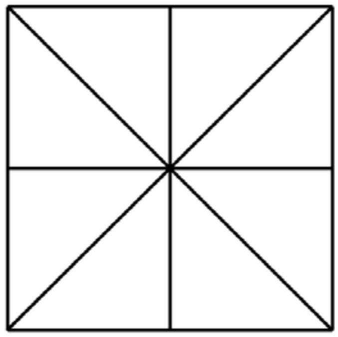
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Отраслевая олимпиада по математике для школьников
11 класс, 3 декабря 2011 года

1. (5 баллов.) Сколько треугольников в фигуре, изображенной на рисунке?



2. (5 баллов.) В равенстве $М^{Г} \cdot Т^{У} = Г^{А}$ под русскими буквами понимается одна из цифр от 0 до 9 включительно, причём одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам соответствуют разные цифры. Возможно ли такое равенство?
3. (5 баллов.) Начертите на плоскости Oxy множество точек, удовлетворяющих равенству
$$\sqrt{(x+y)^2} = \sqrt[4]{(x-y)^4}\ .$$
4. (5 баллов.) В треугольнике с углом 120° стороны образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найдите стороны треугольника.
5. (5 баллов.) По круговой трассе длиной 7 километров едут два мотоциклиста сначала в одном направлении, а потом в противоположных направлениях. В первом случае первый мотоциклист обгоняет второго каждые 28 минут, а во втором случае они встречаются каждые 4 минуты. Найдите скорости мотоциклистов.
6. (5 баллов.) Имеется 11 кучек монет по 10 монет в каждой кучке. В десяти кучках все монеты настоящие, а в одной кучке все монеты фальшивые. Вес настоящей монеты 3 грамма, вес фальшивой монеты 2 грамма. С помощью электронных весов можно узнать вес положенных на них монет. За какое наименьшее число взвешиваний на электронных весах можно определить, какая из кучек состоит из фальшивых монет?

Решения и ответы

Задача 1.

8 маленьких треугольников, 4 треугольника, составляющих четверть квадрата и 4 треугольника, составляющих половину исходного квадрата.

Ответ: 16.

Задача 2.

Решению задачи удовлетворяют, например, следующие значения: М=1, Г=2, Т=4, У=3, А=6, а числовое равенство принимает вид: $1^2 \cdot 4^3 = 2^6$.

Ответ: возможно.

Задача 3.

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{(x-y)^2}\ .$$

Возводим обе части равенства в квадрат, получаем

$$(x+y)^2 = (x-y)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых приходим к уравнению $xy = 0$, откуда $x = 0$ при любом значении y или $y = 0$ при любом значении x. Графически полученные решения соответствуют осям Oy и Ox соответственно.

Ответ: оси координат.

Задача 4.

Обозначим меньшую сторону треугольника буквой a. Тогда две другие стороны треугольника будут равны $a+1$ и $a+2$. По условию задачи больший угол треугольника равен 120º. Так как против большего угла лежит большая сторона, то большая сторона треугольника равна $a+2$. Применяя теорему косинусов для треугольника, получаем равенство

$$(a+2)^2 = (a+1)^2 + a^2 - 2(a+1)a\cos 120^\circ.$$

Решая полученное уравнение, находим, что $a = 1{,}5$, откуда стороны треугольника равны 1,5; 2,5; 3,5.

Ответ: 1,5 см, 2,5 см, 3,5 см.

Задача 5.

Пусть скорость первого мотоциклиста x метров в минуту, скорость второго - y метров в минуту. Из условий задачи записываем систему

$$\begin{cases} 28(x-y)=7000, \\ 4(x+y)=7000. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$\begin{cases} x=1000, \\ y=750. \end{cases}$$

Переводя найденную скорость из метров в минуту в километры в час, окончательно получаем

Ответ: 60 км/ч, 45 км/ч.

Задача 6.

Из первой кучки возьмем одну монету, из второй кучки возьмем две монеты, из третьей - три монеты, и так далее… из девятой кучки возьмем девять монет, из десятой - десять монет. Из одиннадцатой кучки монеты брать не будем. Положим все отобранные 1+2+3+…+9+10=55 монет на весы и найдем их общий вес.

По условию задачи вес настоящей монеты 3 грамма. Если окажется, что общий вес взвешенных монет 3*55=165 грамм, значит, на весах фальшивых монет нет, поэтому фальшивой оказывается одиннадцатая кучка.

Если общий вес взвешенных монет меньше 165 грамм, то разница между 165 граммами и общим весом взвешенных монет и будет давать номер кучки из фальшивых монет.

Например, пусть из фальшивых монет состоит 4 кучка. На весах присутствуют 4 монеты из этой кучки. Так как вес фальшивой монеты на 1 грамм меньше, чем вес настоящей монеты, то общий вес взвешенных монет будет равен 161 грамму, то есть на 4 грамма меньше, чем 165 грамм.

Ответ: одно взвешивание.