

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Отраслевая олимпиада по математике для школьников
11 класс, 1 декабря 2012 года

1. (5 баллов.) Числа A, G, M, T, Y , записанные в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию. Привести пример таких различных чисел, чтобы выполнялось равенство

$$M \cdot G \cdot T \cdot Y = G \cdot A.$$

2. (5 баллов.) В некотором районе расположены пять деревень: A, B, C, D, O . Центры деревень A, B, C, D находятся в вершинах прямоугольника со сторонами 6 км и 8 км. Деревня O находится в центре прямоугольника. Между центрами некоторых деревень планируется проложить асфальтированные дороги. Сколько километров дорог надо минимально заасфальтировать, чтобы была возможность добраться по новой дороге из любой деревни в любую?
3. (5 баллов.) Паша поднимается по лестнице с первого этажа на пятый в два раза быстрее, чем Маша поднимается с первого этажа на третий. Кто быстрее поднимется – Маша на пятый этаж или Паша на семнадцатый?
4. (5 баллов.) В ящике лежат 10 красных шариков и 40 синих. Наугад вынимаются 3 шарика. Найти вероятность того, что среди вынутых шариков найдутся два шарика одного цвета.
5. (5 баллов.) На какое наименьшее число частей в зависимости от параметра a делят вместе координатную плоскость графики функций $y = x^2 + ax - 1$ и $y = \frac{a}{x}$?
6. (5 баллов.) Папа с сыном решили сделать снеговика. Папа вырезал кусок снега объемом 1 м^3 , а сын – объемом 4 дм^3 . Объединив весь этот снег, папа с сыном скатали 3 шара разных радиусов и соорудили снеговика. Найти высоту получившегося снеговика, если оказалось, что радиус каждого шара равен целому числу дециметров. Везде в расчетах считать число $\pi = 3$. (1 м = 1 метр = 100 сантиметров; 1 дм = 1 дециметр = 10 сантиметров.)

Решения и ответы

Задача 1.

Числа 1, 2, 4, 8, 16 составляют геометрическую прогрессию с первым членом 1 и разностью 2. Используем их для составления требуемого равенства:

$$1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 8 = 4 \cdot 16.$$

Ответ: А=16, Г=4, М=1, Т=2, У=8.

Задача 2.

Чтобы соединить 5 деревень, нужно проложить, по крайней мере, 4 дороги между деревнями. Меньшим числом дорог обойтись нельзя, так как иначе какая-то из деревень окажется изолированной. Соединим центр деревни О с центром каждой другой деревни. Расстояние от деревни О до центра любой другой деревни равно 5 км (это расстояние равно половине диагонали прямоугольника). Следовательно, общая протяженность новых дорог составит 20 км и имеется возможность доехать из любой деревни в любую. Если вместо соединения центра деревни О с центром другой деревни построим какую-либо другую дорогу, то общая протяженность дорог увеличится, так как расстояния между двумя другими деревнями равно 6 км или 8 км, что больше 5 км.

Ответ: 20.

Задача 3.

Паша поднимается на четыре этажа в два раза быстрее, чем Маша на два. Значит, скорость Паши в 4 раза больше. Паше надо подняться на семнадцатый этаж, то есть преодолеть 16 пролетов. Маше надо подняться на пятый этаж, то есть преодолеть 4 пролета. Паше надо проделать путь в 4 раза длиннее, чем Маше, но и скорость Паши в 4 раза больше, чем скорость Маши. Следовательно, каждый своего этажа они достигнут одновременно.

Ответ: одновременно.

Задача 4.

Вынутых шарика три, а возможных разных цветов два. Следовательно, обязательно найдутся два шарика одного цвета. (Хотя мы и не знаем, красные это будут шарики или синие.)

Ответ: 100%.

Задача 5.

Найдем точки пересечения графиков функций:

$$x^2 + ax - 1 = \frac{a}{x}$$

$$x^3 + ax^2 - x - a = 0$$

$$x^2(x+a) - (x+a) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x+a) = 0$$

$$x = 1, \quad x = -1, \quad x = -a$$

Следовательно, точки пересечения графиков функций имеют координаты

$$(1; a), \quad (-1; -a), \quad (-a; -1)$$

При $a=1$, $a=-1$ точек пересечения будет две. При $a=0$ тоже будет две точки пересечения, так как точка $x=0$ не принадлежит области допустимых значений второй функции. При остальных значениях a имеется три точки пересечения.

Учитывая полученные точки пересечения и начертив графики функций, получаем:

при $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq 0$ графики функций делят координатную плоскость на 7 частей;

при $a=1$, $a=-1$ графики функций делят координатную плоскость на 6 частей;

при $a=0$ графики функций делят координатную плоскость на 4 части. В данном случае точка $(0;0)$ прямой $y=0$ выколота. Поэтому "внутри" параболы содержится только одна часть плоскости. А всего частей при $a=0$ получается четыре.

Ответ: 4.

Задача 6.

Обозначим через R_1, R_2, R_3 радиусы скатанных шаров снега.

Считая везде в вычислениях, что $\pi = 3$, получаем

$$V = \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{4}{3}\pi R_2^3 + \frac{4}{3}\pi R_3^3 = 4(R_1^3 + R_2^3 + R_3^3) = 100400.$$

Откуда,

$$R_1^3 + R_2^3 + R_3^3 = 251000.$$

Так как радиус каждого шара равен целому числу дециметров, сделаем замену:

$$R_1 = 10r_1, \quad R_2 = 10r_2, \quad R_3 = 10r_3,$$

где r_1, r_2, r_3 – целые числа. Получаем зависимость:

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = 251.$$

Считая, например, что $r_1 > r_2 > r_3$, находим небольшим перебором, что

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 2.$$

Далее,

$$R_1 = 60, \quad R_2 = 30, \quad R_3 = 20.$$

Учитывая, что высота снеговика равна сумме диаметров шаров, окончательно находим искомую высоту:

$$2 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = 2 \cdot (60 + 30 + 20) = 220.$$

Ответ: 220 см.