

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 1

1. Доказать, что сумма двух последовательных натуральных чисел нечётна.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax + by + c = 0$, проходит через I , II и III координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа ab .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза больше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 3 раза меньше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 2 раза больше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$f(g(x + 1)) = 3, \quad \text{где } f(x) = \frac{|2x - 1|}{2}, \quad g(x) = |3x + 2|.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 6 окружностей радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 4 окружности радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение R/r .
6. При каких значениях параметра α графики

$$xy - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = 8 \sin^2 \alpha$$

разбивают плоскость ровно на 7 частей?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 2

1. Доказать, что произведение двух нечётных чисел нечётно.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax+by+c=0$, проходит через I , III и IV координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа bc .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза меньше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 2 раза больше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 3 раза больше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$g(f(x-2)) = 1, \quad \text{где } f(x) = |4x+1|, \quad g(x) = \frac{|2x-3|}{5}.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 3 окружности радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 6 окружностей радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение r/R .

6. При каких значениях параметра α графики

$$xy + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{8}{3} \cos^2 \alpha$$

разбивают плоскость ровно на 4 части?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 3

1. Доказать, что разность чётного и нечётного чисел нечётна.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax+by+c=0$, проходит через II , III и IV координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа cb .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза больше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 3 раза больше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 2 раза меньше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$g(f(x+3)) = 4, \quad \text{где } f(x) = |5x-2|, \quad g(x) = \frac{|3x+1|}{3}.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 4 окружности радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 4 окружности радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение R/r .
6. При каких значениях параметра α графики

$$1 - xy = 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{8}{3} \sin^2 \alpha$$

разбивают плоскость более чем на 4 части?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 4

1. Доказать, что сумма двух нечётных чисел чётна.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax + by + c = 0$, проходит через I , II и IV координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа ba .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза меньше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 2 раза меньше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 3 раза меньше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$f(g(x - 1)) = 2, \quad \text{где } f(x) = \frac{|3x + 1|}{4}, \quad g(x) = |4x - 3|.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 4 окружности радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 3 окружности радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение r/R .
6. При каких значениях параметра α графики

$$1 + xy = 0, \quad x^2 + y^2 = 8 \cos^2 \alpha$$

разбивают плоскость менее чем на 6 частей?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 5

1. Доказать, что произведение чётного и нечётного чисел чётно.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax+by+c=0$, проходит через II , III и IV координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа ab .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза больше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 3 раза меньше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 2 раза меньше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$f(g(x+4)) = 1, \quad \text{где } f(x) = \frac{|3x-2|}{3}, \quad g(x) = |2x+1|.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 6 окружностей радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 3 окружности радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение R/r .

6. При каких значениях параметра α графики

$$xy - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{8}{3} \cos^2 \alpha$$

разбивают плоскость более чем на 5 частей?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 6

1. Доказать, что сумма чётного и нечётного чисел нечётна.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax+by+c=0$, проходит через I , II и III координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа bc .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза меньше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 2 раза больше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 3 раза меньше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$g(f(x-3)) = 3, \quad \text{где } f(x) = |2x+3|, \quad g(x) = \frac{|4x-1|}{4}.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 4 окружности радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 6 окружностей радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение r/R .
6. При каких значениях параметра α графики

$$xy + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{8}{3} \sin^2 \alpha$$

разбивают плоскость более чем на 6 частей?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 7

1. Доказать, что разность двух нечётных чисел чётна.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax + by + c = 0$, проходит через I , II и IV координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа cb .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза больше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 3 раза больше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 2 раза больше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$f(g(x + 2)) = 4, \quad \text{где } f(x) = \frac{|5x - 3|}{2}, \quad g(x) = |3x - 4|.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 6 окружностей радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 6 окружностей радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение r/R .
6. При каких значениях параметра α графики

$$1 - xy = 0, \quad x^2 + y^2 = 8 \cos^2 \alpha$$

разбивают плоскость менее чем на 7 частей?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Окружной этап московской региональной
олимпиады по математике для школьников

11 класс, 9 февраля 2008 года, Вариант 8

1. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел чётно.
2. Линия, заданная на плоскости Oxy уравнением $ax + by + c = 0$, проходит через I , III и IV координатные четверти и не проходит через начало координат. Найти знак числа ba .

3. В двухэтажном доме на каждом этаже расположено по 8 комнат так, как показано на рисунке. В каждой комнате дома висит по 1 лампочке. На втором этаже лампочек горит в 3 раза меньше, чем на первом этаже. С левой стороны здания горящих лампочек в 2 раза меньше, чем с правой стороны. С задней стороны здания горящих лампочек в 3 раза больше, чем с передней стороны. Сколько горящих лампочек в доме? Начертить поэтажный план дома с одним из вариантов горящих лампочек.

○	○	○
○		○
○	○	○

Кружками обозначены лампочки, какие-то лампочки могут гореть, а какие-то не гореть.

4. Решить уравнение

$$g(f(x - 4)) = 2, \quad \text{где } f(x) = |2x - 5|, \quad g(x) = \frac{|3x + 4|}{5}.$$

5. Около некоторой окружности начерчены 3 окружности радиуса R так, что каждая из окружностей радиуса R касается внешним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса R ; и начерчены 4 окружности радиуса r так, что каждая из окружностей радиуса r касается внутренним образом первой окружности и касается двух окружностей радиуса r . Других общих точек окружности не имеют. Найти отношение R/r .
6. При каких значениях параметра α графики

$$1 + xy = 0, \quad x^2 + y^2 = 8 \sin^2 \alpha$$

разбивают плоскость менее чем на 5 частей?

Ответы на задания олимпиады

Вариант 1

2. $-$. 3. 4. 4. $-\frac{1}{2}; -\frac{17}{6}$. 5. $\sqrt{2} + 1$. 6. $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 2

2. $+$. 3. 4. 4. $\frac{11}{4}; \frac{3}{4}$. 5. $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.
6. $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n) \cup (\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 3

2. $+$. 3. 4. 4. $-\frac{10}{3}; -\frac{28}{15}$. 5. $3 + 2\sqrt{2}$. 6. $[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n], n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 4

2. $+$. 3. 4. 4. $\frac{7}{6}; \frac{7}{3}$. 5. $(\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{3} - 3)$.
6. $[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n], n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 5

2. $+$. 3. 4. 4. $-\frac{11}{3}; -\frac{16}{3}$. 5. $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$. 6. $(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 6

2. $-$. 3. 4. 4. $\frac{25}{8}; -\frac{1}{8}$. 5. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. 6. $(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 7

2. $-$. 3. 4. 4. $\frac{1}{15}; -\frac{7}{5}$. 5. $\frac{1}{3}$. 6. $[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n], n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 8

2. $-$. 3. 4. 4. $\frac{11}{2}; \frac{15}{2}$. 5. $(2\sqrt{3} + 3)(\sqrt{2} + 1)$.
6. $(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.