I вариант (ответы и краткие решения)

Задача 1. Из $x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}$ следует, что $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$ для всех $n \geq 2$. Это значит, что последовательность – арифметическая прогрессия. Пусть разность прогрессии равна d. Тогда $\frac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}} = \frac{1006d}{503d} = 2$.
Ответ: 2.

Задача 2. Среди данных чисел не более чем 34 числа могут быть не меньше единицы, иначе условие задачи не выполнено. Возьмем 35 чисел, среди которых имеются все числа, которые не меньше чем единица. Произведение взятых 35 чисел по условию меньше единицы. Все прочие числа меньше единицы. Их произведение тоже меньше единицы. Следовательно, произведение всех чисел также меньше единицы.

Задача 3. Пусть число N записано цифрами $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$, то есть

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Вычтем из числа N сумму его цифр:

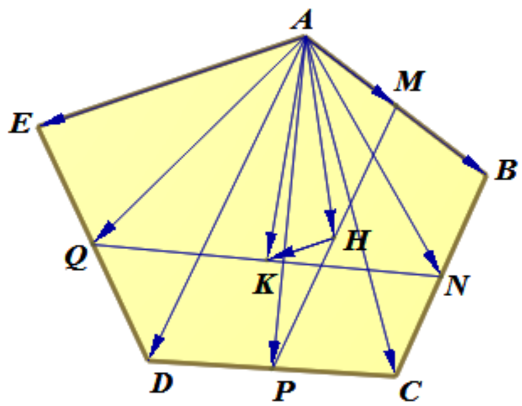
$$N - (a_n + a_{n-1} + ... + a_0) = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + ... + 9a_1.$$

Числа вида $10^k - 1$ делятся на 9. Значит, число $N - (a_n + a_{n-1} + ... + a_0)$делится на 9. Следовательно, при делении на 9 каждое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр. Пусть в записи числа A встречается n четверок. Тогда двоек там $n+19$, а все оставшиеся цифры – тройки. Сумма цифр равна

$$4 \cdot n + 2 \cdot (n+19) + 3 \cdot (61 - 2n - 19) = 6n + 38 + 126 - 6n = 164.$$

В свою очередь, сумма цифр числа 164 равна 11. Остаток от деления 11 на 9 равен 2. Такой же остаток имеет число 164 и, следовательно, число A.
Ответ: 2.

Задача 4. Используем векторы.



$$\overline{HK} = \overline{AK} - \overline{AH} = \frac{1}{2}\left(\overline{AQ} + \overline{AN}\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{AM} + \overline{AP}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{AE} + \overline{AD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\left(\overline{AC} + \overline{AD}\right)\right) = \frac{1}{4}\overline{AE}.$$

Значит, $HK = \frac{1}{4}AE = 1,75$.

Ответ: 1,75.

Задача 5. Группируя слагаемые, получим

$$(x-1)^2 (y^2 + 1) + y^2 + 1 = 4y|x-1|; \quad \left(|x-1|^2 + 1\right)\left(y^2 + 1\right) = 4y|x-1|.$$

Очевидно, при $y=0$ или при $x=1$ решений нет. Разделим обе части на $y|x-1|$. Получим: $\left(|x-1|+\dfrac{1}{|x-1|}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4$.

При $y<0$ решений нет, значит, $y>0$. Известно[1] (легко показать), что если $a>0$, то $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, причем равенство достигается, только если $a=1$. Следовательно, правая часть равна 4, только если $|x-1|=1$ и $y=1$.

Ответ: (0, 1), (2, 1).

Задача 6. Предположим, что T – период функции $y=f(x)$. Из условия получаем:

$$\sin x = f(x)-0,5f(x-\pi)=f(x-T)-0,5f(x-T-\pi)=\sin(x-T).$$

Поскольку это равенство верно для всех x, число T является периодом функции $y=\sin x$, т.е. $T=2\pi n,$ где n – некоторое натуральное число. Из данного уравнения получаем:

$$f(x)=0,5f(x-\pi)+\sin x=0,5\big(0,5f(x-2\pi)-\sin x\big)+\sin x=$$

$$=0,5\Big(0,5\big(f(x-3\pi)+\sin x\big)-\sin x\Big)+\sin x=$$

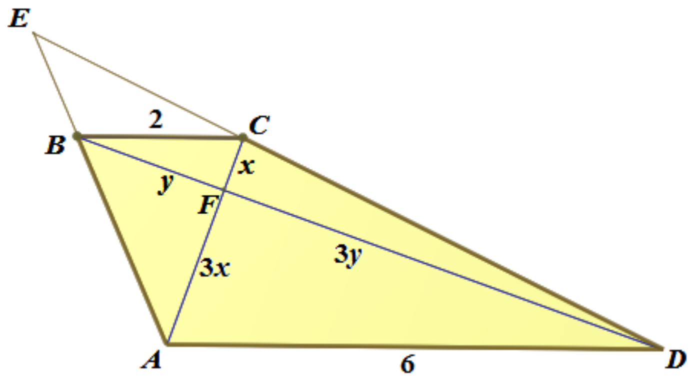
$$=\ldots=0,5\Big(0,5\big(\ldots\big(0,5f(x-2\pi n)-\sin x\big)+\ldots+\sin x\big)-\sin x\Big)+\sin x=$$

$$=0,5^{2n}f(x)-\sin x\left(0,5^{2n-1}-0,5^{2n-2}+0,5^{2n-3}-\ldots+0,5-1\right).$$

Тогда $f(x)\left(1-0,5^{2n}\right)=\sin x\left(1-0,5+0,5^2-\ldots-0,5^{2n-1}\right)=\sin x\dfrac{1-0,5^{2n}}{1+0,5}$.

Следовательно, $f(x)=\dfrac{2}{3}\sin x$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{2}{3}\sin x$.



Задача 7. Введем обозначения, как на рисунке. Продолжив боковые стороны, обозначим их точку пересечения буквой E. Точку пересечения диагоналей назовем F. Прямоугольные треугольники BFC и DFA подобны и, если обозначить катеты первого x и y, то соответственные катеты второго равны $3x$ и $3y$.

Высота трапеции h складывается из высот треугольников BFC и AFD:

$$h=\frac{BF\cdot FC}{2}+\frac{AF\cdot FD}{6}=\frac{xy}{2}+\frac{9xy}{6}=2xy.$$

Площадь трапеции равна $\dfrac{8}{9}$ площади треугольника AED. Получаем:

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin 30^\circ=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}AB\cdot\frac{3}{2}CD=\frac{1}{2}AB\cdot CD\ ,$$

[1] Это утверждение является частным случаем неравенства Коши.

откуда $8xy = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+9y^2}\cdot\sqrt{y^2+9x^2}$. Учитывая, что $x^2+y^2=4$, находим:

$$8xy = \frac{1}{2}\sqrt{4+8y^2}\cdot\sqrt{4+8x^2} = 2\sqrt{\left(1+2y^2\right)\left(1+2x^2\right)}.$$

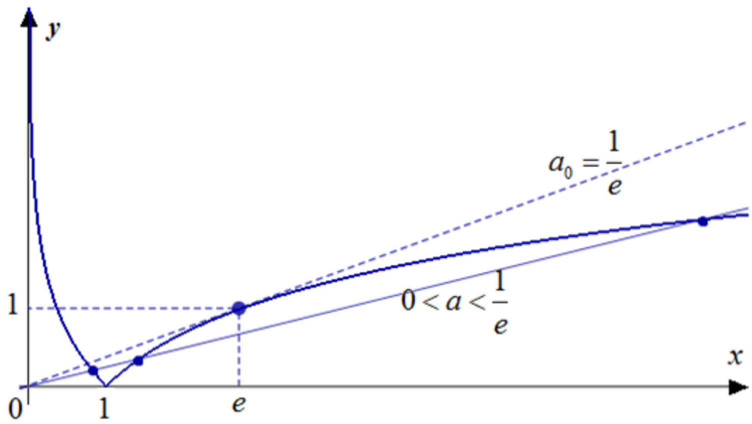
Проведем очевидные преобразования:

$$16x^2y^2 = 1+2\left(x^2+y^2\right)+4x^2y^2;\quad 12x^2y^2=9;\quad 2xy=\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 8. Левая часть уравнения неотрицательна. Следовательно, $ax \ge 0$. При $a=0$ уравнение имеет два корня -1 и 1. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию.

Рассмотрим случай $a>0$. Тогда $x\ge 0$ и поэтому $|x|=x$. Построим график функции $y=|\ln x|$. Прямая $y=ax$ должна пересекать этот график в трех точках. На рисунке видно, что это выполняется тогда и только тогда, когда прямая проходит внутри угла, образованного осью абсцисс и касательной $y=a_0x$ к графику функции $y=\ln x$ при $x>1$.



Найдем a_0. Абсцисса точки касания удовлетворяет уравнениям $a_0x=\ln x$, $a_0=\frac{1}{x}$, откуда $a_0=\frac{1}{e}$, $x=e$. Таким образом, $0<a<\frac{1}{e}$.

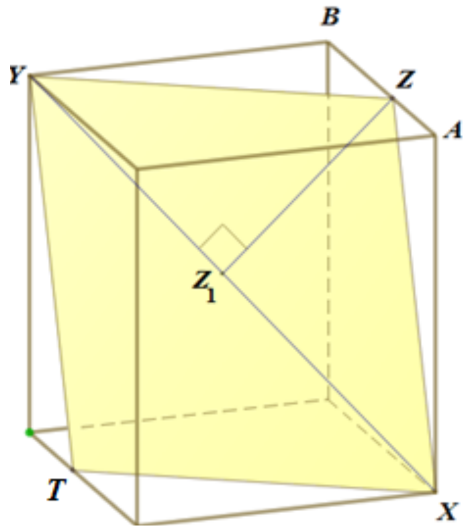
Случай $a<0$ симметричен, то есть $-\frac{1}{e}<a<0$.

Ответ. $-\frac{1}{e}<a<0,\ 0<a<\frac{1}{e}$.

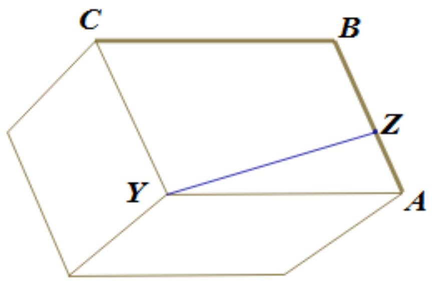
Задача 9. На четыре вопроса каждый рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец – три. Всего было получено $105+45+85+65=300$ утвердительных ответов. Если бы все жители города были рыцарями, в сумме всех утвердительных ответов было бы 200. 100 лишних ответов «да» происходят от вранья лжецов. Таким образом, лжецов $\frac{100}{2}=50$. Пусть в квартале Б живет k рыцарей, тогда $45-k$ – число утвердительных ответов на второй вопрос, которые дали лжецы. Значит число лжецов, живущих в квартале Б, равно $50-(45-k)=k+5$. В остальных кварталах число лжецов меньше числа рыцарей.

Ответ: в квартале Б, на 5.

Задача 10. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед сечениями, равна сумме площади поверхности параллелепипеда и площадей внутренних поверхностей. Сумма площадей внутренних поверхностей равна удвоенной сумме площадей сечений.



Найдем наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через диагональ XY произвольного параллелепипеда с ребрами $a \le b \le c$. Сечением является параллелограмм $ZXTY$, вершины которого лежат на противоположных рёбрах параллелепипеда. Площадь параллелограмма равна произведению длины диагонали XY на расстояние от точки Z до XY.

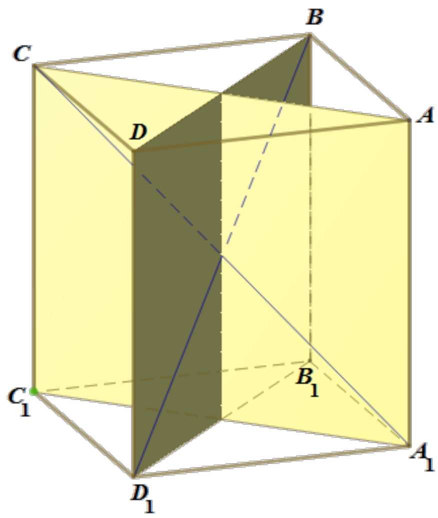


Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную диагонали XY. На рисунке видно, что расстояние от точки Z ломаной ABC до точки Y, то есть до диагонали XY, наибольшее, если Z совпадает с одной из вершин A, B или C.

Значит, сечение проходит через одно из ребер параллелепипеда. Таким образом, наибольшую площадь имеет одно из диагональных сечений. Все эти сечения являются прямоугольниками. Найдем наибольшую из их площадей

$$S_1 = a\sqrt{b^2 + c^2}, \; S_2 = b\sqrt{a^2 + c^2} \text{ и } S_3 = c\sqrt{b^2 + a^2}.$$

Из условия $a \le b \le c$ следует, что, $a^2b^2 + a^2c^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$, и $a^2b^2 + c^2b^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$. Поэтому $S_1 \le S_3$ и $S_2 \le S_3$. Значит, наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через наибольшее ребро. По условию наибольшую длину имеет ребро AA_1, значит, наибольшую площадь $5\sqrt{4^2 + 3^2} = 25$ имеют сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D.



Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед этими сечениями (см. рисунок), равна

$$2(AA_1 \cdot AB + AA_1 \cdot AD + AB \cdot AD) + 4 \cdot 25 = 194.$$

Ответ: 194.