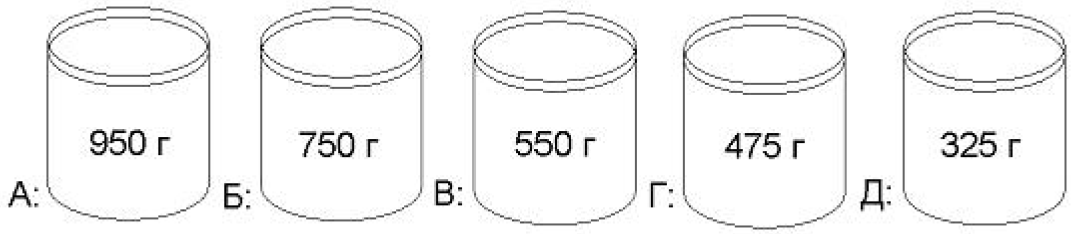
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Отраслевая олимпиада по математике для школьников
11 класс, 12 февраля 2012 года

1. (5 баллов.) В равенстве $\text{М}^{\text{Г}}\times\text{Т}^{\text{У}}=\text{Г}^{\text{А}}$ под русскими буквами понимается одна из цифр от 2 до 9 включительно, причём одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам соответствуют разные цифры. Возможно ли такое равенство?
2. (5 баллов.) Можно ли представить дробь 2/7 в виде суммы двух дробей, числители которых равны 1, а знаменатели — различные целые числа?
3. (5 баллов.) В каждом из пяти стаканов кофе, какао или молоко. Общий объём кофе вдвое больше объёма какао. Известно, что ни в каких трёх стаканах нет одинакового напитка и какао лишь в одном стакане. В каком стакане какао?



4. (5 баллов.) На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки K и L. Пусть E – точка пересечения отрезков AL и DK, F – точка пересечения BL и CK. Доказать, что сумма площадей треугольников ΔADE и ΔBCF равна площади четырёхугольника $EKFL$.
5. (5 баллов.) Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие равное число знакомых в этой компании (если А знаком с В, то и В знаком с А).
6. (5 баллов.) В коробке лежат 7 карточек с написанными на них числами от 1 до 7 (по одному числу на карточке). Первый мудрец наугад берёт три карточки из коробки, а второй – две (ещё две карточки остаются в коробке). Первый мудрец, глядя на свои карточки, говорит второму: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётная». Чему равна сумма чисел, записанных на карточках первого мудреца?

Решения и ответы

Задача 1.

Решению задачи удовлетворяют, например, следующие значения: М=2, Г=8, Т=4, У=5, А=6, а числовое равенство принимает вид: $2^8 \cdot 4^5 = 8^6$.

Ответ: возможно.

Задача 2.

Можно, например,

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

Ответ: можно.

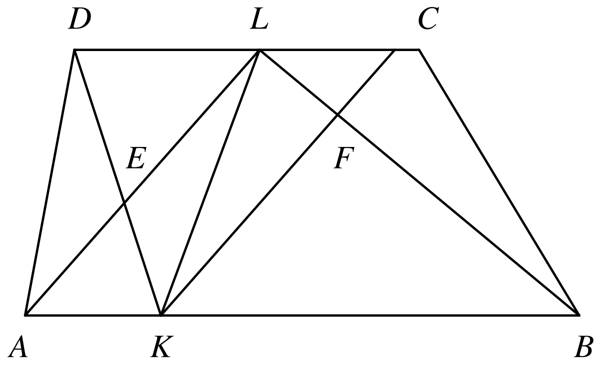
Задача 3.

Стакан с какао один. Тогда в двух из остальных четырёх стаканов кофе, и в двух – молоко.

В первом стакане какао быть не может, т.к. его объём максимальный и 2 других стакана не смогут занимать вдвое больший объём. А второй стакан (750 г) подходит, тогда кофе будет в первом и третьем стаканах (950+550). Далее остается убедиться, что ни для какого из оставшихся стаканов нельзя найти двух других таких стаканов, чтобы они занимали вдвое больший объём.

Ответ: Б.

Задача 4.



Имеем $S_{\Delta ADK} = S_{\Delta ALK}$, так как они имеют общее основание AK и равные высоты, совпадающие с расстоянием между параллельными прямыми AB и DC. $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ADK} - S_{\Delta AEK} = S_{\Delta ALK} - S_{\Delta AEK} = S_{\Delta KLE}$. Аналогично, $S_{\Delta BCF} = S_{\Delta KLF}$. Таким образом, сумма площадей треугольников ΔADE и ΔBCF равна площади четырёхугольника $EKFL$.

Ответ: доказано.

Задача 5.

Пусть в компании k человек. Тогда каждый человек может иметь от нуля до $(k-1)$ знакомых. Предположим противное: количество знакомых у всех разное. Тогда найдется человек без знакомых, найдется человек с одним знакомым, и так далее, наконец, найдется человек, у которого $(k-1)$ знакомых. Но тогда этот последний знаком со всеми, в том числе и с первым. Но тогда у первого не может быть ноль знакомых. Получили противоречие.

Ответ: доказано.

Задача 6.

Первый мудрец будет точно знать, что сумма цифр на карточках старого мудреца чётна лишь в том случае, если ему будет известно, что все оставшиеся числа – одной чётности. Следовательно, ему могли выпасть только карточки с числами 2, 4 и 6, их сумма равна 12.

Ответ: 12.