отсюда следует, что $5+\sqrt{47}<x\le\dfrac{11+\sqrt{209}}{2}$. А тогда имеем, что $11{,}5<x<13$. Так как x – целое число, то x = 12. Проверка показывает, что 12 удовлетворяет условию задачи. Ответ: {12}

6. Докажем, что для любого числа x выполняется неравенство: $2x^4+4x^2-16x+11>0$. Для функции $f(x)=2x^4+4x^2-16x+11$ ее производная равна: $f'(x)=8x^3+8x-16$. Находим критические точки: $8x^3+8x-16=0$, $x^3+x-2=0$, $x^3-1+x-1=0,\ (x-1)(x^2+x+2)=0$. Получаем единственную критическую точку x = 1. По знаку производной определяем, что x = 1 точка минимума. В этой точке $y_{\min}=2+4-16+11=1>0$. А тогда наше неравенство выполняется для всех x.

7.



Пусть $\angle A=\lambda\ge 60^\circ$ наибольший угол в треугольнике, *AD* > 1 его биссектриса. Проведём через точку *D* прямую перпендикулярную *AD* и пересекающую стороны угла *A* в точках *B* и *C*. Покажем, что ΔABC минимальной площади. Так как биссектриса $AD\perp BC$, то $AB=AC$ и $S_{ABC}=BD\cdot AD=AD^2 tg\,\lambda/2>1\cdot tg30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Проведём через точку *D* какую либо прямую, пересекающую стороны угла в точках *M* и *N*. Пусть для определенности *MD* < *DN*. Тогда, если из т. *C* провести прямую $CK\parallel AB$, то $S_{BMD}=S_{DCK}$ и следовательно $S_{MAN}>S_{ABC}$, что и требовалось доказать.

8. Пусть (*a*,*b*) пара чисел, удовлетворяющих условию задачи. Тогда равенство справедливо для любого *x*, в том числе для $x=\pi$, и $x=2\pi$. Подставляя эти значения *x*, получим систему $\begin{cases} -2a+b^2=Cos(\pi a+b^2)-1 \\ b^2=Cos(2\pi a+b^2)-1 \end{cases}$ Из второго равенства следует, что $b^2\le 0$, т.е.

$b=0,$ а тогда $Cos2\pi a=1\Leftrightarrow a=n\in N\cup\{0\}.$ Из первого равенства получаем $Cos\pi a=1-2a\Rightarrow -1\le 1-2a\le 1\Leftrightarrow 0\le a=n\le 1.$ Следовательно, необходимым условием задачи удовлетворяют только две пары чисел $a=0,b=0$ и $a=1,b=0.$ Проверим, что для этих пар равенство удовлетворяется для всех x. При $a=b=0$ имеем $Cos0=1,$ что верно. При $a=1$ и $b=0$ получим $Cosx=Cosx,$ что также верно.

Ответ: (0;0), (1;0).

Вариант 2.

1. ОДЗ $x > -2$; $x \neq -1$

$\log_{2+x}\left(8+x^3\right)\le\log_{2+x}(2+x)^3\Leftrightarrow\left(8+x^3-(2+x)^3\right)(2+x-1)\le 0\Leftrightarrow x(x+2)(x+1)\le 0\Rightarrow.$

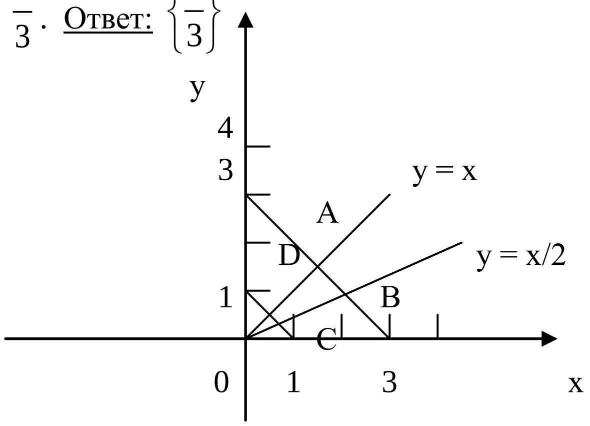
Ответ: $-2<x<-1;\ x\ge 0$

2. Фигура симметрична относительно осей координат. Поэтому построим область в первой четверти. Тогда имеем: $\begin{cases}\frac{x}{2}\le y\le x\\ 1-x\le y\le 3-x\end{cases}$. Так как прямые $y=3-x$ и $y=1-x$ параллельны, то область будет трапецией $ABCD$,стороны которой будут отрезки прямых $y=\frac{x}{2},\ \ y=x,\ \ y=1-x,\ \ y=3-x$. Построив эти прямые, найдем координаты вершин трапеции: $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $B(2,\ 1)$, $C\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Пусть O – начало координат, α – угол между прямыми ОА и ОВ. Тогда $tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$. Отсюда находим, что $\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$ и следовательно $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. Строим область (см. рис).

Находим $OA=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $OD=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $OB=\sqrt{5}$, $OC=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Отсюда $S_{ABCD}=S_{OAB}-S_{ODC}=$

$\frac{1}{2\sqrt{10}}\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)=\frac{2}{3}$

А тогда вся площадь равна $\frac{8}{3}$. Ответ: $\left\{\frac{8}{3}\right\}$



3. Пусть год рождения князя 17 m n, год смерти 17 k p, где m, n, k, p – цифры. По условию: m + n + 1 = k + p, 10k + p – 10m – n = 7x, где x – цифра. Подставляя p = m + n + 1 – k во второе равенство, получим: 10k + m + n + 1 – k – 10m – n = 7x $\Leftrightarrow$ 9k – 9m = 7x – 1 $\Rightarrow$ 7x – 1 делится на 9. это будет лишь при x = 3, т.е. князь прожил 73 года, но тогда k = m + 8. Так как k, m, цифры, то это равенство возможно лишь при m = 0, k = 8 или m = 1, k = 9. В первом случае год рождения 170 n, год смерти 178 p, во втором случае год рождения 171 n, год смерти 179 p. А тогда получим, что n = 7 + p. Следовательно $n \in \{7,8,9\}, \quad p \in \{0,1,2\}$. А тогда при p = 0, n = 7 получим даты (1707, 1780), (1717, 1790), при p = 1, n = 8: (1708, 1781), (1718, 1791), p = 2, n = 9: (1709, 1782) и (1719, 1792). По условию задачи подходит год рождения князя 1718, год смерти 1791 (1791 нечетное число, делящееся на 9)

Ответ: {1718}

4. Занумеруем все числа по порядку сверху вниз, чисел будет 22, из них известных 11. А тогда, очевидно, что последнее число будет равно 2. Так же очевидно, что число с номером 16 будет равно 2, а число с номером 9 равно 7. Следовательно в результате умножения у нас получится число 768668. По числу 18784 находим, разделив его на 2, что первый множитель равен 9374, второй – 82. Ответ: 9374 и 82.

5. Так как для всякого положительного числа произведение его цифр не превосходит это число, то получаем систему двух неравенств: $\begin{cases} x^2 - 15x - 10 > 0 \\ x^2 - 16x - 10 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

корни $x^2 - 15x - 10 = 0$ будут $x = \dfrac{15 \pm \sqrt{265}}{2}$

корни $x^2 - 16x - 10 = 0$ будут $x = 8 \pm \sqrt{74}$

$\Rightarrow \dfrac{15 + \sqrt{265}}{2} < x \le 8 + \sqrt{74} \Rightarrow 15{,}5 < x < 17 \Rightarrow x = 16$.

Сделаем проверку: 256 – 240 – 10 = 6 > 0 Ответ: {16}

6. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{5}{24} + \dfrac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \dfrac{7}{3}x^3 - x$. Покажем, что $f(x) > 0$ для любого x. Найдем производную этой функции. $f'(x) = 6x^3 + 4x - 7x^2 - 1$. Находим корни производной: $6x^3 + 4x - 7x^2 - 1 = 0$. Так как $y'(0) = -1, \; y'(1) = 2$, то в силу непрерывности производной, находим, что один корень лежит в промежутке (0, 1). Проверяя число $x = \dfrac{1}{2}$, убеждаемся, что это корень. Деля уголком $6x^3 + 4x - 7x^2 - 1$ на

$x-\frac{1}{2}$, получим $6x^3+4x-7x^2-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(6x^2-4x+2\right)$. Квадратный трехчлен не имеет корней, т.к. D < 0. Значит $x=\frac{1}{2}$ единственный корень производной. Так как производная в точке $x=\frac{1}{2}$ меняет знак с минуса на плюс, то в т. $x=\frac{1}{2}$ $f(x)$ имеет минимум. Находим: $f_{\min}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{16}-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{24}=\frac{3}{32}-\frac{1}{12}=\frac{1}{96}>0$. Следовательно в любой точке $f(x)>0$, что и требовалось доказать.

7. Разобьем квадрат двумя прямыми на четыре равных квадрата. Так как в квадрате лежит 5 точек, то какие – то две точки будут лежать в одном из полученных квадратов. Так как диаметр такого квадрата будет равен $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то расстояние между этими двумя точками и будет меньше или равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$, что и требовалось доказать.

8. Так как уравнение выполняется для всех x, следовательно и при x = 0. Отсюда получаем: $\sin b=b$. Это уравнение имеет единственное решение b = 0. Докажем это. Рассмотрим функцию $f(x)=x-\sin x$. $f'(x)=1-\cos x\geq 0$, поэтому $f(x)$ возрастает. Если b = 0, то $f(b)=0-\sin 0=0$ и b = 0 единственное решение. Итак, необходимое условие b = 0. В этом случае равенство принимает вид: $\sin ax=a\sin x$. Подставим $x=\frac{\pi}{2}$, получим $\sin\frac{a\pi}{2}=a$, поэтому $|a|\leq 1$. При $a=\pm 1,\ \ b=0$ равенство выполняется. Также это равенство верно и при $a=0,\ \ b=0$. Пусть $0<|a|<1$. Тогда подстановка $x=\frac{\pi}{2a}$ приводит к равенству $\sin\frac{\pi}{2}=a\sin\frac{\pi}{2a}\Leftrightarrow 1=a\sin\frac{\pi}{2a}$, которое невозможно при $0<|a|<1$. Ответ: $a=\pm 1,\ \ b=0$; $a=0,\ \ b=0$

Вариант 3

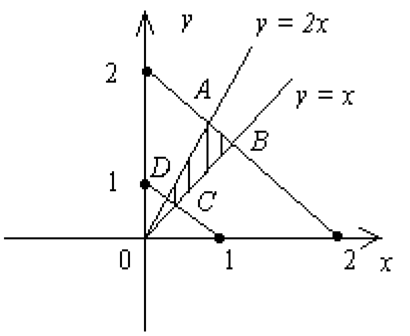
1. ОДЗ $\begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ \dfrac{2-3x}{x-6}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<x<1; \quad 1<x<6.$ $\quad \log_x \dfrac{8-12x}{x-6} \geq \log_x x^2 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{8-12x}{x-6}-x^2\right)(x-1)>0 \Leftrightarrow \frac{(8-12x-x^3+6x^2)(x-1)}{x-6}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^3(x-1)}{x-6}<0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x-2)(x-6)<0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}<x<1; 2<x<6.$$

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(2,6)$

2. Область симметрична относительно осей координат. Поэтому достаточно найти площадь этой фигуры в I четверти и умножить полученное число на 4. Это и будет площадь всей фигуры. В первой четверти область задается неравенствами: $1-x \leq y \leq 2-x, \quad x \leq y \leq 2x.$ Так как прямые $y=2-x$ *и* $y=1-x$ параллельны, а прямые $y=x$ *и* $y=2x$ проходят через начало координат, то область будет трапеция *ABCD* (см. рисунок ниже).



Находим координаты точек: $A(\frac{2}{3},\frac{4}{3}), \quad D(\frac{1}{3},\frac{2}{3}), \quad C(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), \quad B(1,1)$. Тогда α угол между прямыми *OA* и *OB*. Тогда $tg\alpha=\dfrac{2-1}{1+2}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow Cos^2\alpha=\dfrac{9}{10}, Sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}.$ Отсюда

$$S_{ABCD}=S_{OAB}-S_{ODC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(OA\cdot OB-OD\cdot OC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{10}}\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)=\frac{1}{4}.$$

А тогда Ответ: {1}

3. Пусть Чичиков купил m пудов меда и n пудов пеньки. По условию задачи получаем $12m+10n=44 \Rightarrow 5n=2(11-3m).$ Так как n, m натуральные числа и 2 не делится на 5, то число $11-3m$ должно делиться на 5. Но это возможно лишь при $m=2$, а тогда и $n=2$. Ответ: куплено 2 пуда меда и 2 пуда пеньки.

4. Единиц второго сомножителя может быть или 1 или 6, но так как произведение 1 на трёхзначное число не дает четырёхзначного, то второй сомножитель 236. А тогда десятков в первом сомножителе или 0 или 5. Покажем, что десятков 0. Если бы было 5, то получилось бы число:

$$\begin{array}{r} *54 \\ \underline{236} \\ **24 \\ 1*62 \\ \underline{1*08} \\ 11**44 \end{array}$$

Но число сотен в первом сомножителе равно нулю, что невозможно. Таким образом, второе число 236, а первое *04.
Снова заметим, что в числе 1*08 на втором месте должен стоять нуль, а тогда в числе *04 первая цифра равна 5. <u>Ответ</u>: 504 и 236.

5. Так как произведение цифр любого числа не больше самого положительного числа, то получаем систему двух неравенств

$\begin{cases} x^2-10x-10>0 \\ x^2-10x-10\le x \end{cases}$ Решая эти системы, получим $5+\sqrt{35}<x\le\dfrac{11+\sqrt{161}}{2}$. А тогда находим, что $10{,}9<x<12$. Отсюда следует, что $x = 11$. Проверка показывает, что это число удовлетворяет условиям задачи. <u>Ответ</u>: {11}.

6. Рассмотрим функцию $y(x)=\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{2x^5}{5}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{28}{5}$. Находим её производную: $y'=x^5-2x^4+x^3-2x^2+x-2$. Найдём нули производной: $x^5-2x^4+x^3-2x^2+x-2=0$ $\quad x^5+x^3+x-2(x^4+x^2+1)=0$,
$x(x^4+x^2+1)-2(x^4+x^2+1)=0$ $\quad (x^4+x^2+1)(x-2)=0\Rightarrow x=2$ единственный корень, т.к. $x^4+x^2+1>0$ для любого x. В точке $x = 2$ y' меняет знак с минуса на плюс. Так как функция непрерывна везде, то в точке $x = 2$ имеем минимум. Находим этот минимум:

$$f_{\min}=f(2)=\frac{2^6}{6}-\frac{2^6}{5}+4-\frac{16}{3}+2-4+\frac{28}{5}=\frac{32}{3}-\frac{2^6}{5}+2-\frac{16}{3}+\frac{28}{5}=\frac{16}{3}-\frac{36}{5}+2=\frac{2}{15}>0$$

Так как $f_{\min}(x)>0$, то для всех x $f(x)>0$.

7. Известно, что из всех выпуклых многоугольников с одним и тем же периметром, правильный имеет наибольшую площадь. Тогда если S площадь правильного выпуклого шестиугольника со стороной меньше 1, то его площадь $S<\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, где $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

площадь правильного шестиугольника со стороной равной 1. Покажем, что $\frac{3}{2}\sqrt{3} < 2{,}6$.

Пусть $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} \vee 2{,}6\right) \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\cdot 3 \vee 6{,}76\right) \Leftrightarrow (27 \vee 27{,}04) \Rightarrow 27 < 27{,}04$, что и требовалось доказать.

8. Введём обозначения $f_1(x) = a\ln x + b$ $\quad f_2(x) = \ln(ax+b)$. Так как $f_1(x) = f_2(x)$, то производные этих функций должны совпадать: $\frac{a}{x} = \frac{a}{ax+b}$. Из этого равенства при $a > 0, b \geq 0$ следует, что $\frac{1}{x} = \frac{1}{ax+b}$ или $ax + b = x$ для всех $x > 0$. Но тогда $a = 1$, $b = 0$.

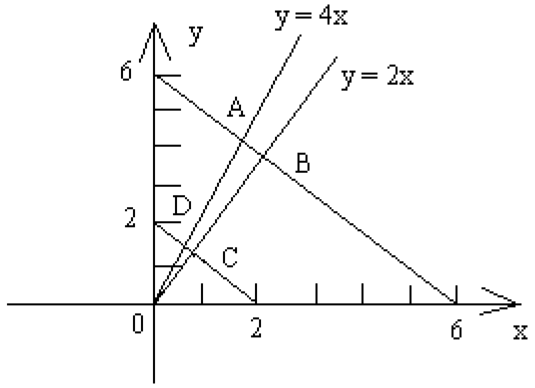
Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $a = 1$, $b = 0$ равенство выполняется для всех $x > 0$. Ответ: (1;0)

Вариант 4.

1. ОДЗ $x \neq 0$; $x \neq \pm 1$, $x < \frac{3}{2}$

$$\log_{x^2}(3-2x) > \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow (3-2x-x^2)(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow (x^2+2x-3)(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(x+1)(x-1)(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$ Ответ: $-3 < x < -1$

2. Фигура симметрична относительно осей координат. Поэтому достаточно найти площадь области, лежащей в первой четверти. Тогда в первой четверти имеем: $2 - x \leq y \leq 6 - x$, $2x \leq y \leq 4x$. Так как прямые $y = 6 - x$ и $y = 2 - x$ параллельны, то область будет трапецией *ABCD*, где *AB* || *CD*. Находим координаты вершин трапеции: $A(1{,}2,\ \ 4{,}8)$, $B(2,\ \ 4)$, $C\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $D(0{,}4,\ \ 1{,}6)$. Находим $AO = \frac{6}{5}\sqrt{17}$, $OB = 2\sqrt{5}$, $OC = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, $OD = \frac{2}{5}\sqrt{17}$. Нарисуем область.



Пусть α – угол между прямыми OA и OB. Тогда

$$tg\alpha = \frac{4-2}{1+8} = \frac{2}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{4}{81}} = \frac{81}{85},\ \sin^2\alpha = \frac{4}{85},\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{85}}.$$

А тогда $S_{ABCD} = S_{OAB} - S_{ODC} =$

$$\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{85}}\left(\frac{6\sqrt{17}}{5}\cdot 2\sqrt{5}-\frac{4}{10}\sqrt{17}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{85}}\sqrt{85}\left(\frac{12}{5}-\frac{4}{15}\right)=\frac{32}{15}$$

$S_{обл} = 4\cdot\frac{32}{15}=\frac{128}{15}$

Ответ: $\frac{128}{15}$

3. Пусть поручик родился в 18 m n году. По условию задачи в 1901 году сумма цифр числа лет, прожитых им, равнялась сумме цифр года рождения. Поэтому получим равенство: k + p =9 + m + n , где kp – количество лет, которые прожил поручик, здесь m, n, k, p – цифры. Рассмотрим последовательно случаи, когда: p = 0, p = 1, p$\geq$ 2. Если p = 0, то k = 9 + m + n $\Rightarrow$ k = 9, m, n = 0. Тогда поручик прожил 90 лет, а родился в 1811 г. Но в этом случае сумма цифр 1 + 8 + 2 = 11 $\neq$ 9, т.е. условие задачи не выполняется. Пусть p = 1, тогда k = 8 + m + n, следовательно k = 8 или k = 9. Значит поручик прожил лиюо 81, либо 91 год. В первом случае условие задачи не выполняется (год рождения 1820, сумма цифр 11 $\neq$ 9), во втором случае к 1901 году поручик прожил 91 год, значит родился в 1810. Условия задачи выполнены. И, наконец, если p$\geq$ 2, тогда год рождения поручика 18 9-k 11-p, где 9-k, 11-p – цифры. Сумма цифр года рождения будет равна 29 – k – p и следовательно 29 – k – p = k + p $\Rightarrow$ 29 = 2 (k + p), что невозможно, т.к. 29 нечетное число. Таким образом, ответ: 1810

4. Из первого вычитания *** – *7 = * вытекает, что *7 + * = *** - число трехзначное, что возможно только если *7 = 97; тогда сумма *** = 10*. Произведение делителя ** на первую цифру частного равно 97; но 97 – простое число и поэтому единственно возможным здесь будет: делитель ** = 97, а первая цифра частного – 1. Из схемы деления видно, что вторая цифра частного – 0. Произведение делителя 97 на последнюю цифру частного оканчивается цифрой 5, что возможно только, если последняя цифра частного – 5. Ответ: 97, 105.

5. Для всякого положительного числа x произведение цифр числа не превосходит само число. Поэтому получим систему неравенств $\begin{cases} x^2-12x-24>0 \\ x^2-12x-24\leq x \end{cases}$ находим корни:

$x = 6\pm\sqrt{60}$

$x=\frac{13\pm\sqrt{265}}{2}$ А тогда получим неравенство:

$6+\sqrt{60}<x\leq\frac{13+\sqrt{265}}{2}\Rightarrow 13{,}7<x<14{,}7.$ Так как x – целое число, то x = 14. Проверка показывает, что это число удовлетворяет условиям задачи. Ответ : {14}.

6. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x^2-8x+\frac{28}{3}$. Находим её производную: $f'=x^3-2x^2+4x-8=x^2(x-2)+4(x-2)=(x-2)(x^2+4)\Rightarrow f'(x)=0$ при x = 2. В точке x = 2 имеем минимум. Находим $f_{\min}=\frac{16}{4}-\frac{2}{3}\cdot 8+8-16+\frac{28}{3}=0.$ А тогда $f(x)\geq 0.$

ч.т.д.

7. Разобьём данный квадрат на 16 равных квадратов со стороной $\frac{1}{4}$. Тогда в какой-то квадрат попадёт, по крайней мере, не меньше трёх точек. Разобьём этот квадрат с тремя точками на два равных прямоугольника. Так как в данном квадрате лежит 3 точки, то в каком-то из прямоугольников будет находиться две точки. Но диагональ прямоугольника со сторонами $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$ равна $\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{8}$, отсюда расстояние между этими двумя точками будет не больше, чем $\frac{\sqrt{5}}{8}$. Но $\frac{\sqrt{5}}{8}<\frac{2,4}{8}=\frac{24}{80}=0,3$, отсюда расстояние между 2 точками меньше 0,3. Что и требовалось доказать.

8. Так как уравнение выполняется для всех x, то при $x=\pi/2$ получаем:

$b^2=Sin\left(\frac{a\pi}{2}+b^2\right)-1\Rightarrow$ что правая часть неположительна, а левая неотрицательна, значит равенство возможно лишь при b = 0. Следовательно получим равенство $a(Sinx-1)=Sinax-1.$ Полагая в равенстве x = 0, получим: -a = -1, т.е. a = 1. Таким образом, необходимые условия будут a = 1, b = 0. Покажем, что при этих a и b равенство выполняется для всех x. Действительно: $Sinx-1=Sinx-1.$

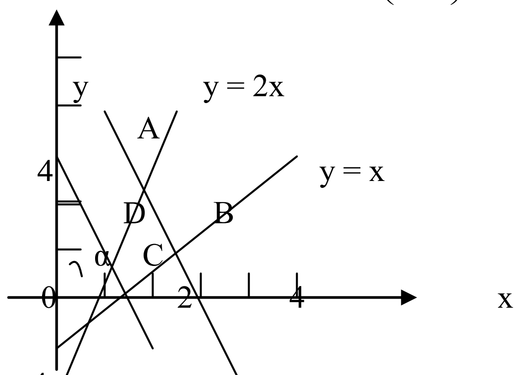
Ответ: (1,0)

Вариант 5.

1. ОДЗ 5 – x > 0, 5 – x ≠ 1 $\quad 35-x^3>0 \Rightarrow x<\sqrt[3]{35}$

$$\log_{5-x}\left(35-x^3\right)>\log_{5-x}(5-x)^3 \Leftrightarrow \left(35-x^3-(5-x)^3\right)(5-x-1)>0 \Leftrightarrow$$
$\left(x^2-5x+6\right)(x-4)>0 \Rightarrow$ <u>Ответ:</u> $2<x<3$

2. Фигура симметрична как относительно оси Ox, так относительно оси Oy. Поэтому достаточно вычислить площадь в первой четверти. В первой четверти имеем:
$\begin{cases} 4-2x\le y\le 8-2x \\ x\le y\le 2x \end{cases}$. Так как прямые $y=8-2x$ и $y=4-2x$ параллельны, а прямые y = x и y = 2x проходят через начало координат, то площадь фигуры есть площадь трапеции $ABCD$ (см.рис.). Находим координаты точек: $A(2\quad 4)$, $B\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, $D(1,\quad 2)$.



А тогда О$A = 2\sqrt{5}$, $OB = \frac{8}{3}\sqrt{2}$, $OC = \frac{4}{3}\sqrt{2}$, $OD = \sqrt{5}$. Пусть α – ∠AOB. Тогда

$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$, где $k_2=2,\quad k_1=1$. Отсюда $tg\alpha=\frac{1}{3}$. Поэтому $\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{10}}$.

А тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\sqrt{5}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{2}-\sqrt{5}\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)=2$. А тогда и площадь всей области равна 8. <u>Ответ:</u> {8}

3. Пусть Фома Большой наловил m штук, а Фома Маленький n штук. По условиям задачи имеем уравнение 10m + 7n = 230, отсюда 7n = 10◌(23 – m). Так как 10 не делится нацело на 7, то 23 – m должно нацело делиться на 7. Из чисел вида 23 – m на 7 делятся числа 7, 14, 21. Значит m $\in\{2,\quad 9,\quad 16\}$. А тогда n = $\{30,\quad 20,\quad 10\}$. Но по условию общее количество пойманной рыбы было меньше 28, следовательно Фома Большой поймал 16 коропов, а Фома Маленький – 10 карасей.

<u>Ответ:</u> 16 коропов, 10 карасей.

4. Из записи умножения видим, что во втором множителе цифра десятков равна 0, первый множитель заканчивается на 5, значит последняя цифра второго множителя либо 5, либо 7 (цифра 1 не может быть, так как число 2 * * 5 – четырехзначное). Далее: так как 2 + * = 3, то это возможно лишь при * = 1, а значит число десятков в первом числе равно нулю. Отсюда уже следует, что число сотен в первом числе должно

быть 4. Следовательно возможны два варианта ответа: числа 405, 205 или 405, 207.

5. Так как произведение цифр любого положительного числа не больше, чем само число, то получим систему двух неравенств $\begin{cases} x^2 - 10x - 36 > 0 \\ x^2 - 10x - 36 \le x \end{cases}$ находим корни квадратных трехчленов: $x = 5 \pm \sqrt{61}$ и $x = 11 \pm \sqrt{265}$. А тогда получим неравенство: $5 + \sqrt{61} < x \le \dfrac{11 + \sqrt{265}}{2}$. Из этого неравенства получим $12{,}8 < x < 13{,}65 \Rightarrow$ x = 13.

Ответ : {13}.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} - 3x + \dfrac{81}{4}$. Находим, что $f'(x) = x^3 - 5x - x^2 - 3$. Число

x = -1 является корнем этого уравнения. Деля уголком получим:
$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x^2 - 2x - 3) = (x+1)^2(x-3)$. Отсюда следует, что функция в точке x = 3 имеет минимум. Находим
$f(3) = \dfrac{81}{4} - 9 - \dfrac{45}{2} - 9 + \dfrac{81}{4} = \dfrac{81}{2} - 18 - \dfrac{45}{2} = 18 - 18 = 0$, т.е. наименьшее значение функции равно нулю. А тогда $f(x) \ge 0$ всюду, что и требовалось доказать.

7. Разобьём квадрат на четыре равных квадрата со стороной 2 см. Тогда в каком-то квадрате будет 5 точек. Разобьём снова этот квадрат на четыре квадрата со стороной 1 см. Тогда в какой-то из этих квадратов попадёт 2 точки. Диагональ квадрата со стороной 1 см. равна $\sqrt{2}$. Поэтому расстояние между двумя точками не превосходит $\sqrt{2}$. Что и требовалось доказать.

8. Пусть $f(x) = ae^x + b, \quad \varphi(x) = e^{ax+b}$. Так как $f(x) = \varphi(x)$, то $f'(x) = \varphi'(x)$.

Получим: $ae^x = ae^{ax+b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ e^x = e^{ax+b} \Rightarrow ax + b = x, \quad т.е. \ \mathrm{b} = 0, \ \ \mathrm{a} = 1. \end{array}\right.$

Покажем, что при a = 1, b = 0 равенство выполняется для всех x. Имеем: $e^x = e^x$, что верно для любого x. Если же a = 0, то получим, что $b = e^b$. Покажем, что это равенство невозможно. Рассмотрим функцию $r(x) = e^x - x$. При $x \le 0$ очевидно $r(x) > 0$. Если же x > 0, $r'(x) = e^x - 1 > 0$, т.е производная положительна, значит $r(x)$ строго возрастает и так как $r(0) = 1$, то $r(x) > 1$.

Ответ: a = 1, b = 0