Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Олимпиада по математике «Паруса Надежды» 2014 год.
Отборочный тур
Вариант 1

1. Петя, Володя и Коля совершили дерзкий набег на чужой сад, так что у Пети за пазухой оказалось в целое число раз больше яблок, чем у Володи, а у Коли во столько же раз больше чем у Пети. Затем Петя и Коля отдали Володе по 2 яблока, после чего полученное количество яблок у ребят составило арифметическую прогрессию. Сколько яблок было у ребят первоначально после набега? В ответе указать сумму всех похищенных яблок.

2. Найти произведение корней уравнения
$$(x-1)\log_3 x = \frac{x+1}{2}$$

3. Дан треугольник ABC, AB = 4, BC = 5, AC = 6. На стороне BC взята точка K так, что BK = $\frac{1}{2}$. На стороне AC взята точка M так что CM = $\frac{27}{8}$. Найти расстояние d между центрами окружностей , описанных вокруг треугольников ABK и AKM. В ответе указать число равное 4d.

4. Найти наименьшее значение *x,* удовлетворяющее уравнению
$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+|x-3|+|x+3|+...+|x-10|+|x+10|=20x$$

5. Найти все целые n, при которых справедливо равенство $\frac{n^2+4n+10}{n+3}=8-2\sqrt{13-3n}$

6. Дано $\cos x\cos y\cos z=m,\qquad \sin x\sin y\sin z=n$, где m, n произвольные действительные числа. Найти $\cos 2x\cos 2y+\cos 2y\cos 2z+\cos 2x\cos 2z$.

   В ответе записать значение этого выражения при $m=\frac{\sqrt{3}}{4},\;\; n=\frac{1}{4}$.

7. Найти все рациональные решения системы:
$$\begin{cases} a+c=5 \\ ad+bc=5 \\ ac+b+d=8 \\ bd=1 \end{cases}$$
   В ответе записать сумму всех решений данной системы.

8. При каких значениях параметра *a* множество значений функции $y=\frac{16x-20}{4x^2-a}$ не содержит ни одного значения из отрезка [1;4]. В ответе указать наибольшее натуральное *a*, удовлетворяющее условию задачи.

9. Найти целую часть числа $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}}}$

Вариант 2

1. У Маши в целое число раз больше игрушек, чем у Лены, а у Лены во столько же раз больше, чем у Кати. Маша подарила Лене 3 игрушки, а Катя подарила Лене 2 игрушки. После чего количество игрушек у девочек стало составлять арифметическую прогрессию. Сколько первоначально игрушек было у каждой девочки? В ответе указать общее число игрушек, которое было у девочек.

2. Найти произведение корней уравнения
$$(3x-3)\log_2 x = x+1$$

3. Дан треугольник PEF со сторонами PE = 3, PF = 5, EF = 7. На продолжении стороны FP за точку P отложен отрезок PA = 1,5. Найти расстояние d между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников EPA и EAF. В ответе указать число, равное 2d.

4. Найти минимальное значение суммы
$$\left|x-1^2\right|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+\left|x-10^2\right|$$

5. Найти все целые *n*, при которых справедливо равенство $\frac{n^2+3n+5}{n+2}=1+\sqrt{6-2n}$

6. Решить систему
$$\begin{cases} tg^3x+tg^3y+tg^3z=36 \\ tg^2x+tg^2y+tg^2z=14 \\ (tgx+tgy)(tgx+tgz)(tgy+tgz)=60 \end{cases}$$
В ответе указать сумму минимального и максимального tgx, являющегося решением системы.

7. Решить систему
$$\begin{cases} a+c=4 \\ ad+bc=5 \\ ac+b+d=8 \\ bd=1 \end{cases}$$
В ответе записать сумму всех решений данной системы.

8. При каких значениях параметра *a* множество значений функции $y=\frac{8x-20}{a-x^2}$ не содержит ни одного значения из отрезка [-4;-1] В ответе указать наибольшее натуральное *a*, удовлетворяющее условию задачи.

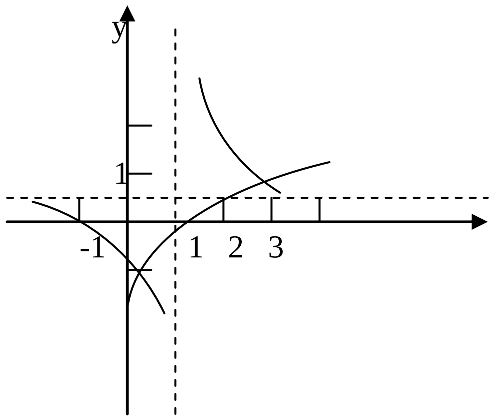
9. Найти целую часть числа $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$

Вариант 1.
Решение.

1. Пусть у Володи стало $x + 4$ яблок, $xк - 2$ у Пети и $xк^2 - 2$ у Коли, где $к$ натуральное число ≥ 2. По условию эти числа составляют арифметическую прогрессию неизвестно в каком порядке. Здесь возможны 3 варианта. Пусть $xк - 2$ среднее число в арифметической прогрессии. Тогда получаем, что $2xк - 4 = x + 4 + xк^2 - 2$. Отсюда $x\ (к^2 - 2к + 1) = -6$, что невозможно. Если $x + 4$ – среднее арифметической прогрессии, то в этом случае имеем
$2x + 8 = xк - 2 + xк^2 - 2$. Отсюда $x\ (к^2 + к - 2) = 12$. Так как $к \geq 2$, то $к^2 + к - 2 \geq 4$. Пусть $к = 4$, тогда $x = 3$ и число яблок у ребят 3, 6, 12, что удовлетворяет условию задачи. Если $к^2 + к - 2$ равно другому целому числу ≤ 12, то здесь возможны варианты, это числа 6 или 12. Но тогда квадратное уравнение $к^2 + к - 2 = 6$, или $к^2 + к - 2 = 12$ очевидно не имеет целых корней. И наконец, когда $xк^2 - 2$ среднее число арифметической прогрессии, то $2xк^2 - 4 = x + 4 + xк - 2$. Отсюда $x\ (2к^2 - к - 1) = 6$. Но тогда $2к^2 - к - 1$ может равняться только 6, но в этом случае целых решений нет. Следовательно у Володи 3 яблока, у Пети – 6 яблок, у Коли – 12 яблок. Ответ: {21}

2. ОДЗ $x > 0$. $x = 1$ не является корнем уравнения. Поэтому запишем, что $\log_3 x = \dfrac{x+1}{2(x-1)}$. Строим графики левой и правой части уравнения

По графику находим, что корни уравнения $\dfrac{1}{3}$ и 3. Так как на промежутках $0 < x < 1$ и $x > 1$ $\log_3 x$ монотонно возрастает, а функция $y = \dfrac{x+1}{2(x-1)}$ монотонно убывает, то других решений нет. Ответ: {1}



3. Проведём из вершины A высоту AD на сторону BC. Пусть BD = x. Тогда по теореме Пифагора можно написать два уравнения $AD^2 + x^2 = 16$ и $AD^2 + (5-x)^2 = 36$. Вычитая из второго уравнения первое, получим $(5-x)^2 - x^2 = 20$. Отсюда находим: $25 - 10x + x^2 - x^2 = 20 \Rightarrow x = 0{,}5$. Следовательно т. D совпадает с точкой K и AK есть высота на сторону BC. Проведём из точки K высоту KP на сторону AC. Пусть CP = y. По теореме Пифагора запишем: $y^2 + KP^2 = 4{,}5^2$
$KP^2 + (6-y)^2 = AK^2 = AB^2 - BK^2 = 16 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{63}{4}$. Вычитая из второго равенства первое, получаем $(6-y)^2 - y^2 = \dfrac{63}{4} - 4{,}5^2$. Отсюда $(6-2y)\cdot 6 = \dfrac{63}{4} - \dfrac{81}{4} \Rightarrow y = \dfrac{27}{8}$. Следовательно точка P совпадает с точкой M , т.е KM есть высота в треугольнике AKC. А тогда треугольники ABK и AKM прямоугольные, значит центры окружностей, описанных вокруг этих треугольников, лежат на серединах сторон AB и AK, т.е искомое расстояние равно $\dfrac{BK}{2} = \dfrac{1}{4}$. Ответ: {1}

4. Сумма всех подмодульных выражений равна:
$x - 1 + x + 1 + x - 2 + x + 2 + \ldots + x - 10 + x + 10 = 20x$, т.е равна правой части. Поэтому уравнение можно представить в виде: $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$. А тогда это равенство

возможно тогда и только тогда, когда все $a \ge 0$. Отсюда следует, что $x \ge 10$ будет решением этого уравнения. А тогда ответ: {10}

5. Поскольку при целых n число $8-2\sqrt{13-3n}$ может быть или целым или иррациональным, а число $\frac{n^2+4n+10}{n+3}=n+1+\frac{7}{n+3}$ является целым или рациональным, то равенство возможно лишь при условии, что $\frac{7}{n+3}$ является целым числом. Поэтому $n+3=\{-1;1;-7;7\}$. Отсюда $n=\{-4;-2;-10;4\}$. А тогда непосредственно находим, что $13-3n$ будет квадратом целого числа лишь при $n=\pm 4$. Проверкой убеждаемся, что исходному равенству удовлетворяет лишь $n=4$. Ответ {4}

6. Так как

$$m^2+n^2=\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z+\sin^2 x\sin^2 y\sin^2 z=$$

$$=\frac{1}{8}(1+\cos 2x)(1+\cos 2y)(1+\cos 2z)+\frac{1}{8}(1-\cos 2x)(1-\cos 2y)(1-\cos 2z)=$$

$$=\frac{1}{8}((1+\cos 2y+\cos 2x+\cos 2x\cos 2y)(1+\cos 2z)+(1-\cos 2y-\cos 2x+\cos 2x\cos 2y)(1-\cos 2z))=$$

$$=\frac{1}{8}(1+\cos 2y+\cos 2x+\cos 2x\cos 2y+\cos 2z+\cos 2z\cos 2y+\cos 2x\cos 2z+\cos 2x\cos 2y\cos 2z+$$

$$+1-\cos 2y-\cos 2x+\cos 2x\cos 2y-\cos 2z+\cos 2y\cos 2z+\cos 2x\cos 2z-\cos 2x\cos 2y\cos 2z)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 2x\cos 2y+\cos 2z\cos 2y+\cos 2x\cos 2z).$$

Отсюда: $\cos 2x\cos 2y+\cos 2z\cos 2y+\cos 2x\cos 2z=4(m^2+n^2)-1=4\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\right)-1=0$.

Ответ {0}

7. Рассмотрим многочлен четвертой степени относительно переменного x:
$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+x^3(c+a)+x^2(d+ac+b)+x(ad+bc)+bd==x^4+5x^3+8x^2+5x+1.$
Найдем корни этого многочлена. Непосредственно видим, что число $x=-1$ есть двухкратный корень этого многочлена. Поэтому $x^4+5x^3+8x^2+5x+1=(x+1)^2(x^2+3x+1)$ и значит $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=(x+1)^2(x^2+3x+1)$. Так как трехчлен x^2+3x+1 не имеет рациональных корней, то это означает, что либо $\begin{cases}x^2+ax+b=(x+1)^2\\ x^2+cx+d=x^2+3x+1\end{cases}$, либо $\begin{cases}x^2+ax+b=x^2+3x+1\\ x^2+cx+d=(x+1)^2\end{cases}$. А тогда для первой системы получаем, что $a=2,\ b=1,\ c=3,$ $d=1$; для второй системы $a=3,\ b=1,\ c=2,\ d=1$ (поскольку равенство многочленов означает равенство коэффициентов при соответствующих степенях). Ответ: {14}

8. Будем решать задачу от противного. Пусть a не есть искомое значение параметра. Это равносильно тому, что найдется хотя бы одно значение x_o, при котором значение функции $y=\frac{16x-20}{4x^2-a}$, будет принадлежать отрезку [1;4], что, в свою очередь, равносильно существованию хотя бы одного решения двойного неравенства:

$1\le y\le 4 \leftrightarrow (y-1)(y-4)\le 0$. То есть неравенство $\left(\frac{16x-20}{4x^2-a}-1\right)\left(\frac{16x-20}{4x^2-a}-4\right)\le 0 \leftrightarrow$

$\frac{(16x-20-4x^2+a)(16x-20-16x^2+4a)}{(4x^2-a)^2}\le 0$ должно иметь хотя бы одно решение. Но это неравенство имеет хотя бы одно решение при неотрицательности хотя бы одного из дискриминантов квадратных трехчленов в числителе и соответствующем взаимном расположении корней (если они существуют) всех трех квадратных трехчленов. Поэтому имеем: $\frac{(4x^2-16x-a+20)(16x^2-16x-4a+20)}{(4x^2-a)^2}\le 0 \leftrightarrow$

$$\frac{\left(x^2-4x-\frac{a}{4}+5\right)\left(x^2-x-\frac{a}{4}+\frac{5}{4}\right)}{\left(4x^2-a\right)^2}\le 0$$ Тогда дискриминант $Д = a - 4 \ge 0$, т.е. $a \ge 4$. И следовательно решением задачи будет бесконечный промежуток $a < 4$. А тогда ответ: a = 3.

9. Обозначим данное число через a. Очевидно, что $a > \sqrt{9}$ =3. Найдем оценку сверху для этого числа. Заменим в выражении для a последний радикал $\sqrt{12}$ на $\sqrt{16}$. Получим

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{16}}}}} = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+4}}} = \sqrt{12+\sqrt{12+4}} = \sqrt{16} = 4.$$

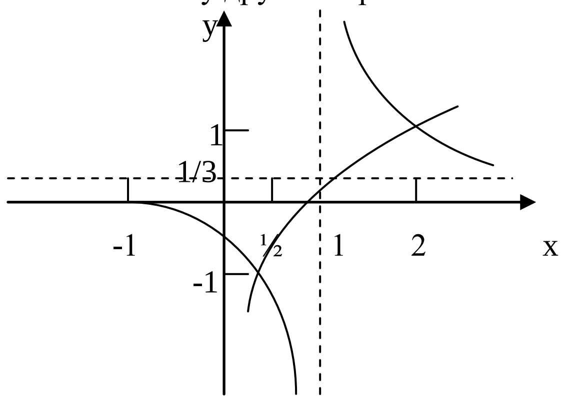
Итак 3 < a < 4. А тогда [a]=3. Ответ: 3.

Вариант 2.
Решение.

1. Пусть первоначально у Кати a игрушек, тогда у Лены $ка$, а у Маши $к^2a$, где $к$ - натуральное число ≥ 2. Стало: у Кати $a - 2$, у Лены $ак + 5$, у Маши $ак^2 - 3$. Тогда эти числа образуют арифметическую прогрессию неизвестно в каком порядке. Рассмотрим возможные варианты. Если $ак^2 - 3$ среднее число в арифметической прогрессии, то
$2ак^2 - 6 = а - 2 + ак + 5 \Rightarrow а\,(2к^2 - к - 1) = 9$. Но к ≥ 2, поэтому $2к^2 - к - 1 \ge 5$ и следовательно возможное равенство: $2к^2 - к - 1 = 9$. Это уравнение не имеет натуральных целых положительных корней. Если $ак + 5$ – среднее ($а - 2$ очевидно не может быть средним), то $2ак + 10 = а - 2 + ак^2 - 3$. отсюда $а\,(к - 1)^2 = 15$. Следовательно
$(к - 1)^2 \in \{1, 3, 5, 15\}$. Если $(к - 1)^2 = 1$, то $к = 2,\ а = 15 \Rightarrow$ 15, 30, 60 искомые числа. Если $(к - 1)^2 = 3$, то $к$ – нецелое. Аналогичное утверждение также и в других случаях. Таким образом, у Кати 15 игрушек, у Лены – 30, у Маши – 60. А тогда ответ: {105}

2. ОДЗ $x > 0$. Имеем: $\log_2 x = \frac{x+1}{3(x-1)}$. Строим на плоскости графики левой и правой части уравнения.

По графику находим, что корни уравнения числа $\frac{1}{2}$, 2. На промежутке
$0 < x < 1$ левая часть уравнения монотонно возрастает, а правая монотонно убывает. Аналогично и на промежутке $x > 1$. Поэтому других корней нет. Ответ: {1}



3. По теореме косинусов для угла EPF находим, что $CosEPF = -\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что угол EPF = 120°; значит смежный угол будет 60°. Проведём из т. E высоту ED на PF. Так как угол EPF тупой, то т. D будет лежать вне треугольника EPF. В прямоугольном треугольнике PED, PD лежит против угла 30°, значит PD = $\frac{1}{2}$ EP = 1,5. Следовательно т. D совпадает с т. A. Таким образом, имеем два прямоугольных треугольника: EAP и EAF. Центры окружностей, описанных вокруг этих треугольников, лежат на серединах соответствующих гипотенуз. Поэтому искомое расстояние будет равно средней линии треугольника EPF , т.е d = 2,5. А тогда ответ: {5}.

4. Группируя слагаемые, получим
$\left(\left|x-1^2\right|+\left|x-10^2\right|\right)+\left(\left|x-2^2\right|+\left|x-9^2\right|\right)+\left(\left|x-3^2\right|+\left|x-8^2\right|\right)+\left(\left|x-4^2\right|+\left|x-7^2\right|\right)+\left(\left|x-5^2\right|+\left|x-6^2\right|\right)$. Известно, что пара $|x-a|+|x-b|$ принимает минимальное значение при $a \le x \le b$ и это значение равно $|b-a|$. Следовательно минимальное значение первой скобки $\left(\left|x-1^2\right|+\left|x-10^2\right|\right)$ будет равно $10^2 - 1^2$, второй скобки соответственно $9^2 - 2^2$, третьей
$8^2 - 3^2$ и т.д. Но промежутки $5^2 \le x \le 6^2$, $4^2 \le x \le 7^2$,…являются вложенными друг в друга, так как числа $1^2 < 2^2 < 3^2 \ldots < 10^2$. Поэтому промежуток $[1, 10^2]$ содержит все другие промежутки, на каждом из которых все слагаемые вида $|x-a|+|x-b|$ одновременно принимают наименьшее значение. А тогда наше выражение принимает наименьшее значение, равное $10^2 - 1^2 + 9^2 - 2^2 + 8^2 - 3^2 + 7^2 - 4^2 + 6^2 - 5^2$, (т.е. сумме длин вложенных промежутков). Находим эту сумму: $11\cdot 9 + 11\cdot 7 + 11\cdot 5 + 11\cdot 3 + 11\cdot 1 = 11(9 + 7 + 5 + 3 + 1) = = 11\cdot 25 = 275$ Ответ: $\{275\}$

5. Имеем: $\frac{n^2+3n+5}{n+2}-1=\sqrt{6-2n}$; $\frac{n^2+2n+3}{n+2}=\sqrt{6-2n}$; $n+\frac{3}{n+2}=\sqrt{6-2n}$. Поскольку при целых n правая часть может быть или целым числом или иррациональным, а левая часть является целым числом или рациональным, то данное равенство возможно лишь при условии, что $\frac{3}{n+2}$ является целым числом. А тогда $n + 2 = \{-1;1;-3;3\}.\rightarrow n = \{-3;-1;-5;1\}$. А тогда находим, что $6 - 2n$ будет квадратом целого числа лишь при $n = -5$ и $n = 1$. Сделав проверку, получим, что только $n = 1$ будет решением исходного уравнения. Ответ $\{1\}$

6. Обозначим $tgx = x_1,\ \ tgy = x_2,\ \ tgz = x_3$.

Тогда $\begin{cases} x_1^3+x_2^3+x_3^3=36 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=14 \\ (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)=60 \end{cases}$. Далее обозначим $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b \\ x_1x_2x_3=c \end{cases}$.

Воспользуемся тождествами: $(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)$$

Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} a^3-3(ab-c)=36 \\ a^2-2b=14 \\ ab-c=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3-3\cdot 60=36 \\ a^2-2b=14 \\ ab-c=60 \end{cases} \Rightarrow a^3=216,\quad a=6 \Rightarrow$$

А тогда $2b=36-14=22,\ b=11$. И наконец $c=66-60=6$.

Таким образом, имеем систему: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=11 \\ x_1x_2x_3=6 \end{cases}$.

Рассмотрим кубическое уравнение относительно x с корнями x_1, x_2, x_3. Тогда по т. Виета будем иметь $x^3-x^2(x_1+x_2+x_3)+x(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3=0$.
Далее имеем: $x^3-6x^2+11x-6=0$. Найдем корни этого уравнения. Первый корень будет очевидно $x = 1$, другие корни $x = 2, x = 3$.
Так как система симметрична относительно круговой перестановки переменных x_1, x_2, x_3, то система имеет шесть решений, которые получаются круговой перестановкой чисел
1, 2, 3. Значит минимальное значение tgx равно 1, максимальное 3.
Следовательно ответ: $\{4\}$

7. Имеем
$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd=$
$=x^4+4x^3+6x^2+5x+2=(x+1)(x+2)(x^2+x+1)$. Так как многочлен x^2+x+1 не имеет

действительных корней, то тождество $\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)=\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+x+1\right)$ означает, что $\begin{cases} x^2+ax+b=x^2+3x+2 \\ x^2+cx+d=x^2+x+1 \end{cases}$, либо $\begin{cases} x^2+ax+b=x^2+x+1 \\ x^2+cx+d=x^2+3x+2 \end{cases}$.

Отсюда находим, что *a = 3, b = 2, c = 1, d = 1* или *a = 1, b = 1, c = 3, d = 2* (поскольку равенство многочленов означает равенство коэффициентов при соответствующих степенях). Ответ: $\{14\}$

8. Будем решать задачу от противного. Пусть *a* - не есть искомое значение параметра. Это равносильно тому, что найдется хотя бы одно значение x_o, при котором значение функции $y=\dfrac{8x-20}{a-x^2}$, будет принадлежать отрезку [-4;-1], что, в свою очередь, означает, что имеется хотя бы одно решение неравенства: $-4 \le y \le -1 \leftrightarrow -4 \le \dfrac{8x-20}{a-x^2}=y \le -1 \leftrightarrow (y+4)(y+1) \le 0$. А тогда имеем

$$\left(\frac{8x-20}{a-x^2}+4\right)\left(\frac{8x-20}{a-x^2}+1\right)\le 0 \leftrightarrow \frac{\left(8x-20+4a-4x^2\right)\left(8x-20+a-x^2\right)}{\left(a-x^2\right)^2}\le 0 \leftrightarrow$$

$$\frac{\left(4x^2-8x+20-4a\right)\left(x^2-8x+20-a\right)}{\left(a-x^2\right)^2} \leftrightarrow \frac{\left(x^2-2x+5-a\right)\left(x^2-8x+20-a\right)}{\left(a-x^2\right)^2}\le 0.$$

Это неравенство должно иметь хотя бы одно решение, что будет, если дискриминант хотя бы одного квадратного трехчлена в числителе будет неотрицателен. Отсюда $Д_1 = a - 4 \ge 0,\ a \ge 4$; $Д_2 = a - 4 \ge 0,\ a \ge 4$.
А тогда ответ: a = 3.

9. Обозначим $a=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$. Нетрудно видеть, что $a>\sqrt{6}>2 \Rightarrow$ $a > 2$. Найдем верхнюю границу для этого числа. В конце выражения для *a* заменим $\sqrt{6}$ на $\sqrt{9}$.

Тогда получим, что $a<\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}}=\sqrt{6+\sqrt{6+3}}=\sqrt{6+3}=3$. Таким образом, $2 < a < 3$. Отсюда следует, что $[a]=2$. Ответ: $\{2\}$.